SHOUT
SHARE
IT

S. 1142 A.

MEMORIE

DI MATEMATICA
E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

DELLE SCIENZE

TOMO XVI PARTE I

CONTENENTE LE MEMORIE DI MATEMATICA

VERONA
DALLA TIPOGRAFIA DI LUIGI MAINARDI
MDCCCXIII

NATURAL HISTORY

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTA PRIMA PARTE.

Statuto della Società Pag. v

Catalogo de' Socj xii

Annali della Società, continuati da OTTAVIO CAGNOLI Vice-Segretario Amministratore della medesima xvii

Riflessioni sui principj d'Idraulica del Sig. Bernard: del Sig. ANTONIO LOMBARDI Socio Onorario *pag.* 1

Descrizione di un Teodolite stenografico: del Sig. GIO: BATTISTA MAGISTRINI 51

Sopra le linee e le superficie parallele: del Sig. A. BORDONI: presentata dal Socio Sig. Cav. *Brunacci* 72

Li Baratti Mercantili ridotti e dimostrati per algebra: del Sig. PIETRO COSSALI 124

Sopra la misura delle altezze del Barometro: Appendice alla Memoria inserita nel volume XIII: del Sig. GIO: RACAGNI 153

Saggi di Algebra trascendente e di Meccanica: del Sig. PIETRO FRANCHINI: presentati dal Sig. *Giuseppe Venturoli* 223

Disquisizione su i varj metodi di eliminazione con il componimento di un nuovo: del Sig. PIETRO COSSALI 272

Ricerche sulla latitudine dell'Osservatorio di Padova, del Sig. GIOVANNI SANTINI: presentate dal Sig. *Pietro Cossali* 331

Dimostrazione facile e naturale d'alcuni Teoremi geometrici ed analitici: del Sig. PIETRO FERRONI 347

Sopra la costruzione della curva, nella quale l'arco s è dato in funzione di $\frac{\delta y}{\delta x}$: del Sig. GIO: PLANA: presentata dal Sig. Cav. *Cesaris* *pag.* 361
Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche: del Sig. Cav. PAOLO RUFFINI 373
Errori e correzioni in questa prima parte 430

STATUTO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE.

1813.

I. La Società Italiana delle Scienze è composta di quaranta Socj attuali, tutti Italiani, di merito maturo, e per Opere date in luce ed applaudite riconosciuto.

II. La scienza della natura è il grande oggetto, che la Società medesima si propone. Pubblicherà pertanto, sotto il titolo di Memorie di Matematica e di Fisica, le produzioni di chiunque de' Socj vorrà render pubblico negli Atti Sociali il frutto de' proprj studj.

III. De' quaranta Membri, uno sarà Presidente della Società, e la presidenza durerà sei anni.

IV. Avrà la Società un Segretario, ed un Vicesegretario amministratore. Il primo sarà partecipe di tutte le facoltà dei Quaranta, benchè non fosse uno d'essi, ed avrà diritto, non obbligo, di presentar Memorie da inserirsi negli Atti. Il secondo terrà il maneggio economico.

V. §. 1. Altra Classe vi avrà di Socj Emeriti in numero indeterminato. Essa è preparata a chiunque dei Quaranta, o per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo, non producesse verun suo lavoro in quattro consecutivi tomi delle Memorie sociali.

§. 2. Ma se un Socio attuale passasse negli Emeriti dopo aver posto otto Memorie ne' tomi sociali, in tal caso seguiterà a godere, quantunque Emerito, tutte le prerogative di Attuale.

§. 3. Che se un Socio Emerito ponga Memorie in tre tomi consecutivi, sarà restituito nel ruolo degli Attuali.

VI. Un'altra Classe, parimente indeterminata, comprenderà i Socj Onorarj. A questa saranno ascritti, previo l'assenso di ventuno almeno dei Quaranta, i Compilatori, eletti dal Presidente, degli elogj de' Socj attuali defunti. Inoltre, esso Presidente potrà aggregare a questa classe, nel suo sessennio, due Soggetti, non più, che avessero operato cosa a pro della Società, onde meritassero d'esserne onorati particolarmente.

VII. Ed altra Classe avrà finalmente il titolo di Socj stranieri, stabilita per distinguere ed onorare il merito nelle Scienze in qualunque parte fuori d'Italia. Sarà composta di dodici Soggetti, a ciascun de' quali verrà esibito in dono un esemplare d'ogni Volume, che uscirà in luce, delle Memorie Sociali.

VIII. Le aggregazioni alle classi de' Socj attuali e degli stranieri si faranno nel modo seguente. Per ogni posto che rimanga vacante, dovrà il Presidente, col mezzo del Segretario proporre sei nomi a ciascuno de' Socj attuali, il qual farà scelta d'uno, e lo indicherà per lettera al Segretario. Quel de' sei, che, entro il termine di due mesi dalla proposta, avrà più suffragj, s'intenderà aggregato, e la Compagnia sarà fatta opportunamente consapevole dell'acquistato Cooperatore.

IX. All'elezione del Presidente saranno invitati li Socj attuali con una lettera circolare del Segretario, al quale ognuno di essi farà tenere in iscritto la nomina del Socio da sè eletto a Presidente: e la pluralità de' voti, che arriveranno al Segretario, dentro il termine di due mesi dopo la data del circolare invito, determinerà l'elezione, che dovrà esser dal Segretario annunziata ai Membri votanti.

X. Ciascheduno dei Quaranta ha facoltà d'inserire negli Atti una scoperta utile, un' importante produzione, anche di persona non aggregata ma Italiana, purchè tal produzione, o scoperta sia giudicata degna degli Atti stessi anche da un altro Socio, il qual venga destinato segretamente dal Presidente di volta in volta all'esame della cosa presentata, ed il suo nome (quando approvi) si stampi insieme con quello del presentatore.

XI. Di questi Autori non Socj dovrà il Presidente aggiungere i nomi, segnati con asterisco, ai sei che presenta, a tenor dell'articolo VIII, per l'elezione d'un Socio attuale. Bensì questa nomina cesserà, dopo fatta sei volte, contate dalla pubblicazione d'ogni Memoria.

XII. Le Dissertazioni o Memorie da pubblicarsi ne' Volumi della Società, debbon essere scritte in lingua Italiana e in carattere chiaro. Il Segretario dovrà apporvi la data del recapito, acciocchè sieno stampate con essa in fronte e per ordine di tempo. Che se l'opera sia voluminosa, può l'Autore distribuirla in due o più parti pe' tomi susseguenti.

XIII. Tutto ciò che è destinato pegli Atti dev'esser nuovo, inedito, importante, ed analogo all'indole scientifica di questi Volumi, che non ammette sfoggio d'erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni.

XIV. I fogli stampati di ciascun Volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie soprabbondanti resteranno in deposito pel tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le dimandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Socj dovranno cedere il luogo a quelle de' Socj.

XV. La Società non si fa risponsabile delle Opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev'esser mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente.

XVI. Non permette peraltro la Società le invettive personali, e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario, e ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XVII. Il Socio attuale, Autore d'una Memoria o d'un Elogio, avrà in dono cinquanta esemplari della sua produzione, con frontispizio apposito, e con la numerazion delle pagine ed il registro ricominciati. Ad ogni altro Autore saranno corrisposte dodici copie. Qualunque Autore ne desiderasse di più, non sarà aggravato d'alcuna spesa per conto della composizion tipografica.

XVIII. Nell'atto di queste spedizioni sarà trasmessa ai Socj, che avranno mandato il voto per le elezioni, la dimostrazione stampata del numero de' suffragj toccati ad ogni Candidato, senza il nome però de' votanti, e così ancora i conti stampati dell'amministrazione tenuta dal Vicesegretario amministratore.

XIX. Alle principali Accademie estere sarà offerto in dono un esemplare d'ogni Volume delle Memorie sociali, che andrà successivamente uscendo alla luce.

XX. I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantener l'osservanza dello Statuto; eleggere il Segretario ed il Vicesegretario, qualunque volta sia di bisogno; avere in governo e cura ogn'interesse della Società; rivedere, almeno una volta all'anno, i conti dell'amministrazione del Vicesegretario, alla validità de' quali fa d'uopo l'approvazione e sottoscrizione di mano propria del Presidente: e ragguagliar finalmente il Successore dello stato degli affari nell' atto di rinunziargli l'Uffizio.

XXI. Dopo il Presidente, il Segretario è la Persona propriamente deputata a mantener corrispondenza con tutti i Membri della Società, e quasi centro, ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Egli invia le patenti d'aggregazione; presiede alla stampa, ai Correttori di quella, ed all' incision delle tavole; prende cura delle spedizioni, e d'ogni altro interesse della Società, sempre però con l'approvazione del Presidente. Egli deve pure tener registro d'ogni atto che importi; custodire i voti de' Socj per le elezioni, manifestandoli al Presidente ad ogni richiesta; e finalmente eseguir tutto ciò, che ne' precedenti articoli gli è addossato.

XXII. §. 1. Ad esempio delle principali Accademie, la Società Italiana delle Scienze avrà Membri pensionarj: e la pensione sarà d'annui zecchini ventiquattro, pagabili per metà allo spirare d'ogni semestre; non computate in verun caso, sia di morte, o di rinunzia, o di transito negli Emeriti, le frazioni di semestre.

§. 2. Saranno capaci della pensione li tre più anziani, e di permanenza non interrotta, nel ruolo de' Socj attuali; sin a tanto però che rimangano nel ruolo medesimo.

§. 3. Qualunque volta l'eguaglianza d'età accademica renda ambigua la scelta d'uno o più Pensionarj; sarà tolta l'ambiguità concedendo la preferenza alla maggior età naturale. Nel qual caso, il Segretario chiederà a ciascun de' coetanei come sopra, documento legale dell'epoca di sua nascita; e chi non lo faccia a lui pervenire entro mesi tre dopo la domanda, s'intenderà che rinunzj alla pensione.

§. 4. Due Socj (sia ciascun d'essi attuale o emerito) potranno inoltre goder la pensione, loro vita naturale durante, quando siano autori ciascuno di dieci o più Memorie stampate ne' Tomi Sociali, il valor delle quali venga giudicato degno di tal premio dalla pluralità assoluta de' Socj attuali, a proposizione del Presidente; ovvero dalla pluralità relativa, quando si tratti di giudicare del merito relativo fra più Candidati.

§. 5. In ambi questi partiti le opinioni de' Socj resteranno sempre segrete, ed a sola notizia del Presidente e del Segretario: si pubblicherà unicamente il numero de' suffragj a favore di ciascun Candidato, siccome è prescritto per le elezioni nell'articolo XVIII.

§. 6. Avranno titolo di *Pensionarj anziani* li tre del §. 2; di *Pensionarj giubilati* li due del §. 4.

§. 7. Potrà il Pensionario anziano passare a goder la pensione come giubilato, sotto le condizioni prescritte dal §. 4, e quando l'un de' due posti sia vacuo.

XXIII. A compensazion delle spese, che incontrano i Quaranta ne' porti di lettere per cagion della Società, ogni anno, nel mese di Gennajo, sarà fatto l'esame, onde riconoscere i Membri attuali, che avranno corrisposto a tutte le lettere del Presidente e del Segretario nel corso dell'anno antecedente, e dentro li rispettivi termini di tempo in esse specificati; ciascuno de' quali Socj avrà diritto di esigere zecchini tre dalla cassa della Compagnia.

XXIV. §. 1. Ogni volta, che la forza pecuniaria della stessa Società lo consenta, si esporranno programmi al concorso pubblico. Risoluto ciò dal Presidente, il Segretario inviterà li Socj attuali a proporre argomenti. Questi esser dovranno, o Fisici, o Matematici, o Fisico-Matematici, o in qualunque modo giovevoli a queste scienze, e sempre applicabili ad utile general dell'Italia. Il Segretario li manderà stampati a ciaschedun Socio, pretermettendo quelli che uscissero dalle condizioni ora prescritte. Ogni Socio spedirà al Segretario il proprio suffragio per la scelta dell'argomento, e dichiarerà insieme qual premio reputi conveniente e qual tempo alla facitura ed alla presentazione delle Memorie. Quel tema che avrà più suffragj, sarà adottato: nel caso di parità di voti, deciderà la sorte.

§. 2. Tosto si comunicherà alla Compagnia l'argomento coronato, ed il numero de'suffragj riscossi da ogni argomento. Nell'atto stesso sarà richiesto ciaschedun Socio attuale di nominarne tre (di qualunque Classe, purchè Italiani, e dimoranti attualmente in Italia); quelli cioè, che ciascuno, osservato il quesito, stimerà più adattati a giudicar le Memorie che compariranno al concorso. Quei tre, ne'quali concorrerà maggior numero di suffragj (l'uguaglianza rimovasi con la sorte), s'intenderanno destinati a pronunziare il giudizio.

§. 3. Nelle occasioni statuite sopra, saranno come non fatte le risposte de' Socj, qualora non giungano al Segretario dentro quaranta giorni dalla data della rispettiva Circolare di Lui.

§. 4. Il nome de' Giudici eletti rimarrà a sola notizia del Presidente e del Segretario: se non che ciascun di quelli sarà fatto consapevole della propria destinazione, con divieto di concorrere al programma e di manifestarla a chicchessia: niun di loro saprà i suoi Colleghi. Se qualcun ricusasse, sarà sostituito il prossimo inferiore in quantità di voti. Ogni Giudice riceverà, dopo pronunziato il giudizio, un decente compenso dell'esclusion dal concorso.

§. 5. Il Presidente, considerati i pareri de' Socj, lo stato economico della Società, e l'importanza di moltiplicare i programmi, stabilirà la grandezza del premio, ed il termine da assegnarsi al concorso. Sarà tosto promulgato il problema per tutta Italia. Ogni Italiano, anche Socio, potrà concorrere: rimangono esclusi li soli tre Giudici. Le Memorie dovranno essere inedite, scritte in lingua Italiana, e pervenute nelle mani del Segretario entro il termine prescritto dal programma: il nome degli Autori sarà occulto: ogni Memoria porterà in fronte un motto, e sarà accompagnata da un biglietto suggellato, contrassegnato al di fuori dal medesimo motto, e contenente, al di dentro in maniera occultissima, nome, cognome, patria, domicilio e profession dell'Autore. Il mancare a qualunque delle antecedenti condizioni fa perdere il premio.

§. 6. Tosto che il concorso sia chiuso, il Presidente, veduto il numero e l'estension delle Memorie, definirà il tempo, entro il quale ogni Giudice dovrà pronunziare il giudizio. Allora il Segretario trasmetterà le Memorie, tutte unite, ad uno de' Giudici: da cui restituite che siano, e notificato il proprio giudizio al Segretario, saranno da questo fatte pervenire ad altro Giudice; quindi con le regole stesse al terzo. Ogni Memoria coronata da un Giudice, sarà stampata col nome dell' Autore. Il premio sarà dato a quella Memoria, che venga coronata da tre, o da due Giudici. Se tutti e tre li giudizj fossero discordi, si dividerà il premio fra le tre Memorie coronate. Lo stesso si farà tra due coronate, qualora un Giudice neghi il premio a tutte le Memorie, e gli altri due non siano concordi. Che se fossero due li giudizj di negativa generale del premio, in tal caso il terzo giudizio non sarà di alcun valore: si notificherà alla Compagnia l'esito del giudizio e si passerà alla pubblicazione di nuovo programma, coi metodi stabiliti sopra.

§. 7. Ma quando sia conferito il premio, il Segretario annunzierà prontamente ai Socj ed a tutta l'Italia il nome degli Autori delle Memorie coronate, indicando quello cui spetta il premio. Esse Memorie saranno stampate senza indugio; se ne spedirà un esemplare ad ogni Socio, 12 della propria a ciascun degli Autori coronati, 38 di più al premiato: i rimanenti si esporranno a vendita pubblica.

CATALOGO

DE' MEMBRI COMPONENTI LA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE.

CAGNOLI (Cav. Antonio) *Pensionario giubilato*. *Verona*.

Socj Attuali.

ALDINI (Cav. Giovanni) Consigliere di Stato degli Uditori. *Milano*.

AMORETTI (Cav. Ab. Carlo) Bibliotecario nell'Ambrosiana. *Milano*.

ARALDI (Cav. Michele) Segretario del R. Istituto Italiano. *Milano*.

BONATI (Cav. Teodoro) *Pensionario Anziano*, Ispettor Generale onorario alle acque, e strade, e Professore Speciale d'Idrostatica. *Ferrara*.

BRERA (Valeriano Luigi) Professore e Direttore di Clinica Medica nella R. Università. *Padova*.

BRUNACCI (Cav. Vincenzo) Ispettor Generale di Publica Istruzione ecc. *Milano*.

CALDANI (Floriano) Professor di Anotomia umana nella R. Università. *Padova*.

CALDANI (Leopoldo Maria) Professore emerito nella R. Università. *Padova*.

CALUSO (Cav. Ab. Tommaso Valperga) Professor di Lingue Orientali nell'Imper. Università. *Torino*.

CANTERZANI (Cav. Sebastiano) *Pensionario Anziano*, e Professore di Fisica generale nella R. Università. *Bologna*.

CESARIS (Cav. Ab. Angelo) Astronomo nel R. Osservatorio di Brera. *Milano*.

CHIMINELLO (Ab. Vincenzo) Direttore del R. Osservatorio. *Padova*.

COSSALI (D. Pietro) Professore di Matematica sublime nella R. Università. *Padova*.

DANDOLO (Cav. Vincenzo) Senatore. *Milano*.

FABBRONI (Cav. Giovanni) Barone dell'Impero Francese ec. *Parigi*.

FERRONI (Pietro) Presidente dell'Imp. Accad. della Crusca ec. *Firenze*.

FOSSOMBRONI (Co. Vittorio) Senatore dell' Impero Francese. *Parigi*.

GALLINI (Stefano) Professore di Fisiologia, ed Anatomia comparata nella R. Università. *Padova*.

GIOBERT (Giannantonio) Professore di Chimica generale, e Mineralogia nell'Imperiale Università. *Torino*.

GIOVENE (Giuseppe) Presidente della Società Agraria. *Lecce*.

MAGISTRINI (Gio: Battista) Professore di Matematica sublime nella R. Università. *Bologna*.

MAIRONI (Giovanni Daponte) Professore di Storia Naturale nel R. Liceo. *Bergamo*.

MALACARNE (Vincenzo) *Pensionario giubilato*, Professore d'Istituzioni Chirurgiche, e d'Ostetricia nella R. Università. *Padova*.

MASCAGNI (Paolo) Professore d'Anatomia nell'Arcispedale. *Firenze*.

MOSCATI (Co. Pietro) *Pensionario Anziano*, Pretore del Senato. *Milano*.

PAOLI (Pietro) Professore di Matematica sublime nell'Imperiale Università. *Pisa*.

PARADISI (Co. Giovanni) Presidente Ordinario del Senato. *Milano*.

PESSUTI (Gioacchino) Professore di Matematica sublime nell' Archiginnasio della Sapienza. *Roma*.

PEZZI (Cav. Francesco) Tenente Colonello nel Corpo Imperiale del Genio Francese. *Genova*.

PIAZZI (D. Giuseppe) Professore d'Astronomia. *Palermo*.

PINI (Cav. Ermenegildo) Professore di Storia Naturale, Ispettor Generale della Pubblica Istruzione. *Milano*.

RACAGNI (D. Giuseppe Maria) Professore di Fisica nel R. Liceo. *Milano*.

RE (Cav. Filippo) Professore d'Agricoltura nella R. Università. *Bologna*.

RUBINI (Pietro) Professore di Medicina nella Imperiale Università . *Parma* .

RUFFINI (Cav. Paolo) Professore di Matematica sublime nella R. Scuola Militare . *Modena* .

TARGIONI TOZZETTI (Ottaviano) Professore d'Agricoltura, e di Botanica . *Firenze* .

VASSALLI EANDI (Cav. Antonio Maria) Professore di Fisica, e Segretario dell'Accademia Imperiale . *Torino* .

VENTUROLI (Giuseppe) Professore di Matematica applicata nella R. Università . *Bologna* .

DIVISIONE DE' SOCJ ATTUALI IN DUE CLASSI E INDICAZIONE DE' TOMI, IN CUI HANNO MEMORIE.

Classe Matematica .

Bonati	2. 5. 8. 11. 15.
Brunacci	14. 15. 16.
Cagnoli	3. 4. 4. 5. 5. 5. 6. 6. 6. 7. 7. 8. 8. 8. 9. 10. 11. 14.
Caluso	9. 12. 14.
Canterzani	2. 5. 8. 11. 14.
Cesaris	2. 10. (pag. x) 11. (pag. 176) 14.
Chiminello	7. 8. 8. 9. 9. 10. 10. 11. 11. 11. 12. 12. 12. 13. 13. 14. 14. 14. 15.
Cossali	9. 10. 13. 15. 15. 16. 16.
Ferroni	5. 7. 9. 10. 10. 11. 12. 14. 15. 16.
Fossombroni	3. 7. 9. 12. 13.
Magistrini	16.
Paoli	2. 4. 4. 6. 6. 8. 9. 9. 10. 13.
Paradisi	. . .
Pessuti	11. 13. 13. 14. 15.
Pezzi	4. 5. 6. 8. 11. 11. 13.
Piazzi	11. 12. 12. 13.
Racagni	10. 13. 16.
Ruffini	9. 9. 10. 12. 12. 13. 16.
Venturoli	12. 14.

Classe Fisica.

Aldini	14.
Amoretti	8. 10. 12. 13. 15. 16. 16.
Araldi	10. 11. 12. 13. 15.
Brera	14. 15. 16.
Caldani *Floriano*	7. 8. 12. 13. 16.
Caldani *Leopoldo*	4. 7. 8. 9. 10. 12. 12. 13. 14. 14. 15. 16.
Dandolo	. . .
Fabbroni	10. 11. 12. 13. 14. 16.
Gallini	14. 15. 16.
Giobert	10. 13.
Giovene	8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 14. 14. 15. 16.
Maironi Daponte	4. 9. 9. 11. 13. 14. 15. 16.
Malacarne	1. 2. 3. 3. 4. 4. 5. 6. 7. 8. 8. 9. 9. 10. 11. 12. 12. 13. 14. 15. 16.
Mascagni	8. 11. 15.
Moscati	1. 5. 10. 13.
Pini	3. 5. 6. 6. 9. 10. 12. 13. 13. 14. 15.
Re	12. 14.
Rubini	14. 15.
Targioni Tozzetti	11. 13. 13. 14.
Vassalli Eandi	4. 8. 10. 10. 13. 14.

Socj Emeriti.

BRUGNATELLI (Luigi) Professore di Chimica nella R. Università. *Pavia.*

ORIANI (Cav. Ab. Barnaba) Astronomo nel R. Osservatorio di Brera, e Senatore. *Milano.*

POLI (Giuseppe Saverio) Direttore del R. Museo di Storia Naturale. *Napoli.*

SALUZZO (Giuseppe Angelo). *Torino.*

SCARPA (Cav. Antonio) Professore nella R. Università. *Pavia.*

STRATICO (Cav. Simone) Senatore. *Milano.*

VENTURI (Cav. Gio: Battista) Membro del R. Istituto Italiano. *Berna.*

VOLTA (Cav. Alessandro) Professore nella R. Università, e Senatore. *Pavia.*

Socj Onorarj .

BALBO (Prospero) Rettore degli Studj , Ispettor Gener. di publica Istruzione nell' Impero Francese . *Torino* .
BRAMBILLA (Paolo) Professore di Matematica nel R. Liceo. *Milano* .
DALL' OLIO (Gio: Battista) . *Modena* .
DELBENE (Benedetto) Membro del R. Istituto Italiano. *Verona* .
LANDI (Ferdinando) . *Piacenza* .
LOMBARDI (Antonio) Bibliotecario publico . *Modena* .
PINDEMONTE (Ippolito) Membro del R. Istituto Italiano . *Venezia* .
POZZETTI (D. Pompilio) Prefetto della R. Biblioteca. *Bologna*.
ROSSI (Cav. Luigi) Ispettor generale della Pubblica Istruzione . *Milano* .
VIVORIO (Ab. Agostino) Ispettor generale onorario d' acque e strade . *Vicenza* .

Socj Stranieri .

ACHARD . *Berlino* .
BANCKS . *Londra* .
BODE . *Berlino* .
Co. CHAPTAL . *Parigi* .
DELAMBRE . *Parigi* .
HERSCHEL . *Londra* .
HAUY . *Parigi* .
Co. LAPLACE . *Parigi* .
BURG . *Vienna* .
OLBERS . *Brema* .
GAUSS . *Gottinga* .
ZACH . *Gota* .

Segretario .

. . . .

Vice Segretario Amministratore .

OTTAVIO CAGNOLI .

ANNALI

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

Dall' Aprile MDCCCXI *al Luglio* MDCCCXIII

Continuati dal Sig. Ottavio Cagnoli

Vicesegretario Amministratore della medesima.

174. Compita nell'Aprile 1811 l'edizione del Tomo XV, e spediti i respettivi esemplari agli egregj Socj ad esecuzione dell'Art. VI dello Statuto il Cav. Presidente ricercò a quelli quale dei tre Scrittori degli Elogi contenuti in detto Tomo potevano ammettersi nella classe de' Socj Onorarj, e il Vice-Segretario fe promessa di comporre l'Indice ragionato delle materie contenute nei Tomi X a XV innestandolo all' altro suo lavoro dal Tomo I al X.

175. Condotto a termine felicemente in Modena a merito del Sig. G. B. Dall' Olio Procurator Generale della Società (147) l'atteggio con un debitore che esponeva l'interesse della medesima, il Cav. Presidente volendo allo stesso far sentir la gratitudine propria per lo zelo, da cui fu animato nella lunga lotta; ben considerate le cognizioni scientifiche e letterarie non comuni, di cui è fornito il prefato Signor DALL' OLIO, e delle quali pose anco a parte la Società nostra in varj Tomi; in base dell' Art. 6 dello Statuto lo annoverò spontaneo alla classe degli Onorarj con pieno aggradimento dei Socj, come poscia lo dimostrarono.

176. Nel Giugno successivo i Quaranta spiegarono il loro voto sulle resultanze de' giudizj (171), e la maggiorità disponendo che il Problema Fisico (160), alla soluzione del quale concorse con dottrina non comune l'Autore dal

motto *Numquam autem etc.* (167) fosse di bel nuovo sottoposto agl'ingegni Italiani, il Cav. Presidente unì a quello il Problema Matematico offerto da' Socj nel 1809 = *Non porgendo la teoria del Lagrange intorno alle corde vibranti la spiegazione de' suoni armonici, che al vibrarsi d'una corda si compongono col suono principale, ed opinando per ciò il nominato sublime Geometra contro il comune sentimento, che quelli armonici suoni si debbano non alla medesima corda, ma ad altre fibre rispondenti nello strumento: si domanda o di verificare accuratamente per esperienza la opinione del Lagrange o di perfezionare la sua teoria*. Nel programma poi dei 20 Giugno fu dichiarato che il premio di L. 600, e il tempo d'un anno, erano i limiti cui si assoggettava il concorso. In tal occasione, a senso del § 2 dell'Art. XXIV dello Statuto furono eccitati i Colleghi a nominar nel loro seno tre giudici per ciascuno de' due Problemi.

177. A gran pluralità i Quaranta vollero aggregato alla Classe de' Socj Onorarj il Sig. PROSPERO BALBO, Rettore dell'Accademia degli Studj in Torino, Scrittore nel Tomo XV della *Vita* del defunto *Morozzo*, e il Vice-Segretario nel significar alla Compagnia tal novello Consocio, partecipò il vacuo accaduto per la morte di Maskeline, Socio straniero, rassegnando sei Nomi dal Presidente esibiti, a senso dell'Art. VII dello Statuto.

178. Trascorso il termine ordinario di 2 mesi la maggiorità dei voti Sociali preferì il celebre BURG, cui fu sollecito il Vice-Segretario partecipar tal nomina, non senza significarla pure ai Quaranta.

179. Nel Gennajo 1812 il Vice-Segretario premuroso di dar principio al Tomo XVI eccitò il fervore dei Socj ad inviar alcune delle loro dotte produzioni, e in pari tempo notificò loro, che a senso dell'Art. XXIII dello Statuto, fatti col Cav. Presidente i più accurati esami sull'epistolario sociale del 1811 resultarono in diritto del compenso statutario N.° 23 dei Quaranta.

180. Al programma 20 Giugno 1811 niuno de' Dotti Italiani avendo concorso, il Cav. Presidente invitò i Colleghi a produrre nuovi Problemi, non senza raccomandare che tutti fossero d'una chiara utilità alle scienze, alle arti, e all'umanità.

181. Tra i moltiplici quesiti, che il fervore degli egregi Socj seppe proporre accadde, che pari voti prescelsero i problemi di Fisica sotto i N.^{i} I e XII; il Cav. Presidente, riportarsi volendo alla saggia decisione de' Colleghi, anzicchè alla propria, li fece interpellare, e rimase preferito il N.^{o} XII, come più sotto.

182. Frattanto col Gennajo 1813 scadeva l'esecuzione dell'Art. XXIII; alle poche circolari spedite nel 1812 si trovò, che 16 dei Quaranta pienamente corrisposero, ed essi ebbero quindi dalla cassa sociale il compenso statutario.

183. Nel mese successivo furon resi consapevoli i Socj, che pel Problema di Matematica da esporsi a publico concorso era stato prescelto il seguente: *Quale tra le pratiche usate in Italia per la dispensa delle acque è la più convenevole, e quali precauzioni ed artifizj dovrebbero aggiungervisi per interamente perfezionarla, riducendo le antiche alle nuove misure* (metriche), e che gl'ingegni dei Medici Italiani erano chiamati alla soluzione di altro importante problema, così concepito: *Poichè la tosse convulsiva è una delle malattie le più ostinate, le più moleste, e micidiali, ed è quindi essenziale, che i Medici se ne occupino con tutta l'attenzione; cercasi qual sia la teoria più esatta di tale infermità, e quale il miglior metodo di cura*. In detta enciclica fu ricercata a' Socj la nomina dei 6 Giudici, e fu dichiarato nell'apposito Programma, che il premio sarebbe di L. 800 per ciascuna soluzione, e che il tempo per questa era accordato a tutto il 24 Febbrajo 1814.

184. Nel primo Giugno accaduta l'amara perdita del Socio Cav. *Girolamo Saladini* si affrettò il Vice-Segretario Amministratore di riparar tal vacuo proponendo, a nome del

Cav. Presidente, i nomi di varj Scienziati Italiani, e si attendono le relative risposte.

185. Non può tacersi la generosità di varj Autori, che vollero spedir alla Società le saggie loro produzioni, e in segno di doverosa riconoscenza qui si descrivono.

Analisi delle virtù dei medicamenti del Sig. Dott. Giuseppe de Matthæis Professore di Medicina nell' Archiginnasio romano. Roma 1810.

Triticorum definitiones atque Synonyma, curante Joanne Mazzucato R. Utinensis Licæi Rectore.

Catalogo delle opere stampate e de' discorsi inediti di Vincenzo Malacarne per Claro Giuseppe Malacarne suo figlio.

Delle epizoozie de' bovi, delle pecore e dei porci, della rabbia de' cani ec. di G. Pozzi.

Mémoires de l'Accademie Imp. de Turin Tom. IV Sciences, Litterature et beux arts pour les années 1809, 1810.

Annales de l' Observatoire de l' Accademie de Turin par le Professeur Vassalli-Eandi. Premier semestre 1811.

Istruzioni pratiche sul modo di ben fare e conservare il vino del Conte Senator Dandolo.

Description d'un plain souterrain par François Henri Egerton.

Il Como Favola boschereccia di Gio: Milton tradotta da Gaetano Polidori da Bientina in 8.° e in 4.° coll' originale inglese di prospetto.

Su la dottrina della Vita. Di Maurizio Buffalini. Forlì 1813.

MEMORIE

DI

MATEMATICA

RIFLESSIONI SUI PRINCIPJ D'IDRAULICA

Del Sig. Bernard

MEMORIA

Del Sig. Antonio Lombardi Socio Onorario.

Ricevuta li 10 *Ottobre* 1811.

La Teoria delle Velocità dei Fluidi, che sortono dai fori dei vasi, e che scorrono per canali orizzontali, fu già impugnata dal Sig. *Gennetè*, il quale anzichè seguire la regola già stabilita di considerare esse velocità proporzionali prossimamente alle radici delle altezze, vi sostituì un'altra ipotesi fondata sopra una serie di esperienze da lui eseguite, dalle quali ne veniva di conseguenza che le velocità stesse fossero proporzionali alle altezze: l'insussistenza però di questo principio fu chiaramente dimostrata dall'illustre Sig. Cav. *Teodoro Bonati* con pubblici, e rigorosi esperimenti, che confermarono l'antica teoria già ricevuta da tutti gl'Idraulici, i quali poi furono anche vieppiù rassicurati sulla verità di questo fondamentale principio della scienza, dalle belle, ed esatte esperienze fatte con grandi apparati dall'egregio Sig. *Michelotti*.

Ma terminata così vittoriosamente questa scientifica contesa, un'altra ne insorse, non ha molti anni, allorquando il Sig. *Bernard* pubblicò li suoi *Nuovi principj d'Idraulica*, nei quali egli esaminando i fondamenti della scienza stabiliti in gran parte dagli Italiani credè di scoprirvi molti errori, ed inesattezze, e proponendo egli nuovi principj fondamentali, tentò di erigere un novello edifizio in questo nobil campo della Fisica Matematica.

L'egregio Sig. *Bonati* però, che per tanti titoli è benemerito della scienza idraulica, non volle lasciare anche questa seconda volta senza difesa l'onore degli Italiani, e nella sua Memoria inserita nel Tomo XV della Società Italiana delle Scienze, dimostrò col raziocinio congiunto a diverse ingegnose esperienze l'incoerenza del principio addottato dal Sig. *Bernard* per determinare la velocità del fluido che esce dai fori dei vasi; e confrontando le formole lasciateci da *Newton*, e da *Bernulli* con gli esperimenti da lui instituiti fece palese, che queste si allontanano assai meno di quella di *Bernard* dai risultati effettivi che si ottengono in pratica. Seguitando io benchè da lungi le traccie di questo nostro grand'Uomo, intraprenderò in questa Memoria l'esame di alcuni altri nuovi principj che trovansi sparsi nell'Opera stessa risguardanti specialmente la teoria del corso dei Fiumi.

Non mi è ignoto in quanta oscurità sia involta questa materia, di quante spine siano cinte le questioni Idrauliche, e quale sia la moltiplicità degli elementi, che entrano a modificare, ed a variare nella pratica le teorie che s'insegnano, motivo per cui non ben si accordano fra loro in molti punti li più esimii Scrittori, che finora batterono quest'ardua carriera.

Ciò nullameno io ardisco di accingermi ad esaminare alcuni fra i punti principali della nuova teoria del Sig. *Bernard* sì perchè troppo interessa il tener saldi i fondamenti di una scienza così utile anzi necessaria, sì perchè l'onore degli Scrittori Idraulici Italiani potrebbe ricevere qualche discapito, se le massime fondamentali da essi con tanti studj, e con tante osservazioni stabilite dovessero soffrire riforma.

Che se la mia tenuità non permetterà, che questo scritto corrisponda alla sublimità dell'argomento, mi lusingo almeno che i Professori della Scienza gradiranno il mio zelo, ed impegno per una così giusta causa, e per un così interessante oggetto.

§. 1. Semplicissimo è il metodo che ci presenta il Sig. *Bernard* per misurare la pressione dei fluidi in moto, qualora la superficie di essi sia parallela al fondo, e la quantità che attraversa ciascuna sezione sia costante; poichè egli la uguaglia a quella dei fluidi in quiete, giacchè la forza che produce la velocità orizzontale nulla influisce sulla pressione. Ora io così ragiono. Questa forza qualunque essa siasi, agirà in linea orizzontale, mentre la gravità agisce in linea verticale. Se si consideri una particella di fluido animata da queste due forze che agiscono in direzioni ad angolo retto fra loro, vorrem noi dire che gli effetti dell'una, non turberanno punto quelli dell'altra? Questa particella premerà essa ugualmente il fondo, e quando è animata dalla sola forza di pressione, e qualora debba ubbidire a questa insieme, ed a quello che gli impresse il moto orizzontale? Io non mel so persuadere. Gli effetti che osservo sui corpi solidi (se pure è lecito in questo caso il paragone) mi dicono apertamente che no: un Cocchio che rapido scorra, lascia dietro sè orme assai meno profonde di un altro che lentamente si muova. La supposizione dell'Autore cioè che la superficie del fluido resti parallela al fondo, che forse potrebbe favorire la sua teoria, è distrutta dalle osservazioni. Ma le ragioni metafisiche debbono cedere il luogo alla guida principale in queste ricerche, voglio dire alla sperienza. Se il nostro Autore avesse consultato le sperienze dell'egregio Sig. Cav. *Gio: Battista Venturi* sul movimento laterale dei fluidi, avrebbe osservato che queste possono difficilmente convenire con la sua teoria. Il Fenomeno maraviglioso osservato, e spiegato da questo esperimentatore, del succhiamento del fluido prodotto dal moto laterale d'altr'acqua che si muove per un canale, credo che basti a dimostrare essere la pressione dei fluidi in moto diversa da quella dei fluidi in quiete.

§. 2. Calcolando la quantità d'acqua che sorte dalla estrema bocca di un canale orizzontale secondo i principj del Sig. *Bernard* trovasi esser questa la metà di quella che ottiensi impiegando i metodi già prima noti. Io qui non mi arresterò a ricercare se sia da attendersi o nò questo risultato, perchè dipendente affatto dalla teoria delle velocità già esaminata dall'egregio Sig. *Bonati* nella Memoria da lui ultimamente pubblicata, e da me citata; e mi limiterò a presentare alcune riflessioni sulle obbiezioni fatte alla teoria dell' illustre *Guglielmini* (1) dal nostro Autore. La velocità, dice egli, assegnata da *Guglielmini* all' acqua che scorre per un canale orizzontale è maggiore di quella che ha in realtà (2). Imperocchè, si adatti all' estremità di questo un altro canale della stessa larghezza del primo, inclinato per modo che l'acqua conservi in esso la velocità media che può produrre la caduta. Si osserverà allora che il fluido avrà in questo nuovo canale un'altezza minore di quella che aveva nel canale orizzontale dove ha luogo la caduta; dunque la velocità media alla caduta è maggiore della velocità media nel canale superiore, poichè queste due velocità sono in ragione inversa dell'altezza viva del fluido nei due canali. Distingueremo i casi, e vedremo di togliere così il dubbio del Signor *Bernard*.

---

(1) L'idea che ci dà il Sig. *Bernard* del sapere di *Guglielmini* nel discorso storico (p. 10) disonorerebbe assai la sua memoria se questo celebre Italiano non fosse già in possesso di una stabile gloria. Le espressioni del Sig. *Bernard* sono le seguenti. *Nato con uno spirito vasto* (Guglielmini) *non gli mancarono che i veri principj delle materie che trattò; egli se ne immaginò all'esempio de' suoi contemporanei, e subì come essi l'influenza del suo secolo*.

Gli elogi però profusi (con non molta ragione secondo *Bernard*) a questo Scrittore Italiano dai sommi Uomini d'*Alembert*, *Bossut*, *Fontenelle*, e *Montucla* sono a mio giudizio un testimonio così chiaro della sua profondità nella Scienza Idraulica, che spero non potrà essere per un solo istante bilanciato in contrario dal suddetto giudizio del Sig. *Bernard*, il quale io rispetto sommamente, ma non credo, che pretenda di essere messo a livello dei sunnominati celebri Matematici.

(2) *Bernard* p. 97.

Il movimento di un fluido sopra un fondo orizzontale è ben diverso da quello sopra un fondo inclinato. La pressione è la sola causa producitrice della velocità nel primo caso, quando però il fluido non abbia preconcepito velocità alcuna per la caduta; ma nel secondo l'acqua si accelera continuamente, e quindi deve ribassare il proprio pelo per la legge scoperta dal celebre Abbate *Castelli*. Ora il fluido giunto alla estremità del canale orizzontale si abbassa alcun poco di pelo, la sua superficie si dispone in un piano inclinato, e questa inclinazione di pelo si estende per qualche tratto su per l'alveo orizzontale. Questo effetto è cagionato da ciò: le particelle estreme, e le più basse del fluido non essendo più premute da altre particelle, nè essendo più sostenute dal fondo, precipitano, e seco si strascinano le superiori. La velocità deve adunque in quell'attimo crescere qualche poco, e perciò l' altezza deve diminuire nel canale che si applica, sempreccbè scorra per questo tanto fluido appunto, quanto ne somministra il canale superiore. L' inganno del Signor *Bernard* consiste a mio parere nel trasportare la teoria dei canali orizzontali a quella dei canali inclinati, e nel credere, che *Guglielmini* abbia inteso essere la velocità all' estremo del canale orizzontale precisamente uguale a quella del fluido nelle parti superiori dello stesso canale (1). Questa diversità però non rende in conto alcuno difettoso l'ingegnosissimo metodo prescritto dal nostro celebre Italiano per misurare la quantità d'acqua che sbocca da un canale orizzontale. Egli suppone è vero, che la velocità allo sbocco sia precisamente quella dovuta a tutta l'altezza viva superiore, e quindi qualche poco minore dell'attuale, ma egli ottiene un corrispondente compenso nella maggiore altezza della sezione che introduce nel calcolo. E tanto è ciò vero, che egli propone (1) per unico metodo da usarsi per misurare la quantità d'acqua anche nei grandi fiumi, il suo regolatore, in cui come a tutti è noto, non s'impiega nel calcolo la velocità dell'ultima sezione libera, ma bensì quella media, che compete all'altezza del fluido reso stagnante. Chi bramasse d'impiegarvi l'attuale velocità media dell'acqua, dovrebbe poi impiegare anche l'altezza precisa della sezione allo sbocco, cioè quell'altezza che resterebbe determinata dal velo inclinato dell'acqua alla caduta senza regolatore. Ma *Guglielmini* vide quante, e quali difficoltà sarebbonsi incontrate volendo misurare la velocità media della sezione allo sbocco, che dipende da più elementi; e perciò vi sostituì la velocità superiore modificando poi opportunamente l'altezza.

---

(1) Alla pag. 16 del Discorso Storico l'Autor francese vorrebbe distruggere la conseguenza di *Guglielmini*, che quando la velocità dipenda dalla sola altezza viva essa crescerà al crescere dell'altezza perchè dic'egli tal conseguenza è contraria all'altro inconcusso principio, che le velocità sono reciproche alle Sezioni. Chi vorrà però riflettere alla condizione che richiede *Guglielmini*, cioè che il canale sia orizzontale ed abbia una larghezza costante, converrà che *Bernard* ha questa volta applicato inopportunamente il suddetto principio, perchè nelle circostanze dell'Autore Bolognese, o non si devono paragonare insieme le Sezioni di un medesimo canale orizzontale, ma quelle di due differenti canali orizzontali di uguale larghezza, e nei quali l'acqua abbia diverse altezze vive; oppure, se si vuol considerare lo stesso canale, conviene intendere che vi siano introdotte diverse quantità d'acqua, che facciano variare l'altezza.

§. 3. L'altra obbiezione che ci presenta il Sig. *Bernard* alla esposta teoria di *Guglielmini* è la seguente.

Pongasi colla immaginazione (2) nel luogo di una sezione verticale di fluido una parete di uguali dimensioni a quelle del canale orizzontale, e che abbia precisamente la stessa velocità dell'acqua, questa sarà premuta ugualmente da ambedue le parti, perchè l'altezza del fluido sarà la stessa tanto a destra, che a sinistra, essendo il fluido orizzontale, e premendo ugualmente per tutti i versi. Si supponga ora che sia praticato in qualunque luogo di questa parete un foro:

---

(1) Misura delle acque correnti T.° I° della Racc. di Parma p. 339, 342.

(2) *Bernard* p. 99 N.° 187.

l'acqua trattenuta dalle pressioni uguali non sortirà. Fin qui l'Autore, il quale io prego a riflettere che questa immaginaria parete, si potrà nella sua ipotesi considerare come un sottil velo di fluido, il quale si muova entro lo stesso fluido con la stessa precisa sua velocità. Ora, e come potrà mai sortire il fluido da un foro in questa parete fatto, se questa sfugge davanti a lui con la stessa velocità con cui esso la insegue? Parmi che questo caso sia appunto quello di due corpi li quali partendo dallo stesso punto si muovano sempre con uguali velocità, dei quali non si avvererà giammai che l'un d'essi avanzi in cammino l'altro che si muove al suo fianco. Ma io osservo inoltre, che l'ipotesi del nostro Autore poggia sulla supposizione del §. 152, cioè, che la pressione dell'acqua in moto uguagli quella dell'acqua in quiete, e che la superficie di essa, quando si muove, sia perfettamente orizzontale. Abbiamo già superiormente osservato, che la prima supposizione non sembra molto fondata, e non credo che si possa così facilmente convenir seco nella seconda (1). L'esperienza ci dimostra che l'acqua al sortire da un canale orizzontale si abbassa in altezza, e questo sbassamento deve per l'aderenza che hanno fra loro le parti del fluido, e per la somma sua mobilità comunicarsi alle sezioni superiori dell'alveo, estendendosi insensibilmente all'insù, e diminuendosi a poco a poco; quindi la pressione che si esercità sulla immaginata parete non può dirsi rigorosamente uguale da ambe le parti. Chiunque conosce la natura dei fluidi non potrà a meno di non convenir meco, che una minima differenza di pressione che si ammetta nel fluido anteriore, e posteriore a questa parete, basta per produrne la contrastata inclinazione (2).

---

(1) Le esperienze di *Bossut* sui canali orizzontali T.° II° p. 251 dimostrano ad evidenza che la superficie di un fluido che si muove in un canale orizzontale, è inclinata verso lo sbocco. L'altro fenomeno poi che osservasi di un luogo cioè del canale, in cui l'acqua è più alta, che in qualunque altro, dipende dalle resistenze di cui non è qui luogo di parlare.

(2) Molte sono le critiche date dall' Autore agli Scrittori Italiani Idraulici,

§. 4. Passiamo ora a confrontare i risultati delle sperienze eseguite dall'egregio Sig. *De Buat*, per misurare la quantità d'acqua che sorte da un canale orizzontale e riportate da *Bernard* (1) con quelli dati dalla teoria di *Guglielmini*, onde veder così a qual partito sia meglio l'attenersi in mezzo a tante dubbiezze, ed oscurità. La maggior differenza, che osservo fra le quantità dedotte dalle sperienze del Sig. *Di Buat*, e quelle dedotte dalla teoria del chiarissimo Bolognese si è di 60 in più, e la minima è di 8 pure in più, impiegando la correzione di $\frac{1}{3}$ per la contrazione della vena e non quella di $\frac{5}{8}$, e ciò per considerare il caso più sfavorevole. Se si divida l'errore massimo di 60 per la quantità dedotto dalla sperienza cioè 3110 avremo $\frac{1}{52}$ circa, ossia 0,192 che ci esprimerà l'eccesso massimo della quantità teorica di *Guglielmini* sulla sperienza di *Buat*; ed $\frac{1}{54}$ ossia 0,185 è il difetto che si trova dividendo 8 per la quantità 432 dell' altra corrispondente sperienza, dal che dedur si potrebbe tutto al più, che invece di adoperar la correzione di $\frac{1}{3}$ usar si debba quella di $\frac{27}{78}$ (2) ossia 0,346. Si confrontino ora le essperienze medesime con le quantità teoriche di *Guglielmini*, e con quelle date da *Bernard* che ne sono la metà. Le successive differenze in più fra le quantità dedotte secondo la teoria Guglielminiana, e le quattro corrispondenti esperienze sono come i numeri 1188, 568, 364, 164; quelle dedotte secon-

---

le quali però cadono da sè qualora si dimostri la poco sussistenza de' nuovi principj; non posso però ommettere qui la difesa dell'illustre *Torricelli* che da *Bernard* (Discorso preliminare pag. 7) viene accusato di aver scoperta così a tentone la legge delle velocità dell'acqua che sorte da un serbatojo per orifizj piccoli usando della esperienza senza darne la dimostrazione. Se l'Autore si fosse dato il pensiere di scorrere le opere *Geometriche di questo chiaro* Italiano, vi avrebbe incontrata alla pag. 196 (Edizione di Firenze in 4.° 1644) la dimostrazione, che desiderava fondata appunto su i principj dell'incomparabile *Galileo* da lui rammentati nel citato luogo del suo discorso.

(1) Pag. 119.

(2) Questa frazione $\frac{27}{78}$ è dedotta nel modo seguente. La quantità teorica di *Guglielmini* è 660: per ridurla a 432, quantità avuta dalla sperienza, conviene detrarre 228, che è all'incirca $\frac{27}{78}$ del totale 660.

secondo la teoria di *Bernard*, sono in corrispondenza, ma in meno, come i numeri 1350, 947, 374, 57. Da questo semplice confronto rilevasi che gli errori in più nella teoria di *Guglielmini* sono minori di quello siano gli errori in meno nell'altra. Chiunque è versato in questa scienza giudicherà ora, se, prescindendo anche da quanto io ho fatto osservare negli antecedenti paragrafi, debba, o no preferirsi il metodo ordinario per calcolare la quantità del fluido nel caso concreto alla nuova regola che incontrasi nell'opera che andiamo esaminando.

Non isfuggirono queste riflessioni al Sig. *Bernard*, il quale vide che li suoi risultati teorici differivano fino ad $\frac{1}{3}$ dalla sperienza, ma attribuì questo errore alla mancanza delle condizioni da lui richieste nei vasi usati nelle sperienze per verificare la sua teoria, e convenne, che applicando li suoi principj (1) non si otterrà che una porzione di tutta la quantità d'acqua, che sorte dall'emissario di un canale, cioè di quella, che secondo lui cade liberamente; ma quando saremo al caso pratico, qual norma dovremo seguire per sapere quanta sia l'altra parte del fluido che sgorga? I nostri Italiani ci somministrarono dati più certi per avere in questi calcoli quella approssimazione a cui solo può pretendersi in tali materie. Il chiariss. esperimentatore Sig. *Michelotti* ci istruisce che l'error massimo fra la teoria di *Guglielmini*, e le sue delicate, ed esatte esperienze fu di pollici cubi 16 in un corpo di acqua di pollici cubi 1414 (2) cioè di $\frac{1}{88}$ del totale, e determinò in conseguenza di esse il rapporto da usarsi in questi calcoli onde evitare ancora un tale difetto specialmente nelle altezze maggiori di un piede. Il minimo errore poi fu di piedi 8 $\frac{1}{2}$ in piedi cubi 1473 $\frac{1}{2}$ cioè di $\frac{1}{173}$ circa

---

(1) pag. 115, N.° 217.

(2) *Michelotti* Sperimenti Idraulici, Tom. I, pag. 135 e segg.

del totale. Posta questa corrispondenza fra la teoria di *Guglielmini*, e le sperienze dell'egregio Sig. *Michelotti* che le eseguì con grandi apparati, e con tutta la possibile esattezza parmi a dir vero, che si possa conchiudere che l'ordinario metodo di determinare la quantità d'acqua sia più sicuro, o almeno assai più prossimo al vero di quello sia la nuova teoria che viene proposta.

§. 5. L'immortale *Galileo* aveva insegnato che *la Velocità delle Acque in un Canale dipende dalla pressione delle Acque superiori* (1). Non piacque al Sig. *Bernard* questa teoria, e tacciò d'immaginaria quest'asserzione di *Galileo*. Se alla estremità di un canale inclinato si applichi un serbatojo d'acqua orizzontale, il fluido, che trovasi nell'ultima sezione dice *Bernard* non franerà più perchè la causa di questo effetto, sarà distrutta dall'opposizione del fluido orizzontale (2). Quando egli così ragionò, convien dire che dimenticasse il noto principio fondato sulle costanti osservazioni fatte da tutti gl'Idraulici che l'acqua influente si spiana tutta sotto il pelo del recipiente. Questa osservazione porta necessariamente a concludere, che nel caso da lui supposto, il franamento dell'acqua non sarà così sensibile è vero, e si estenderà a minor distanza, ma però sussisterà, e sarà tanto più sensibile, quanto sarà maggiore l'inclinazione del letto, e quindi la velocità dell'acqua all'estremità del canale; perchè questa avrà maggior forza per spingere oltre, e penetrare l'acqua del serbatojo orizzontale. Che se l'Autore avesse attentamente esaminato il passo di *Galileo*, in cui cioè stabilisce il nominato principio, gli avrebbe certamente resa quella giustizia che merita un sì grand'Uomo. *Galileo* non parla di un canale immaginario, in cui si supponga scorrere sempre la stessa quantità d'acqua, ma bensì di un fiume per cui muovendosi l'acqua, si aumenti rapidamente il suo volume al sopravvenire di una piena. Avendo egli più superiormente dimostrato con il raziocinio, e con la sperienza del fiume Arno, che l'accelerazione delle acque in tempo di piena, è prodotta in massima parte dall'aumento celere del volume d'acqua, e non dalla inclinazione dell'alveo: ed in forza delle resistenze di esso, e delle sponde scorrendo le acque ordinarie con una velocità assai minore di quella che dovrebbero avere dipendentemente dalla inclinazione dell'alveo, succede, che arrivando le acque in piena animate da una velocità maggiore di quella delle acque ordinarie, e in gran volume, piombano dirò così su queste, e le spingono avanti accrescendo così la loro velocità.

---

(1) *Galileo* opere. Padova 1744, Tom. III., pag. 365, lin. 12.

(2) *Bernard* Nouveaux principes d'Hydraulique pag. 69, N.° 130.

Non sembrami poi in parte alcuna fondato il paragone, che istituisce il Sig. *Bernard* (1) del principio di *Galileo* alla opinione di alcuni, i quali sono di sentimento, che nelle piene grandi, e rapide le acque comprimano l'aria al segno, che essa acquisti forza bastante a sollevare i sassi, e farli rotolare colla massima rapidità. Chiunque leggerà attentamente il citato passo di *Galileo*, dovrà sicuramente convenir meco, esser ben difficile il poter paragonare il principio di questo alla stravagante idea della compressione dell'aria di cui egli non fa pur cenno, e si vedrà che egli non attribuisce il movimento delle acque inferiori alla pressione di quelle che sono più vicine alla loro origine, come asserisce *Bernard*, ma bensì alla maggior copia delle acque superiori prementi, e spingenti. Io non ardirò di sostenere che questo effetto si estenda ad una grande distanza nell'alveo inferiore, e nemmeno *Galileo* lo dice: bastami l'aver dimostrato, che non può dirsi assolutamente immaginaria l'asserzione di questo insigne Filosofo il quale appunto per la sublimità de' suoi talenti, e per la superiorità, e estensione delle sue cognizioni fu lo scopo dell'invidia de'suoi contemporanei, e che non so per quale avverso destino, non meritò poi dagli Enciclopedisti altro encomio, che quello di esser posto a livello con *Poscal*, e giudicato inferiore a *Cartesio* (1).

---

(1) pag. 147, Sez. IV, Cap. III.

§. 6. L'interpretazione data dal Sig. *Bernard* a questo principio di *Galileo*, lo conduce a dedurne alcune conseguenze, le quali se potessero sostenersi come dipendenti da questa massima, oscurerebbero assai la gloria di questo nostro Italiano.

La prima conseguenza che *Bernard* ne ricava si è, che se nel letto dei fiumi le acque superiori agissero sulle inferiori, chiudendo queste, s'impedirebbe alle altre di scorrere al basso (2). Se noi immagineremo, che le sezioni del fluido siano come tanti corpi solidi isolati, come egli persuadere ci vorrebbe, allora potrà verificarsi ciò che egli dice; ma finchè ci formeremo delle idee giuste della fluidità, e semprecchè si supponga che il canale sia qualche poco pendente, ed abbia il suo pelo inclinato verso lo sbocco, come ci ammaestra l'esperienza, credo, che nessun fisico ricaverà dal principio di *Galileo* una conseguenza così singolare. Quando l'Autore Italiano ammise questa gravitazione delle acque superiori sulle inferiori, non s'intese già che le acque scorrenti all'origine di un fiume agiscono su di quelle dello sbocco, come vorrebbe interpretare *Bernard*, allorchè dice che le acque le quali scorrono per un fiume non sono nel caso di quelle, che corrono racchiuse in un tubo (3). Se il canale fosse poi perfettamente orizzontale, e si chiudesse il suo sbocco, mentre seguitasse a correre l'acqua nel suo letto, chiunque per poco versato che sia in queste materie, vedrà primieramente, che questo non è il caso preciso contemplato da *Galileo*; ed inoltre rileverà facilmente, che in simile ipotesi il pelo d'acqua allo sbocco si eleverebbe quanto richiedesse la differenza di livello delle acque fra l'emissario del canale, e la sua origine, si disporrebbe in una linea orizzontale, e intanto il fluido potrebbe superare le sponde, e seguitare a muoversi.

---

(1) Enciclopedia. Discorso preliminare pag. 28, Edizione di Parigi 1751.

(2) pag. 151.

(3) Ivi.

§. 7. L'altra conseguenza che deduce il Sig. *Bernard* (1) si è che quando le acque superiori divengono più abbondanti, il moto delle altre dovrebbe crescere in una maniera uniforme; anzi se il movimento fosse tanto più considerabile, quanto la distanza alle acque affluenti fosse minore, potrebbero accader delle piene in quei punti dei fiumi nei quali dette acque non sarebbero arrivate. Per conoscere quanto fondata sia questa conseguenza, si osservi, che supposta ancora questa comunicazione così lontana di movimento come s'immagina *Bernard*, e non *Galileo*, sembrami che da ciò non si potesse dedurre altro, sennonchè le acque più lontane dall'origine del fiume, acquisterebbero del moto, e si accelererebbero, dando così luogo alle sopravvegnenti. Affinchè succeda una piena richiedesi assolutamente un aumento d'acqua in quel luogo, il che non veggo come possa aversi al solo aumentarsi della velocità cagionato dalla supposta comunicazione di movimento, anzi al crescere della velocità, deve secondo il principio del chiariss. Abbate *Castelli* decrescere l'altezza delle sezioni specialmente nei canali inclinati di fondo, quando non vi sia reale aumento di fluido.

§. 8. L'influente in un fiume più grande sarebbe capace dice per ultimo *Bernard* (2) supposto sempre il principio di *Galileo*, di muovere, e spingere avanti le acque del recipiente, che d'ordinario sono di una massa assai enorme riguardo a quello del primo: siccome *Galileo* nel proporre la tanto contrastata massima si espresse in termini generali, così non doveva contemplare un'eccezione della regola; ed a lui, che scoprì le leggi del moto era sicuramente noto, qual proporzione ricerchisi fra le velocità di due masse perchè l'urto della minore fra esse sia capace di muovere la maggiore.

---

(1) pag. 151.
(2) Ivi.

Oltre di che il regurgito delle acque del recipiente sull'alveo dell'influente è cagione che la piena di questo segua nello scaricarsi leggi ben diverse da quelle che osservansi in un gran fiume recipiente. Se il Sig. *Bernard* avesse poi più attentamente esaminato il passo di *Galileo*, non avrebbe immaginato una nuova spiegazione del fenomeno dell'acceleramento delle acque (1) osservato anche da *Buffon*, la quale poi in sostanza non è diversa da quella del nostro Italiano; giacchè anche *Bernard* suppone, che vi sia un punto nell' alveo del fiume, in cui si renda sensibile il cangiamento di velocità prodotto dalle acque della piena. Ma si termini ormai questa forse troppo lunga discussione, e passiamo ad osservare quali siano le leggi con cui secondo il Sig. *Bernard* i fiumi regolano le loro pendenze.

§. 9. Erasi fin qui creduto che la teoria di *Guglielmini* la quale c'insegna che il volume, e la rapidità delle acque hanno molta influenza nel rendere sensibilmente orizzontale il fondo di un fiume, fosse giusta, e comprovata anche dalla esperienza; tale però non è il sentimento del Sig. *Bernard*, il quale crede che le due esposte cause non siano capaci di produrre un tale effetto (2), perchè le acque giusta il suo parere si adattano al piano sul quale scorrono. Mi permetta di chiedergli soltanto, se avendosi due fiumi di assai diversa portata che scorrano per le stesse pianure, e vadano a sboccare nella stessa spiaggia di mare, siano essi dotati nei punti omologhi del loro corso di uguale pendenza. Le osservazioni, e gli esperimenti istituiti nei nostri fiumi d'Italia ci convincono, che l'inclinazione del letto di questi due fiumi sarà ben diversa. Eppure supposto vero questo nuovo principio il Pò, per esempio, il Reno, ed il Panaro aver dovrebbero verso il loro sbocco la stessa pendenza. Ma dalle reiterate osservazioni fatte in questi fiumi, sappiamo che mentre il Pò ha oncie 6 all'incirca di pendenza per miglio (1), e rende poi il suo letto quasi orizzontale nei tronchi più vicini allo sbocco (2), il Reno che corre in una pianura vicina a quella del Pò, dopo l'ingresso della Samoggia ultimo suo influente ha onc. 14 di pendenza per ogni miglio (3). Così il Panaro fiume di portata pressocchè uguale a quella del Reno, nel suo ultimo tronco pende onc. 18 alle onc. 19 per miglio, e va a sboccare in Pò, che in quel luogo non avrà nemmeno le onc. 6 di pendenza per miglio (4). Parimenti il torrente Idice al punto dove voleva introdursi in Reno, ha una caduta di otto piedi Bolognesi per miglio, mentre il Reno verso il Trebbo ha una inclinazione di piedi simili tre, e mezzo, di sotto al qual punto doveva ricever l'Idice con la suddetta enorme pendenza (5). Quando il Sig. *Bernard* fissò questa sua massima che abbiamo veduto combinare assai poco con gli esempj pratici, ommise forse la considerazione importantissima della torbidezza delle acque che portano i fiumi, e l'altra, che opponendosi degli ostacoli al loro corso, quanto maggiore sarà il volume, e la rapidità della corrente, tanto più facilmente essa terrà incorporate le materie che seco trasporta, e supererà gli ostacoli che incontra per l'alveo. Io non dirò già che la situazione dei luoghi non influisca a determinare la pendenza stabile di un fiume specialmente torbido, ed è certo, che quando esso scorre fra le colline ha maggior pendenza, che quando scorre per una pianura, ma dirò bensì che commetterebbe non piccolo errore, chi volendo fissare in qual pendenza di letto si stabilirà un fiume correndo per esempio fino al mare, determinasse con gli strumenti la caduta del terreno per cui si volesse condurre il nuovo alveo, e credesse che il fiume stabilisse la sua nuova cadente in una linea paralella all'inclinazione del piano livellato. Nè sembrami a dir vero, che gli esempj da lui riferiti dei fiumi dell'Africa giovino a stabilire la verità del suo principio; poichè, come egli riflette (1), questi fiumi corrono in mezzo alle rupi fino al loro sbocco, e sono anche interrotti da cateratte, e quindi scorrono per alvei non suscettibili di escavazione, e formano perciò una eccezione alla regola generale. Se la Saonna avendo un corso più lungo della Durenza (2), la prima ha il suo fondo meno inclinato, ciò è conforme alla teoria dei fiumi: ognuno sa che qualora si dice, che il volume, e la rapidità influiscono a determinare la pendenza, s'intende sempre di parlare di que' luoghi nei quali l'alveo non è interrotto da ostacoli insuperabili, o da cateratte artificiali, nel qual caso non si possono considerare soggetti alle variazioni dipendenti dalle suddette due cause, che i tratti intermedj fra ostacolo, ed ostacolo. Niuno si è mai immaginato che quando un fiume passa per dei piani di assai diverso declive fra loro, esso debba mutare affatto l'inclinazione del suo fondo, e debba per esempio scorrere orizzontale in mezzo alle colline. La verità si è, che se passerà un fiume con un dato corpo d'acqua per un dato piano inclinato, il suo fondo prenderà una certa inclinazione adattata alla sua portata, ed alla qualità delle sue acque, e se per questo stesso alveo si vorrà far passare un altro fiume di portata assai diversa, e le cui acque sieno più torbide di quelle del primo, egli è certo dalla esperienza, che quel fondo cambierà la sua inclinazione, e si adatterà alla portata del nuovo fiume (3).

---

(1) pag. 152.
(2) pag. 154, N.° 263.

---

(1) Raccolta degli Scrittori d'acque di Parma, Tom. IV, pag. 122.

(2) V. sopra, Tom. V, pag. 81.

(3) V. sopra, Tom. V, pag. 8.

(4) V. sopra, Tom. IV, pag. 335.

(5) V. sopra, Tom. V, pag. 17.

§. 10. L'inclinazione del letto dei fiumi, viene riconosciuta dal Sig. *Bernard* per la causa principale della loro velocità,

---

(1) pag. 154, Nota 1.

(2) pag. 156.

(3) Se dalla primitiva organizzazione della terra dipondesse unicamente l'inclinazione del letto dei fiumi come insegna *Bernard* alla pag. 265 si dovrebbe osservare il fenomeno del parallelismo del fondo al piano della campagna, cosa che abbiamo già osservato non sussistere in generale.

locità, al qual proposito riflette che non si verifica in natura la teoria di *Galileo* dalla quale deducesi che la velocità dovrebbe sempre aumentare (1). Non credo però che questa osservazione sfuggisse a *Galileo*, perchè egli ben sapeva, ed a tutti li Fisici è noto, che prescindendosi nella teoria della accelerazione dei gravi dalla considerazione delle resistenze, le quali nel caso concreto s'incontrano sempre, non è a stupirsi se li risultati teorici differiscono da quelli, che la pratica osservazione ci presenta. Ma nell'adottare il Signor *Bernard* questa massima si forma in conseguenza di esso delle idee particolari sulla rapidità dei fiumi: paragona egli il moto delle acque che scorrono per gli alvei inclinati a quello di enormi massi che precipitando giù dai monti rovesciano ciò che incontrano, e tanto maggiore è il loro impeto, quanto è maggiore il loro peso, e volume.

Se questo paragone può ammettersi in qualche parte, qualora si consideri il movimento di un impetuoso torrente che scorre fra balze, e dirupi, io non credo, che in generale possa istituirsi senza offendere le leggi dalla natura imposte ai corpi fluidi quando i fiumi scorrono per le pianure, quantunque inclinate. Il sasso che si rotola per lo pendìo di un monte, è un corpo solo unito, e il fluido composto di parti amovibili non potrebbe considerarsi come tale se non s'immaginasse che tutte le sue minime particelle fossero animate da una velocità infinita, il che involve l'altro principio non ben fondato, che la pressione non si alteri, quando il fluido è in moto. E qui io credo di essere in diritto di pretendere dal Sig. *Bernard* maggior moderazione verso il chiariss. *Guglielmini* il principio di cui sull'aumento di velocità prodotto dalla maggiore altezza d'acqua viene chiamato una chimera (2). Se questa teoria non si avvera con pre-

---

(1) pag. 161.
(2) pag. 163, Nota 1.

cisione nella pratica, non è perciò che essa sia falsa. Gli ostacoli che il fluido incontra per via ne devono certamente modificare i risultati, nè egli è a supporsi, che *Guglielmini* non conoscesse la differenza che vi è fra la teoria, e il caso concreto in questo arduo problema. Le esperienze però instituite da molti insigni Matematici, e specialmente dall'egregio Sig. *Michelotti* (1) ci istruiscono, che immergendo la palla del quadrante a diverse profondità l'angolo di deviazione cresce, il che parmi, che dimostri la verità del principio in generale, perchè se la velocità dipendesse soltanto dall'inclinazione dell'alveo, l'angolo suddetto dovrebbe rimaner costante per tutta l'altezza viva della sezione, anzi in tempo di piena dovrebbe esser maggiore in superficie di quello, che s'incontrasse a qualche profondità, perchè allora l'inclinazione del pelo è ordinariamente maggiore di quella del fondo (2). Non si limita però il Sig. *Bernard* a giudicare erronea la teoria di *Guglielmini*, in ciò che riguarda la velocità dipendente dalla pressione; ma inoltre non crede potersi dire *che in una data sezione una parte di fluido scorra con una velocità dipendente dalla inclinazione*, *e l'altra con una velocità dipendente dalla pressione* (3); perchè giusta il suo raziocinio *la pressione non può cessare di agire*. Ma io osservo che se avrò un canale, che abbia una data inclinazione in cui l'acqua si muova sotto una certa altezza, la pressione produrrà un certo determinato effetto qualunque poi esso sia, e l'inclinazione ne produrrà un altro pur esso determinato. Ora se io aumenterò la pendenza, restando costante la primiera altezza del fluido, crescerà il secondo effetto, perchè la causa è più potente, mentre il primo non si altererà punto. E perchè dunque non vi potrà essere un'inclinazione di alveo, tale, che l'effetto da essa prodotto sopra una parte di fluido superi quello prodotto su di essa dalla pressione corrispondente all'altezza? Sembrami che questo discorso provi almeno che la ragione addotta per distruggere la proposizione di *Guglielmini* non sia assai forte. Io non asserisco nè *Guglielmini* ha mai *asserito che la pressione cessi di agire*: ma dico bensì che l'effetto da essa prodotto sopra una data particola di fluido può essere superato da quello prodotto sulla medesima dal pendìo del piano, su cui essa muovesi: che se l'alveo sarà inclinato, e scabroso, non potrà forse succedere che il fluido nelle parti inferiori della sezione sia impedito a muoversi liberamente dai risalti, e dalle asprezze del fondo, e che si richieda un'altra forza per spingerlo avanti; cosicchè un canale a cagione d'esempio inceppato da erbe palustri nel suo fondo permetta al fluido un lento, e difficile scolo, mentre se, restando costante l'inclinazione del letto, crescerà il volume di esso fluido, si muoverà questo più liberamente, e supererà gli ostacoli frapposti col suo movimento?

---

(1) Tom. I, pag. 162.

(2) L'aumento dell'angolo di deviazione al crescere dell'immersione non può certamente attribuirsi all'ostacolo del filo, perchè questo d'ordinario è assai tenue, e la sua superficie è minima in confronto di quello della palla.

(3) Discorso storico, pag. 13, N.° III.

§. 11. Ma è falso soggiunge *Bernard*, che nei fiumi i quali hanno poca pendenza (1), la velocità debba attribuirsi all'altezza viva, perchè ne seguirebbe, che essendo uguali le altezze vive, e la pendenza insensibile, le velocità dovrebbero essere uguali. Non mi sembra a dir vero erronea questa conseguenza, cioè che in parità di tutte le altre circostanze, le velocità siano uguali essendo uguali le altezze. Nè l'avere il Signor *De la Condamine* potuto misurare la profondità del fiume Maragnone alla distanza di $\frac{1}{3}$ della sua lunghezza, vale, cred'io, a distruggere l'accennato principio, sebbene *Bernard* pretenda, che ciò non si sarebbe potuto eseguire, se la velocità fosse cresciuta in ragione sudduplicata dell'altezza. È verissimo che la velocità sarebbe stata in quel punto della sezione alla profondità di braccia 28 (2) più di novanta piedi secondo la teoria, ma chi conosce le modificazioni grandi, a cui le resistenze dell'alveo assoggettano questo metodo, non si maraviglierà punto, se la velocità di questo gran fiume era in quel punto della sezione assai minore dei piedi 90, e permise perciò di gettare lo scandaglio. Prima però che l'illustre viaggiatore Francese eseguisse le succennate sperienze, il chiariss. Sig. *Zendrini* ne aveva istituite altre consimili per determinare la velocità nel fiume Pò a varie altezze sotto la superficie, delle quali ne riferirò qui alcune per vieppiù illustrare questo importante punto della presente teoria.

---

(1) Discorso storico, pag. 13.

(2) In termine di Marina, un braccio è di piedi 6.

Il pendolo immerso a due piedi di profondità sotto il pelo dell'acqua (1) declinò per un angolo di 40 gradi dalla verticale, e proseguendo l'immersione fino ai 5 piedi, la declinazione ascese fino ai gradi 70, e la proporzione delle velocità fu espressa dai numeri 289, 524. Chi volesse con questi dati determinare quale profondità si ricercasse perchè la velocità 289, che corrispondeva a due piedi sotto la superficie, divenisse dodici volte maggiore, formar dovrebbe il seguente raziocinio fondato sulla supposizione che gli aumenti di velocità nelle altezze maggiori di piedi 5 seguissero la legge determinata dalle suddette due immersioni del pendolo.

L'aumento di velocità corrispondente all'aumento di piedi tre viene espresso da $\frac{524-289}{289} = 0,802$. Ora supposta 1 la velocità corrispondente a due piedi, con le solite regole di proporzione si troverà che l'altezza corrispondente ad una velocità undici volte maggiore sarà di piedi 41, 147. Dunque nel fiume Pò si richiederebbe una profondità di piedi 43, 147, perchè la velocità corrispondente a piedi due sotto la superficie divenisse dodici volte maggiore; e chi volesse determinare di quanto sarebbe cresciuta la velocità del Pò alla profondità di braccia 28 ossia piedi 168, se vi fosse questa profondità in Pò, troverebbe con lo stesso raziocinio che essa sarebbe espressa dal num. 43, 575, e quindi che essa sarebbe divenuta cinquantaquattro volte maggiore di quella a cinque piedi sotto la superficie. Ma la velocità in superficie, era sicuramente minore di quella a due piedi sotto di essa; ignorando noi quale realmente fosse, perchè il Sig. *Zendrini* non ce lo addita, così supponiamo che ascendendo verso il pelo d' acqua essa velocità decrescesse con la stessa regola, con cui si aumentava discendendo, e vedremo che la velocità a un piede sotto la superficie esser doveva espressa dal numero 104, 80; e partendo da questo dato, l' aumento a due piedi sarebbe espresso dalla differenza fra li numeri 289, e 104, 80, cioè da 184, 20, onde con la solita regola troveremo che la velocità a due piedi sotto la superficie si sarebbe resa dodici volte maggiore alla profondità di piedi 8, 25: le citate esperienze dunque del *Zendrini* favoriscono, anzichè opporsi alla teoria di *Guglielmini*, la quale secondo il Sig. *Bernard*, ci dà degli aumenti assai notabili di velocità al crescere delle altezze, perchè vediamo che realmente le velocità trovate, o dedotte da quelle date dalla esperienza crescevano assai rapidamente come si rende anche più manifesto al riflettere, che l' angolo di deviazione crebbe di 30 gradi coll' aumento di tre soli piedi d' immersione.

---

(1) *Zendrini*, Leggi, e Fenomeni delle acque correnti, pag. 110.

§. 12. Abbiamo già osservato, che uno de' nuovi principj del Sig. *Bernard* è che la pressione del fluido in moto uguagli quella del fluido in quiete. Ammette però anch'egli qualche eccezione a questa massima, perchè volendo spiegare il fenomeno del colmeggiamento che osservasi d' ordinario nel filone di un fiume in piena anzicchè addottare la spiegazione di *Guglielmini* (1) che forse più si converrebbe con li suoi principj, introduce una differenza nelle pressioni del fluido, talchè quelle fra le sue parti, che corrono più veloci, premono meno, che le altre. Ciò nulla ostante egli ha voluto impugnare la spiegazione di questo fenomeno che il chiariss. Sig. *Du Buat* ci ha dato. Attribuisce questi l'effetto della curvatura della superficie di una corrente alla disuguaglianza delle pressioni fra le colonne del fluido di mezzo, e quelle che accostansi alle rive, fissando principio, che la pressione laterale di una colonna fluida in quiete è minore di quella che essa esercita, allorchè si muove, quant'è la pressione, che compete alla propria velocità. Per dimostrare la fallacia di questa ingegnosa spiegazione il Signor *Bernard* dimentica quanto già ci insegnò nella pagina antecedente sulla disuguaglianza delle pressioni, e confonde la pressione dalle colonne fluide esercitata sul piano dell'alveo con la pressione laterale delle medesime. Accordandogli anche per un momento che una superficie risenta lo stesso sforzo da una colonna di fluido in quiete che su di essa poggi, e da un'altra che pur la preme movendosi, come può egli inferirne che la pressione laterale sarà pure la stessa in amendue le ipotesi? Chi volesse argomentare in questo caso per analogìa, credo che s'ingannerebbe a partito. *Ma l'idea di equilibrio fra colonne disuguali situate sullo stesso livello è opposta ai principj della meccanica*, soggiunge *Bernard*. Si farebbe un gran torto al Sig. *Du Buat* se si credesse, che egli obbliando i primi elementi di Fisica persuader ci volesse un assurdo così manifesto. Una sola riflessione però basterà a dimostrare quale dei due Autori sia in errore. E vaglia il vero: quando un sistema è in quiete, allora ripugna alla verità il principio del Sig. *Du Buat*; ma questo non è il caso da lui contemplato; egli suppone il fluido in moto; e qual cosa avvi più manifesta di questa, che possa darsi equilibrio in un sistema di corpi, quando le loro velocità sono bensì disuguali ma contemperate in modo che li momenti si bilancino intorno ad un asse comune, per il che appunto richiedesi, che le pressioni corrispondenti alle colonne più alte siano minori perchè animate da maggiore velocità?

---

(1) *Bernard* pag. 171. *Guglielmini* Natura dei Fiumi, Cap. VII, pag. 174 dell' Edizione inserita nella Raccolta di Parma.

§. 13. L'osservazione, e l'esperienza aveva insegnato agli Scrittori d'Idraulica che i galleggianti gittati in una corrente in piena si uniscono nel filone, o spirito del fiume (1) ma ben diverso è il risultato delle osservazioni di *Bernard* (2). I galleggianti anzicchè stare uniti al filone sono gettati a riva, e vengono come da esso respinti, perchè il fluido in quel luogo avendo maggiore altezza, ha un movimento verso le rive, e componendosi questo con quello di progressione a seconda dell'alveo, egli si immagina che i galleggianti muover si debbano per la risultante. Questa spiegazione sembra a dir vero soddisfacente, ed è molto ingegnosa, ma io sento qualche difficoltà ad ammetterla, qualora rifletto che la velocità del filone dev'essere assai maggiore di quella prodotta dalla differenza di altezze nelle colonne fluide, differenza a cui secondo ciò che egli dice nella cit. pag. 171 corrisponde una minor pressione, e quindi è poco atta a produrre questo movimento del fluido verso le rive, e manca perciò un lato dell'ideato parallelogrammo. Molto più poi cresce in me la dubbiezza, sapendo per l'esperienza costante dei nostri fiumi d'Italia, che i galleggianti vengono come rapiti dal filone, ed anzi gl'Idraulici prevalgonsi sovente di questa osservazione per determinare il luogo dello *spirito* della corrente. Io non credo che i fiumi osservati dal Sig. *Bernard* siano d'indole tanto diversa dai nostri, e mi nasce piuttosto il sospetto che egli abbia osservato i galleggianti portarsi a riva non nello stato dell'aumento della piena, ma bensì nel suo decrescimento, effetto prodotto dal diminuirsi appunto la velocità del filone in quelle circostanze. Inoltre se li galleggianti si dirigessero alle rive in tempo di piena, io dico che allora osservare non si dovrebbe il colmeggiare del fluido, poichè se la forza della corrente non fosse capace di sostenerli in quella direzione, ed a quella altezza, potrebbe poi molto meno reggere le parti del fluido che sono specificamente più gravi dei corpiccinoli, che seco strascina; perciò insensibile, a non dir nullo, esser dovrebbe il gonfiamento della superficie del fluido dove più rapido scorre, il che non si osserva. Nè a provare il movimento verso le sponde del fluido che cade dirò così dalla sommità del filone, e quindi dei galleggianti, credo che valga l'esempio recato dall'Autore (1) delle onde che vanno a percuotere le rive a guisa dei flutti marini anche in tempo, che l'atmosfera è tranquilla. La cagione principale di questo movimento così fatale alle sponde deve a mio credere ripetersi dalla velocità prodotta dalla inclinazione e varia direzione della superficie della corrente anzicchè da questo lateral movimento che non può essere se non assai lento in proporzione di quello del filone del fiume (2).

---

(1) *Guglielmini*, Opera citata, Cap. VII, pag. 174.
(2) pag. 173.

L'ardua questione del modo, con cui i fiumi stabiliscono il loro letto, che fu come è noto tanto ben maneggiata dall'illustre *Guglielmini*, somministra al Sig. *Bernard* nuova materia di osservazioni, e di critica contro questo Scrittore. Nell'esporne però che egli fa il risultato in succinto commette alcuni errori di fatto che il solo amor del vero mi obbliga di rilevare.

Guglielmini fu di parere, che le ghiaje col soffregarsi assieme si rotondino, e s'impiccioliscano, ma non s'ingannò giammai nel credere questa operazione, e questo degradamento *troppo rapido*, come dice *Bernard* pag. 191. Leggasi con attenzione quanto scrisse in proposito l'illustre Bolognese (3).

Essendo, così egli ragiona, *nel fiume una forza determinata, che cagiona una determinata velocità nel moto de' sassi, ed essendo, che questi hanno una grandezza, e durezza limi-*

---

(1) pag. 174.

(2) Su questo movimento trasversale delle Correnti, si consulti la Memoria dell'egregio Sig. Cav. Senatore *Simone Stratico*, inserita nel Tomo II, Par. II, Classe Fisica-Matematica degli Atti dell'Istituto Nazionale Italiano, pag. 261.

(3) *Guglielmini* Nat. de' Fiumi, Cap. V, pag. 100 del Tom. II delle Raccolte di Parma.

limitata che ordinariamente non oltrepassano (potendo però avere l'una, e l'altra minore), *ne siegue che la velocità del moto impresso dall' acqua ne' sassi, dovrà richiedere un tempo determinato, che sia proporzionato alla durezza, grandezza ec. de' sassi medesimi per intieramente stritolarli, e perciò altresì dovrà essere determinata la lunghezza dello spazio necessario per l' effetto medesimo, come che questa è figlia della velocità, e del tempo*. Sembrami a dir vero che *Guglielmini* nel sistema da lui adottato si ritenga entro que' limiti che una teoria generale richiede, e non posso comprendere come dica *Bernard*, che quegli ha fatto troppo rapidamente decrescere la grandezza dei sassi nei fiumi; ma ciò non basta: egli suppone inoltre, che *Guglielmini* desuma la forza di stritolare le ghiaje dalla velocità prodotta dall' altezza dell' acqua accresciuta col crescere il corpo del fluido stesso nei fiumi. Io però rifletto che l' Autor Bolognese (1) profondo conoscitore, quale egli era di queste materie, non s' impegna direttamente nella ricerca donde provenga nell' acqua di un fiume questa forza di portare avanti, e di stritolare le ghiaje, ma si limita soltanto ad esaminare gli effetti da questa forza qualunque essa siasi. *Le parole d' impeto dell' acqua, di spirito* che egli usa nello spiegare questo fenomeno, ci fanno però travedere, che egli dipender faceva questa forza dalla velocità generata non già dall' altezza viva dell' acqua, ma bensì dall' inclinazione dell' alveo, il che poi si rende più chiaro, se pongasi mente a quanto dice sulla fine della citata proposizione del Cap. V. *Sminuendosi .... continuamente la mole de' sassi, e rendendosi con ciò l' alveo meno declive, ne siegue che un sasso il quale sotto una mole maggiore contrastando colla forza dell' acqua potrà sostenersi in un alveo più declive, ridotto poscia ad una mole minore cede all' impeto*

---

(1) Cap. V suddetto.

della medesima lasciandosi spingere all' ingiù fino a ritrovare quella declività, che resti proporzionata alla diminuzione della di lui mole. Se *Guglielmini* avesse pensato, che la forza per spingere avanti il sasso fosse dovuta alla velocità prodotta dall' altezza viva, siccome i fiumi crescono ordinariamente in altezza quanto più si scostano dalla origine loro, perchè ricevono il tributo degli influenti, non avrebbe certo asserito così assolutamente, che il sasso si ferma ove trova un declive proporzionale alla diminuzione della sua mole, ma avrebbe fatto riflettere che cresce bensì la resistenza del sasso, quanto più il piano è meno declive, ma cresce anche l' impeto dell' acqua per spingerlo avanti crescendo il volume di essa nel fiume, il che egli non asserì, appunto perchè riteneva che la sola forza di pressione del fluido non fosse sufficiente, generalmente parlando, a smuovere i sassi di un alveo. Inoltre se egli avesse ammesso ciò che s' immagina il Sig. *Bernard*, non avrebbe nella stessa pagina 100 fatto osservare come cosa straordinaria, che alcuni fiumi portano le loro ghiaje fin dentro il mare, giacchè se la forza suddetta di pressione fosse quella che principalmente producesse il movimento nei sassi, dedur si può facilmente da quanto abbiamo detto più sopra, che il caso più ordinario a succedere, quello sarebbe che le ghiaje fossero trasportate al Mare, mentre ognuno sa che avviene più sovente il contrario.

§. 14. Esposta così, e rischiarata per quanto ho potuto la teoria di *Guglielmini*, da *Bernard* interpretata in nuova foggia, esaminiamo le opposizioni, che egli contro di essa propone. La prima che io incontro, leggesi nel Discorso storico-critico (1). L' equilibrio tra la forza della corrente, e la resistenza del fondo, sono sue parole, è un effetto immaginario, perchè le acque non trasportano le ghiaje in proporzione della loro rapidità, e le abbandonano per l' ordinario, quando son giunte ad avere la loro massima velocità; quindi pretende di cogliere in errore *Guglielmini*, allorchè insegnò, che l'acqua avrebbe agito ugualmente in tutta l'estensione del letto, quando la velocità fosse sempre la medesima. Se questa asserzione del Sig. *Bernard* sostenuta venisse da varj esempj di fiumi, nel fondo de' quali non si riscontrasse maggior copia di ghiaje, e più voluminose, qualora essi sono più rapidi, allora potrebbe meritar eccezione il discorso di *Guglielmini*. Ma l'osservazione costante, e generale di tutti li fiumi ci istruisce che le ghiaje ritrovansi più grosse, e più spesse appunto nei tronchi dei loro alvei più alti, e perciò più inclinati; e che se la loro velocità in que' luoghi non è massima, considerandola dipendente dall'altezza viva, lo è però assolutamente, perchè allora è generata dalla pendenza del letto; quindi non reggendo l'osservazione di *Bernard*, il principio di *Guglielmini* sull'equilibrio delle suddette forze non resta da queste prove abbattuto. Ma a dimostrarne vieppiù chiaramente il fondamento, valga il seguente raziocinio. Se non vi fosse un limite, oltre il quale la forza della corrente non potesse più corrodere, e spianare il fondo, egli è certo che seguitando essa ad asportarne le parti, ne diminuirebbe l'inclinazione al segno di renderlo orizzontale, e quindi agendo sempre, non potrebbe che renderlo declive in senso contrario, e lo stesso discorso applicasi inversamente al caso in cui il fondo si alzi. Ora chiunque conosca l'indole de' fiumi, scorgerà facilmente da quanto abbiamo detto, a quali assurdità condurrebbe questa supposizione, che cioè non si dasse equilibrio tra la forza della corrente, e la resistenza del fondo. Se il Sig. *Bernard* perciò vorrà esaminare quanto sia giusta, e fondata la proposizione di *Guglielmini* presa in generale, spero che non taccierà più come false altre due proposizioni dell' Autore Bolognese, che da quella discendono come spontanei corollarj. La prima si è, che quanto maggiore è la forza dell'acqua, tanto minore è la pendenza del fondo, e ciò avverasi nel caso concreto della natura; osservandosi d'ordinario, che li fiumi di maggior portata sono meno declivi di fondo a fronte di quelli che scorrendo per le medesime pianure sono più poveri d'acque. Nè a provare la falsità di questa proposizione vale il dire (1) che due fiumi inegualmente veloci possono avere uguale pendenza. Può, è vero, accadere questo fenomeno, ma la diversità della pendenza non dipende soltanto dalla velocità, bensì inoltre dalla qualità delle torbide del fiume, e dalla varia durezza, e tenacità delle parti costitutive del suo letto, onde la proposizione di *Bernard* così isolata non mi sembra capace di provare l'erroneità della prima; perchè converrebbe dimostrare, che due fiumi in parità di tutte le altre circostanze, avendo disuguale pendenza corrano con la medesima velocità.

---

(1) pag. 22.

La seconda proposizione di *Guglielmini*, che *Bernard* non approva, si è, che se la velocità dell'acqua basti da per sè sola a corrodere il fondo, ed a trasportarne via le parti, il letto non conserverà pendenza alcuna. Io veggo bene, che difficil cosa sarà, che si avveri pienamente in qualche fiume questa proposizione; ma parmi, che ammettendola nella teoria negar non si possa l'accennata proposizione, poichè quale ostacolo potrà in questo caso opporsi al fluido animato da questa velocità, affinchè esso non escavi il letto del fiume fino all'orizzontale? nessuno certamente: dunque continuando essa ad agire dovrà produrre il descritto effetto. Ma un altro assurdo pretende di rilevare *Bernard* nell'ammettere il principio, che quanto più la forza di un fiume sarà grande, tanto minore sarà la sua pendenza. Nel letto, dic'egli, dello stesso fiume decresce tanto più la velocità, quanto più decresce la pendenza, il che accader non dovrebbe, se crescendo la forza del fiume, il fondo vieppiù si escavasse. Se noi intenderemo a dovere la proposizione di *Guglielmini*, spero, che svanirà qualunque contraddizione. Si avverta che l'Autore Italiano considera il caso di un fiume che debba stabilire il proprio letto sopra una data linea e non già quello di un fiume, che scorra sopra un fondo già stabilito. Se vi saranno adunque due fiumi di diversa portata d'acqua che scorrano sopra fondi incerti, dirò così, e dotati di uguali pendenze, quello in cui scorre maggior quantità d'acqua in parità delle altre circostanze, dopo un certo tratto di tempo si troverà avere il fondo meno declive dell'altro, e intanto la velocità in questo sarà minore, se dipenderà dalla pendenza, sarà poi maggiore se la causa, che la produrrà, sarà l'altezza viva del fluido.

---

(1) Disc. stor., pag. 22.

Una opposizione però più grave produce il Sig. *Bernard* contro il sistema di *Guglielmini*, ed è la seguente. Egli non ammette generalmente parlando, che le arene siano formate da sassi stritolati dalla violenza delle acque (1). Io non ignoro che egli ha a sostenitore della sua opinione il chiar. Matematico *Frisi*, il quale istituì diverse sperienze per scoprire, se agitandosi fortemente fra loro de'sassi fluviatili si otteneva dell'arena (2). Potrebbesi, a dir vero, promuovere qualche piccola difficoltà su di queste sperienze, perchè sembrami assai difficile il potere con esse pareggiare in qualche modo le occulte forze dalla natura esercitate specialmente in tempo di piena nei fiumi dove corrono in ghiaja. Potrebbesi all'esempio recato da *Bernard* del marmo che si pulisce, da cui non staccasi, che una sottilissima polvere (3) rispondere, che i sassi fluviatili sono d'ordinario assai più teneri del marmo, onde non regge il confronto. Ma in tanta contrarietà di opinioni fra uomini così chiari, io mi guarderò bene dall'appoggiare direttamente piuttosto l'una, che l'altra sentenza; e mi limiterò soltanto a ponderare le ragioni, che *Bernard* andrà adducendo a sostegno del proprio sistema, ed a produrre alcune osservazioni atte a spargere qualche lume su questo intralciato argomento. Se vi sono vasti paesi nei quali, al dir di *Bernard*, incontransi sassi rotondati, abbenchè non vi scorrano al presente fiumi di sorta alcuna (1), e chi ci assicura, che nelle grandi rivoluzioni fisiche sofferte dal globo non ve ne siano scorsi nei Secoli più remoti? Se conoscessimo a fondo la storia naturale di ciascun paese dalla sua origine sino al giorno d'oggi, potremmo asserire con franchezza, se le ghiaje siano primigenie, oppure formate dall'urto generato dalla violenza delle acque fra i massi staccati dalle montagne, ma in mancanza di queste cognizioni non credo che possa cavarsi nessuna fondata conseguenza a favore dell'opinione di *Bernard*, e di *Frisi*. Nè gli esempj che il primo di questi Autori adduce dei fiumi Duranza, e Lupo (2), i quali non trasportano dic' egli le ghiaje, e le altre materie grosse avanti, ma passano per luoghi dove esistevano esse, e specialmente i sassi rotondati, mi possono persuadere che in generale la violenza delle acque valevol non sia in molti fiumi a spingere innanzi le ghiaje (3). Oltre la ragion succennata, che nei luoghi dove corrono al presente la Duranza, il Lupo, il Varo, sianvi scorsi altri fiumi, i quali abbiano trasportato in que' luoghi i sassi, che vi si incontrano di presente, io rifletto, che vi sono molti altri fiumi, nei quali osservasi patentemente questo fenomeno. La scrittura del Chiar. *Viviani* sul fiume Arno ci istruisce, che il letto di questo fiume dopo di aver levate alcune Pescaje, che frenavano il suo corso, si è notabilmente rialzato sulle parti inferiori. Molti de' nostri fiumi d'Italia attraversano pianure, nelle quali non si riscontrano sassi rotondati, se non nel loro alveo, o almeno in poca distanza. Vorrem noi dire che queste ghiaje rotondate siano primigenie, e che la natura abbia limitato nella formazione del globo lo spazio che occupano a quei luoghi precisi, nei quali in seguito hanno preso corso i fiumi (1)? Non par certamente che possa così ragionarsi; ma v'è di più. Tutti gli Idraulici, sono concordi, e l'esperienza ce ne convince, che se raddrizzeremo l'alveo di un fiume, se lo porteremo a sboccare nel recipiente per una via più breve, vedremo le sue ghiaje avanzarsi e l'alveo escavarsi nelle parti superiori, con danno alle volte non piccolo di quello del recipiente che viene rialzato dall'introdurre in esso le ghiaje dell'influente. Distinguendo perciò la questione in due parti 1° cioè se li fiumi siano capaci di spingere avanti le ghiaje. 2° Se siano capaci con la violenza delle loro acque di smussarle, rotondarle, e ridurle in arena; sembrami che nascer non possa dubbio alcuno, che in quanto al primo effetto essi lo producano sovente, e specialmente quando si rende in qualche modo più libero il loro corso, secondo quanto insegnano tutti gli Autori Italiani.

---

(1) pag. 192.

(2) Raccolta delle acque, Tom. VII, opuscolo di Frisi, Cap. II.

(3) ibid. Art. 299.

---

(1) pag. 197, N.° 307.

(2) pag. 198, e 199.

(3) Il Sig. *Bernard* alla pag. 248 poi confessa di aver veduto egli stesso delle pietre prismatiche voluminose esser spinte avanti in tempo di piene per un tratto assai lungo dell'alveo, onde non veggo come possa egli nella sua ipotesi spiegare questo fenomeno.

Sospendo, come dissi, il mio giudizio riguardo alla seconda questione, e farò soltanto osservare che l'Illustre Viaggiatore *Saussure* è di sentimento contrario al Sig. *Bernard*, il quale però ne riporta per esteso il testo (2) da cui rilevasi chiaramente esser quegli di massima che la violenza delle acque produca l'effetto del rotondamento delle ghiaje. E quantunque si possa conchiudere dal testo di *Saussure* l'esistenza di diverse montagne formate di ciottoli rotondati, o smussati forse da un'altra causa diversa da quella di cui parliamo, ciò nullameno sembrami, che quest'altra importantissima conseguenza ricavare si possa con giusto fondamento, cioè che vi sono dei fiumi i quali strascinando dalle circostanti montagne de' sassi con spigoli, ed angoli, la violenza delle loro acque è capace di rotondarli, e di impicciolirli, e che perciò se la teoria di *Guglielmini* non si verificherà in tutti i casi, ed in tutta la sua estensione, pure si verificherà in moltissimi, giacchè non sono così facili a ritrovarsi questi strati di montagne formate di sassi rotondati, mentre in tutti gli alvei dei fiumi, che attraversano montagne, si incontreranno più o meno delle ghiaje smussate, e via via minori, quanto più si scostano dall'origine del fiume (1).

---

(1) Alla pag. 198 *Bernard* conviene poi, che quando non si veggono sassi rotondati in distanza dell'alveo di un fiume in cui ve ne siano, è duopo il dire, che si sono staccati dalle montagne, e si sono rotolati per l'alveo.

(2) *Bernard* pag. 200.

§. 15. Per dimostrare che la grossezza dei sassi sparsi in un alveo può somministrare un fondamento, onde giudicare almeno per approssimazione la forza di un fiume, il che non si ammette dall'autore (2), io lo pregherò a rifletter meco che per muovere i corpi di molto peso come sono i grossi sassi, richiedesi assai maggior forza che per spingere avanti le piccole e minute ghiaje. L'osservarsi poi nel medesimo luogo del letto di un fiume de' sassi di mole assai diversa, nulla toglie all'ideato giudizio come pretende il Sig. *Bernard*, perchè egli è certo che quando vi sono sassi assai voluminosi, bisogna assolutamente supporre, che la forza dell'acqua, prescindendo dal caso che vi siano stati in origine, ve li abbia spinti, e perchè moltissime sono le cause che arrestar possono ad un tempo le ghiaje minute, e grosse, come sono a mò di esempio i gorghi, e le risvolte. Ma quello che più importa, si è che la forza di un fiume varia a diversa profondità. Se osserveremo infatti diligentemente il suo alveo dopo una piena, vedremo, che ne' luoghi più profondi del letto vi è d'ordinario la ghiaja più grossa, nei meno profondi la più minuta, e finalmente nei banchi più alti la pura sabbia: onde non è a maravigliarsi se quel fiume il quale semina

---

(1) A conferma del sentimento di *Saussure* sulla forza che hanno i fiumi, loro contrastata da *Bernard*, posso assicurare di avere io stesso veduto il fiume Leo il quale attraversa montagne formate di strati calcari, nelle quali non incontransi ciottoli rotondati, se non quando si discende all'alveo del fiume stesso, ove se ne trovano d'ogni grandezza.

(2) pag. 221.

mina il suo fondo di grossi sassi, abbandoni anche quelli di minor mole. Ma dovendosi valutare specialmente per la sicurezza delle pratiche applicazioni la sua forza dal maggior effetto, ottima regola, sarà, cred'io, il far fondamento sulla mole delle ghiaje che egli trasporta, e spinge avanti (1).

§. 16. Non ostante che *Bernard* alla pag. 215 ci abbia chiaramente detto che le acque acquistando più masso, e più velocità strascinano seco le sabbie, e le ghiaje; pure ci presenta (2) in seguito un calcolo fondato sulla teoria, col quale egli crede di dimostrare evidentemente che il trasporto della ghiaja, e la rapidità delle acque sono due fenomeni indipendenti fra loro. Se il fluido si muoverà con una velocità di sei piedi per secondo, sarà capace di spingere avanti una pietra calcare cubica di un piede quadrato di superficie; questo è il risultato del suo calcolo, dal quale egli deduce, che questa velocità essendo per un fiume assai discreta, la rapidità delle acque nulla influisce a smovere le ghiaje, perchè d'ordinario non si riscontrano negli alvei dei fiumi dotati di tale velocità sassi di cosiffatta grossezza. Mi sia permesso però di far qualche riflessione su questo calcolo: sarà vero che la velocità di piedi sei per secondo compete a que' fiumi che scorrono piuttosto lentamente, ma osservo poi, che il calcolo dell'Autore è fondato sulla ipotesi che l'urto del fluido si faccia perpendicolarmente alla superficie del sasso, ipotesi che ben difficilmente si avvererà in pratica; e perciò si richiede-

---

(1) *Bernard* nel discorso storico (p.8) dice che *Viviani* si è ingannato nel valutare l'azione dell'acque sulle ghiaje; ma siccome egli non ne adduce alcuna prova, se non il testo di *Viviani*, ed anche alterato, così io lo pregherò soltanto, che sia un'altra volta più cauto nell'accusare gli Autori di gran nome, quale si è il *Viviani*, o almeno lo faccia con più solidi fondamenti. Dissi poi che il testo di *Viviani* riferito da *Bernard* è alterato; per convincersene basta leggere la nota apposta da esso alla pag. 8 suddetta, e confrontarla col testo italiano di *Viviani* che trovasi nella più volte citata Raccolta degli Scrittori d'acque (T. I p. 216, 217). In tutto il rimanente del discorso di *Viviani* non mi è riuscito di ritrovare altro periodo che si accosti più a ciò che leggesi nella suddetta nota di *Bernard*, e perciò ho asserito che questi ha alterato il testo dell'Autor Italiano.

(2) pag. 229, 230.

rà una velocità molto maggiore di quella di piedi sei per un secondo affine di smuovere i sassi, quando saranno urtati sotto un angolo obbliquo dalla corrente; perciò sembrami che il caso ipotetico di *Bernard* sia assai lontano da quello che succede in natura. Inoltre io son d'avviso che l'Autore affine di provare concludentemente l'indipendenza dei due suesposti fenomeni, dovesse dimostrarci con gli esempj pratici che al crescere della rapidità delle acque, il trasporto delle ghiaje non si facesse in maggior copia a maggior distanza, ed in qualità più grosse. Intanto noi gli faremo osservare che i fiumi, i quali corrono fra i monti, appunto perchè sono colà rapidissimi, smuovono, e spingono oltre dei massi enormi, i quali certamente se fossero trasportati in pianura, e collocati nel fondo di un fiume, verrebbero bensì in alcuni luoghi di esso sepolti in profondi gorghi; ma non avanzerebbero di un sol passo nell'alveo.

§. 17. La spiegazione dei fenomeni che succedono, quando da un alveo angusto l'acqua passa in uno più ampio, e dilatato forma l'oggetto di altre osservazioni del nostro Autore. Si fa egli questa domanda. E perchè mai avviene (1) che i vortici prodotti al piede di una caduta d'acqua non si riempiono mai? Eccone la risposta: *Les eaux cessent de pouvoir deplacer des cailloux au dessus, tandis qu'elles avoient encore la puissance d'encharier au point ou l'affouillement commence; il est donc impossible que cet affouillement soit comblé, si les bords ne changent pas*. Ma confesso il vero, o che io non arrivo a penetrare la spiegazione dell'Autore, o che egli si è certamente ingannato. Come può mai immaginarsi, che le acque cessino di poter smuovere i sassi nelle parti superiori al gorgo, mentre che egli suppone, che potessero trasportarli fino al punto dove comincia il gorgo stesso? Non è forse più naturale il dire che la diversa direzione, che acquistano i filamenti acquei, entrando nel gorgo, produce quel movimento tortuoso che osservasi, il quale poi mantiene in continua agitazione le materie che entrano nel gorgo, e le spinge fuor d'esso?

---

(1) pag. 245.

Per decidere poi con sicurezza se l'osservazione dimostri non esser vero, che i gorghi, i quali trovansi in un alveo di un fiume vengano colmati, qualora si fabbrichi in esso una chiusa di sotto al luogo in cui esistono, come si asserisce positivamente da *Bernard* (1), sembrami, che si richiegga un più diligente esame sull'indole dei diversi fiumi, che scorrono sul nostro globo; e per potere con fondamento tacciar d'errore su questo punto il chiar. *Guglielmini*, convien prima accertarsi di aver compreso nel loro vero senso li suoi pensieri. Se il fiume in cui si fabbrica la cateratta avrà una grande inclinazione, e quella abbia una piccola elevazione, egli è chiaro che estendendosi poco all'insù il regurgito da essa cagionato, pochi saranno i gorghi, che verranno riempiti dopo la sua fabbricazione. Ma non accadrà lo stesso, quando l'alveo abbia una dolce pendenza, perchè allora in parità di tutte le altre circostanze, il regurgito si estenderà assai più oltre di quello che succederebbe nel primo caso. I termini poi con i quali esprime l'egregio Bolognese il suo sistema, sono tali, che abbracciando per quanto è possibile, i casi più generali, lasciano luogo alle dovute eccezioni nei casi particolari, e non credo quindi, che possasi dar loro la singolare interpretazione di *Bernard*. Ecco il testo di *Guglielmini* (2). ,, Edificata che sia una di queste cateratte, negan-
,, do ella il passaggio all'acqua del fiume, è d'uopo, che
,, questa si elevi, e riempia il tratto dell'alveo superiore,
,, che sta sotto il livello della soglia, e sommità di detta ca-
,, teratta, formando con ciò uno stagno d'acqua a guisa d'un
,, laghetto, la cavità del quale in breve tempo sarà riempiu-

---

(1) Discorso Storico pag. 34.

(2) Cap. XII. Della natura dei fiumi | Raccolta degli Scrittori ec. T.° II°, pag. 265.

„ ta di materia portata dal fiume cioè di sassi, arena, terra,
„ e simili; *e con ciò alzandosi il letto del fiume sino all'al-*
„ *tezza della chiusa, darà altresì occasione ad un simile, e*
„ *proporzionato alzamento nelle parti superiori dell' alveo me-*
„ *desimo*.

Pregherò i miei Lettori ad osservare che il nostro Idraulico Italiano non fa motto alcuno del riempimento de' gorghi in questo paragrafo, e che egli si limita a predire un alzamento *proporzionato nelle parti superiori dell' alveo*.

Ora, e chi potrà mai da queste espressioni così generali ricavarne la conseguenza che egli abbia inteso di dire che tutti i gorghi superiori ad una chiusa si riempiranno? Nè *Guglielmini* così si espresse riguardo all' alzamento del letto in detti luoghi, per non saper spiegare come vi rimangano dei gorghi di sopra alle chiuse, mentre ivi non si osservano vortici come dice *Bernard* (1) che li mantengano. Siccome l' alzamento di fondo si fa *in proporzione* e quindi sempre minore, quanto più si estende allo insù per l' alveo, così non si può applicare la proposizione di *Guglielmini* tutt' al più, che a que' soli gorghi che restano compresi in quel tratto dell' alveo che riceve un maggiore alzamento, giacchè tutti gli altri gorghi già stabiliti che s' incontrano fuori di questi limiti, non si colmeranno punto per questo mezzo, quantunque non vi siano vortici che li mantengono escavati. E giacchè mi sono inoltrato a parlare di vortici, e di gorghi, ommetter non debbo di esaminare la critica che *Bernard* istituisce delle ingegnose spiegazioni lasciateci dall' illustre *Guglielmini* sul modo con cui agiscono i vortici, e si formano i gorghi. Dopo di avere riferita (2) per esteso la teoria del nostro Italiano sopra questo complicato fenomeno, ecco come si esprime (3).

---

(1) Ivi.
(2) Discorso Storico crit. pag. 28 sino alla 33.
(3) Ivi, pag. 32.

On voit que Guglielmini *multiplie les causes pour pouvoir rendre raison des effets. Les tourbillons verticaux sont immaginaires, il modifie leur action selon les circonstances, il les fait tantôt superficiels, et tantôt profonds; il leur fait former dans les premiers cas des atterrissements en immaginant qu'ils ont au dessous d'eux des eaux tranquilles comme si la chose étoit possible dans un même courant; dans le second cas il leur fait corroder le fond.*

Io desidererei che il Sig. *Bernard* non si contentasse di asserire soltanto, ma che realmente provasse, che *Guglielmini* ha errato nel porgerci la spiegazione di questo fenomeno assai difficile da investigarsi, e ce ne somministrasse poscia una spiegazione più naturale di quella immaginata dall' egregio Bolognese. Intanto io son d'avviso, che se quegli avesse istituite delle osservazioni precise in qualche fiume specialmente di molta portata, avrebbe certamente veduto che i vortici verticali non sono punto immaginarj, ma che la loro profondità varia moltissimo al variare dell'altezza viva, e dell' impeto del fluido, e che specialmente quando la loro forza si esercita per tutta la loro altezza, producono terribili effetti, trivellando con la punta dei loro coni il fondo al segno di generare delle corrosioni considerabili. Chiunque poi avrà osservato i diversi torneamenti che fa verso il mezzo dell'alveo la superficie di un fiume in piena, non potrà negare l'esistenza dei vortici orizzontali affatto innocui al fondo, ed alle sponde.

§. 18. Siccome accade sovente, che i fiumi, specialmente quando corrono in ghiaja, trasportino ora ad una riva, ed ora all'opposta il filone della corrente; così il nostro Autore si accinge a spiegare qual effetto produca nel movimento delle ghiaje questo fenomeno. Quando un fiume si escava, dic' egli, un nuovo alveo a cag. d'es. in mezzo ad un ghiarile, allora esso non spinge avanti la ghiaja, ma la getta ai labbri come fa la ruota che penetra nel fango (1). E a comprovarlo, osserva specialmente, che se le acque spingessero avanti le ghiaje, se ne accumulerebbe una quantità così grande in certi punti dell'alveo, che non potrebbe essere superata dalla corrente. Sembrami però che questa conseguenza possa meritare qualche eccezione: io infatti osservo che formar si potrebbe questo ammasso, qualora l'alveo di sotto al nuovo canale non avesse pendenza bastante affinchè l'acqua scorrendovi potesse strascinar seco le ghiaje, ma questo elemento così importante della inclinazione dell'alveo viene trascurato dal Sig. *Bernard*. Se egli mi avesse prodotto delle esperienze, e mi avesse citati degli esempj, allora io mi arrenderei forse alla sua spiegazione; ma finchè mi forma in simili materie dei raziocinj astratti, credo che mi sia permesso di muovergli qualche dubbio. Infatti io non posso così facilmente concepire, come la corrente di un fiume debba avere maggiore energia per far balzare le ghiaje alle rive anzicchè farle avvanzare a seconda dell'alveo mentre la sua forza è assai maggiore in questa seconda direzione, che nella prima. E non riesce forse più chiara la spiegazione del modo con cui sono trasportate le ghiaje sul ciglio della riva di un ramo di fiume, essendo ivi più alte che nel mezzo, deducendola dalla diversa velocità da cui sono animate le sue acque? Scorrendo queste in un ramo profondo di un fiume hanno maggior velocità verso il fondo, che verso la sommità; quindi è che mantengono più profondo l'alveo nel luogo a cui corrisponde la maggior velocità la quale diminuendosi a misura che l'acqua si accosta alle rive, ed a misura che l'altezza è minore, dispone il fondo a guisa di una conca abbandonando le ghiaje più minute, nelle parti più vicine al ciglio delle sponde, e rotolando le più grosse nella parte più bassa della conca suddetta. Non veggo perciò, come sia generalmente assurdo il dire che i sassi accumulati nei luoghi dove prima scorreva un ramo di un fiume, vi sono trasportati dalle parti superiori, e sono diversi da quelli che formavano dirò così le sponde del ramo otturato, come in conseguenza delle suesposte teorie pretende di provare *Bernard* (1). Io non dirò già, che questi sassi vi siano trasportati dall'origine del fiume, ma può benissimo accadere che discendano dai punti superiori del letto, il quale perciò si escaverà in que' luoghi, e si alzerà gradatamente negli inferiori.

---

(1) pag. 253.

§. 19. Le conseguenze che i meno istrutti nelle Idrauliche discipline trar potrebbero per la pratica difesa dei fiumi dalle massime che *Bernard* stabilir vuole sulla ruina di quelle di *Guglielmini* risguardanti la rettitudine, e la tortuosità degli alvei da lui impugnate nel seguente tratto della sua opera, mi obbligano a trattare con qualche estensione questo punto del mio esame.

L'Autor non conviene con *Guglielmini*, che i fiumi siano indomabili sopra un fondo sassoso, e che siano assai più facili a regolarsi, quando corrono sulla sabbia, ed anzi asserisce che hanno tanto minore stabilità di fondo, quanto meno sono tenaci le materie sulle quali scorrono (2). Avvertirò primieramente che l'Autore Italiano non si espresse in termini assoluti, ma secondo il suo lodevol costume (3) usò della frase seguente: *potendosi dire che i fiumi in siti simili siano quasi indomabili, o almeno richiedano una piucchè ordinaria vigilanza, ed assistenza per essere mantenuti in dovere, e ciò è sempre tanto più vero, quanto le ghiaje, o sassi sono più copiosi, e più grandi di mole*. Da queste espressioni parmi, che si possa conchiudere che il Sig. *Bernard* non sia molto esatto nello esporre le altrui dottrine. Ma per ragionare sul merito della cosa, io esporrò a *Bernard* la teoria di *Guglielmini*, perchè temo che nello interpretarla abbia preso qualche equivoco. Questi esaminando le cause che influiscono a render tortuosi gli alvei, annoverò fra una delle più forti quella dell'ammasso delle ghiaje che succede nei fondi sassosi de' fiumi, ammassi che costringono la corrente, la quale in que' luoghi muovesi per un piano assai inclinato, a vagare da una sponda all'altra, e quindi a generare delle corrosioni fortissime nelle rive, e in questo senso egli intese che i fiumi i quali corrono in ghiaja sono quasi indomabili. Ma la ragion principale per cui *Bernard* pretende che non siano tali, si è perchè quando il fondo è più facile ad esser corroso (1), come nel caso in cui i fiumi corrono in sabbia, accade che allora la corrosione è più pronta, e si genera più facilmente perchè il terreno è meno tenace, laddove nei luoghi nei quali corrono in ghiaja, la resistenza del fondo è assai maggiore, e quindi più difficilmente l'acqua può corroderlo. Ora io temo che *Bernard* in questo luogo non abbia ben penetrato il fondo della questione. La grande inclinazione del fondo che hanno i fiumi quando corrono in ghiaja unita al trasporto dei sassi li rende difficili ad essere regolati, e tenuti a freno. Il fondo, e le sponde sono più tenaci è vero in questi siti; ma lo sono essi in proporzione della forza, e dell'impeto corrispondente dell'acqua? Quando corrono in sabbia è bensì vero che le corrosioni del fondo sono maggiori, ma perciò appunto si rendono dirò così più mansueti, perchè escavando essi il loro letto, e correndo sopra un piano di sua natura assai meno inclinato di quello sia nei luoghi più alti, perdono la pendenza, e quindi la causa più efficace a produrre la loro tortuosità. A giustificare poi pienamente la teoria di *Guglielmini* basterà a parer mio l'osservare la qualità dei ripari che si usano nei fiumi allorchè corrono in ghiaja, e di quelli con i quali s'imbrigliano nei luoghi dove il fondo è sabbioso. Ognuno sa che alle volte non bastano i più robusti muri a frenar l'impeto di un fiume che ha l'alveo pieno di sassi; mentre alcuni lavori di vimini, e rami d'alberi ripieni di terra, ed opportuni piantamenti bastano a difendere dalle corrosioni le rive di un un fiume che corre sulla sabbia. E dove mai i fiumi hanno la corrente più tortuosa, non ostante che l'intiero ampio letto lo sia assai meno, se non nei luoghi dove corrono in ghiaje? E quale è la ragione per cui in questi luoghi il loro alveo è di una capacità assai maggiore della loro portata, se non perchè appunto la corrente va errando a suo capriccio ora a destra, ed ora a sinistra, insultando, direi quasi, l'arte che tenta di tenerla in regola (1)? Io poi non comprendo come il Sig. *Bernard* avanzi la proposizione che vi sono pochi fiumi i quali corrono in sabbia, se si eccettui il tronco più vicino al loro sbocco. I fiumi da lui osservati, saranno forse tali; non così certamente molti dei nostri di Lombardia, i quali attraversando questa vasta pianura abbandonano le ghiaje in distanza notabile dal loro sbocco. Noi ne abbiamo alcuni, che possono considerarsi più come torrenti, che come fiumi, i quali corrono in sabbia in distanza di 35 e di 50 miglia dal Mare; il Pò fiume reale poi lascia le sue ghiaje ad una distanza di più di cento miglia dal mare (2).

---

(1) pag. 254.
(2) pag. 257.

(3) Raccolta delle acque T.° II°, pag. 121.

---

(1) Ivi.

§. 20. Il voler d'ordinario prescindere dall'idea del modo con cui agisce il fluido dipendentemente dalla sua fisica essenza ha condotto il Sig. *Bernard* a non ammettere il principio (3) ordinariamente ricevuto che il fluido cadendo dal ciglio di una cateratta produca qualche accelerazione nelle sezioni superiori. Se il raziocinio da lui istituito per dimostrare vera la sua asserzione regge in teoria, non può certamente ammettersi in pratica, almeno in molti casi. L'osservazione da me fatta nei canali che hanno, poca, o niuna pen-

---

(1) *Bernard* dice, che quando i fiumi corrono in ghiaja, le rive sono più facilmente corrose che il fondo; ed a questa facilità attribuisce in questo caso la minor consistenza dell'alveo. Ciò sarà vero in molti casi; ma non stabilisce una regola generale, e sicura, al che fare se non conduce direttamente almeno si accosta assai il principio della pendenza che genera in questi luoghi una grande velocità.

(2) Il Pò da Cremona al mare corre per 120 miglia circa senza ghiaja. Il Panaro l'abbandona più di 35 miglia in distanza dal suo sbocco, e la Secchia in distanza di circa 50 miglia.

(3) pag. 123 N.° 234.

denza, e in cui la superficie del fluido si disponga in una linea sensibilmente orizzontale in vicinanza di una diga, mi ha istruito che i galleggianti non accelerano il loro moto se non precisamente nel momento in cui cadono dal ciglio della chiusa; ma così non avviene nei canali dotati di pendenza, e nei quali il fluido in superficie corra con qualche inclinazione, poichè allora si osserva nei galleggianti un acceleramento il quale si estende ad una certa distanza dal ciglio della diga, effetto evidente dell'inclinazione del piano la quale si fa in quel punto maggiore, onde è d'uopo conchiudere che in questo caso debba un tal effetto comunicarsi anche alle sezioni superiori decrescendo però sempre a proporzione che si ascende su per l'alveo del canale. Non è così (conchiude l'Autore). La velocità alla diga non è quella che determina la velocità che ha luogo nel canale, ma questa è quella che determina la prima. Io non credo che alcuno abbia mai concepito in questo senso l'idea dell'acceleramento suddetto. Egli è verissimo che dalla Velocità che ha il fluido nell'alveo superiore alla diga si potrà desumere quella che avrà nelle parti più vicine ad essa, e quest'ultima velocità dipenderà in parte dalla prima; ma ciò non toglie, che se avremo a cagion d'esempio due canali in cui l'acqua scorra con uguale velocità, e che abbiano ciascheduno una cateratta, ma di diversa altezza, non succeda un maggiore acceleramento in quello in cui l'altezza della caterata è minore. Se dunque si parli di quella parte dell'alveo, che è vicina alla diga, l'altezza di questa farà variare la velocità in quel tratto, e si potrà dire che questa dipende almeno in parte dall'altezza della cateratta; ma se si tratti delle sezioni situate a qualche notabile distanza dall'ostacolo, allora la velocità in questo luogo non farà variar punto quella del fluido in dette sezioni più vicine alla diga. Sembrami perciò che il Sig. *Bernard* non abbia ben ponderato questo caso, il che se egli avesse fatto, avrebbe usato maggior riguardo verso il chiar. Ab. *Castelli* che viene da lui accusato di essere caduto in grandi errori (1) quando asserì che l'acqua si accelera cadendo dal ciglio di una chiusa (2).

§. 21. L'analogìa che ha la presente questione con l'altra sulla varia inclinazione che si osserva nel pelo dei fiumi in magra, ed in piena mi obbliga a produrre in questo luogo varie osservazioni fatte dai nostri Idraulici, le quali serviranno a più chiaramente dimostrare la verità del principio stabilito. L'Ab. *Castelli* osservò, che l'altezza delle piene del Pò si va diminuendo all'accostarsi del suo pelo al mare; ma *Bernard* glielo nega perchè dice di non sapere quali siano le profondità dei luoghi paragonati fra loro dal chiariss. Benedettino (3). Ma se egli avesse esaminato quanto dice *Guglielmini* nel Capo 8.° della sua grand'Opera, avrebbe prestata maggior fede alla osservazione di *Castelli*, perchè avrebbe osservato, che dovendo i fiumi per legge costante della natura impostar la loro cadente sotto il pelo basso del mare, è d'uopo che qualunque piena per alta che sia nelle parti superiori si vadi sempre a spianare sotto il pelo suddetto. Se avesse letto il ragionamento dell'egregio Sig. *Eustachio Zanotti* sulla disposizione dell'alveo dei fiumi presso lo sbocco in mare avrebbe osservato (4), *che la profondità della foce in ogni fiume è molto piccola se si paragona alla massima*

---

(1) pag. 261.

(2) Nel discorso storico critico (pag. 45) *Bernard* accusa l'Ab. *Frisi* dicendo che in luogo della sua opera sui torrenti ha adottata la massima di *Zendrini*, e di *Castelli* sull'acceleramento dell'acqua al cader del ciglio di una chiusa, ed in un altro la sentenza contraria di *Viviani*. Chi però vorrà compiacersi di confrontare ciò che dice l'Ab. *Frisi* al Cap. III, pag. 18 della sua opera (T. VII Raccolta degli Scrittori ec.) in cui cita il discorso di *Viviani*, per provare che i fiumi alzano il loro fondo, senza impegnarsi punto a parlare in quel luogo d'aumento di velocità con il paragrafo che trovasi alla pag. 21, vedrà cred'io, che *Bernard* non ha ben compreso i sentimenti di questo matematico Italiano; il quale non parmi certamente in contraddizione con sè stesso.

(3) Alla serie di osservazioni che io qui riferisco può aggiungersi anche l'altra fatta dallo stesso Ab. *Castelli* (Raccolta delle acque T.° I pag. 100 sul fine) nell'Arno: cioè che sei, o sette braccia d'altezza d'acqua dentro Pisa ne producono un solo mezzo braccio alla Marina. Da tutto ciò io credo, che il Sig. *Bernard* dovrà concludere che gli Italiani non si sono limitati alle semplici ipotesi, ma che hanno consultato i fatti prima di stabilire le loro teorie.

(4) Raccolta degli Scrittori T.° VI.° pag. 214.

altezza nelle parti superiori. Il celebre Sig. *Eustachio Manfredi* gli avrebbe pur fatto vedere, che le osservazioni eseguite ci istruiscono, che il pelo alto del fiume Pò è parallelo all'incirca al pelo basso, disponendosi essi in due curve convesse, le quali poi vanno ad unirsi allo sbocco, e quindi le altezze delle piene sono in que' luoghi minori. Che più? Dallo stesso aureo ragionamento (1) sarebbe stato istruito che fu realmente osservato, che nel Pò l'accostamento dei due peli comincia a Lago-scuro, e viene poi con precisione descritto dal chiar. Autore il quale dimostra, che dove arriva l'orizzontale del pelo basso del Mare, ivi incontrasi la massima altezza della piena che va poi scemando nell'accostarsi alla foce, e quindi le altezze vive delle sezioni vanno diminuendo nell'accostarsi che fa questo fiume al suo sbocco (2). Ma il Sig. *Bernard* secondo il suo costume illustra la sua opposta teoria con l'esempio del Rodano, che ha, dice egli maggior profondità ad Arles anzicchè a Beaucaire. Io credo però che non possa influir molto questa osservazione perchè converrebbe, affine di poterla valutare, che egli ci dimostrasse, essere questi luoghi situati omologamente a quelli del Pò riguardo ai rispettivi sbocchi di questi fiumi. Veruno ha mai negato che la profondità di quelli, che corrono in ghiaja sia minore di quella che hanno allorchè corrono sulla sabbia; ma non perciò cred'io, alcuno concluderà da questa generale osservazione, che i fiumi nell'avvicinarsi al loro sbocco abbiano sempre una maggiore profondità. Gli accidenti, ed i fenomeni che osservansi in un fiume, quando ha l'alveo sassoso, e quando lo ha sabbioso, sono troppo dissimili fra loro, per poter, dirò così, legarli insieme, e farli dipendere immediatamente gli uni dagli altri.

§. 22. Ottima, a dir vero, sarebbe la massima proposta da *Bernard* di dirigere gli alvei dei fiumi in linea retta per le ragioni, che egli adduce (1), ma gli è sfuggita una riflessione importante, la quale se fosse ammessa in pratica, cagion sarebbe di gravi disordini nel buon sistema d'un fiume. Siccome dirigendo l'alveo di esso in linea retta la corrente si muove in parità delle altre circostanze con la massima velocità, così succederà in molti casi che non vi sarà modo di sostenere le rive, le quali franeranno, e cadendo nell'alveo stesso, lo riempiranno producendo così molti altri inconvenienti. Quando perciò non si possa esser ben sicuri che le rive siano di una tal consistenza da resistere allo sforzo generato contro di esse dalla grande velocità del fluido, che si muove in un canale rettilineo, non sarà il miglior partito quello di levare all'alveo di un fiume le sue tortuosità. Che se questo scorrerà per un letto sassoso, molto maggiore dovrà essere allora la cautela da usarsi prima di risolversi a qualche raddrizzamento, quantunque *Bernard* consigli il contrario (2). Infatti aumentandosi la velocità del fluido, le ghiaje potrebbero essere spinte più avanti, e distribuirsi in uno spazio più lungo. Ora se il fiume corresse sempre incassato, e le sponde fossero stabili, come suppone in primo luogo l'Autore (3), allora potrebbe adottarsi la massima del raddrizzamento dell'alveo; ma se poi mancassero queste condizioni, e che raddrizzando l'alveo, le ghiaje s'inoltrassero in que' luoghi dove prima non arrivavano, ognuno vede, che potrebbe questa operazione essere funesta al sistema del fiume. Nè credo che compensar potesse questo pericolo il vantaggio rilevato da *Bernard* (4), che quando le rive non fossero stabili, esse verrebbero meno corrose, ed in una estensione minore, quando esse fossero disposte in linea retta, e l'alveo si eleverebbe meno. Imperocchè quando il fiume corre per un alveo tortuoso, mentre corrode una riva, depone in faccia ad essa, e forma un banco, onde ne viene che le sponde tortuose, sono corrose, dirò così a salti, ed or la destra, or la sinistra viene attaccata, ma quando il fluido corresse in linea retta, e non fossero stabili le sue rive, chiunque è pratico del corso dei fiumi potrà facilmente immaginare qual grande dirupamento cagionerebbe in esso la sola prima piena che accadesse in esso dopo il raddrizzamento. Onde non so se il rapido riempimento dell'alveo raddrizzato prodotto dal suddetto dirupamento potesse bilanciare l'effetto del lento rialzarsi che succede nel letto tortuoso di un fiume. Chi poi vorrà meco riflettere alla difficoltà che s'incontrerà nel tenere con l'arte il filone del fiume sempre verso il mezzo dell'alveo, cosicchè non si accosti più ad una riva che ad un' altra, con pericolo di generare delle tortuosità nell'alveo rettilineo, vedrà che conviene prima di determinarsi ad approvare un raddrizzamento esaminar bene tutte le circostanze che possono renderlo infruttuoso, onde non avventurarsi ad un'operazione o dannosa, o per lo meno inutile (1). Io osservo inoltre che l'elevazione del fondo si distribuirebbe forse in uno spazio maggiore, quando esso fosse disposto in linea retta, e perciò sarebbe in ogni parte minore; ma appunto perciò temer si potrebbe che questo alzamento si estendesse ai tronchi inferiori del fiume con pericolo grave dei terreni vicini.

---

(1) pag. 218, 223.

(2) V. *Zendrini* (Leggi, e fenomeni delle acque correnti pag. 241 nel T.° V° della Raccolta suddetta) che dimostra la verità di questo fenomeno con molte osservazioni fatte nel Pò, e nell' Adige.

---

(1) pag. 273.

(2) pag. 276.

(3) Questa supposizione non si avvererà, cred'io, così facilmente in pratica.

(4) pag. 277.

§. 23. Ma si lasci l'argomento della direzione degli alvei in linea retta, e si prenda a considerare la critica che *Bernard* ci presenta in una lunga nota (2) su quanto scrisse il Sig. *Du Buat* delle corrosioni. Questo Autore dice che l'esperienza dimostra avere le corrosioni un limite, ed accenna in breve le condizioni che devono concorrere a far sì che una corrosione possa dirsi stabilita. Niuno Idraulico ignora che questa osservazione fu già opera dell'ingegno, e della penetrazione del Filosofo Bolognese, onde prendendo io la difesa del Sig. *Du Buat*, vengo al tempo stesso a comprovare la verità delle osservazioni di questo nostro chiar. Matematico. La stabilità, ossia il limite delle corrosioni, non si ammette da *Bernard* ne' fiumi rapidi, quando il terreno delle rive possa venir corroso dall'urto diretto della corrente, onde converrà, soggiunge, rivestire le rive, e sottrarle così all'azione del fluido che le investe. Io osservo però che il tipo di qualunque fiume anche rapido mi presenta un andamento obbliquo, ed una curva serpeggiante nella maggior parte del suo corso, e ciò anche nei luoghi, ove l'arte non ha rivestito le sponde per difenderle dall'impeto della corrente. Conviene dire perciò che questa, quando investe sotto un certo dato angolo una riva, produca un certo determinato effetto, e non più, a cui possa il terreno disposto in una determinata figura resistere, perchè se accadesse diversamente, non si dovrebbe osservare nei fiumi già stabiliti l'indicato serpeggiamento, o vogliam dire oscillazione della loro corrente ora alla destra, ed ora alla sinistra. Questa riflessione mi conduce poi naturalmente all'altra già fatta degli Idraulici; che cioè, corrodendosi una sponda l'angolo d'incidenza dell'acqua varia sempre, e quindi varia pur anche la resistenza della riva alla corrente, onde combinando insieme la pratica suddetta osservazione con questo riflesso, io credo che possa desumersi da ciò, che la massima di *Bernard* in tutta la sua estensione non è da ammettersi, tanto più che non mi porge argomenti che appoggino validamente la sua asserzione.

---

(1) Avvertasi che io parlo sempre di fiumi tortuosi, i quali si debbono raddrizzare, e non già di quelli che sono stabiliti, ed hanno qualche loro tronco in linea retta, perchè trattandosi di questi io convengo, che sia assai migliore la loro costituzione in generale che dei primi, i quali hanno l'alveo tortuoso.

(2) pag. 274 e segg.

Perchè una corrosione sia stabilita il Sig. *Du Buat* ha osservato richiedersi che vi sia al piede della medesima un gorgo, ossia che la profondità dell'acqua sia maggiore ivi che altrove. Ora *Bernard* vorrebbe, che quando incontrasi al piede di una riva questa maggior altezza d'acqua, quando la corrosione cessa, questo fosse un indizio della tenacità del terreno di cui la riva è composta, e non una condizione della sua stabilità. Semprecchè l'osservazione del Sig. *Du Buat* sia vera in pratica, cioè che quando una corrosione abbia al suo piede un gorgo, essa non si avvanzi di più (1), egli è certo che potrà un Idraulico pronosticare che quando si formi al piede di una riva tormentata dal filone del fiume un gorgo, questo sia vicino a stabilirsi; proceda poi la formazione del gorgo, o dalla tenacità del terreno della sponda, o da qualunque altra causa. Avverto però che si richiederà una serie di osservazioni, e di esperienze fatte in casi analoghi prima di poter su questo problema pronunciare un fondato giudizio. L'ultima condizione che il Sig. *Du Buat* richiede perchè l'alveo di un fiume si possa dir stabilito in una risvolta, si è che vi sia nel concavo della Botta un aumento di pendenza, o una carica capace di vincere la resistenza della sponda incurvata, sembra a primo aspetto, e così ha giudicato *Bernard*, che questa condizione anzicchè essere un indizio di stabilità, possa essere una causa di distruzione della sponda. Ma se ben si rifletta, che la richiesta stabilità può intendersi in due modi, cioè, può dirsi una corrosione stabilita, quando non s'interna più oltre nella campagna, e quando il fiume non si ritiri da esso per dirigersi con la corrente altrove, si vedrà che può benissimo richiedersi quest' ultima condizione affinchè l'impeto della corrente sia in equilibrio con la resistenza che vi oppone la sponda incurvata, per modo che il filone, o spirito del fiume sia da questo equilibrio di forze ritenuto sempre aderente alla riva battuta, prescindendo però sempre dalle cause superiori che possono determinare ad altra parte la corrente.

§. 24.

---

(1) Per spiegare come formandosi un gorgo al piede di una corrosione si possa credere che essa sia allora al suo limite, si potrebbe dire, che incontrando la corrente nel successivo corrodere una riva il terreno forte, o tufo che resiste all'impeto suo, allora essa ripercossa da questo con varie direzioni rivolga le sue forze contro il fondo, e vi escavi il gorgo.

§. 24. Quando il fondo di un fiume si alza, succede per l'ordinario, che si alzano anche le rive, o per le deposizioni cagionate in tempo d'inondazioni, o per lo scorrimento delle terre dalle montagne, e dalle colline nelle valli per le quali corrono i fiumi. Così c'insegna *Bernard* alla pag. 281. Questa teoria però è appoggiata ad una supposizione, la quale verificandosi, sarebbe cred'io contraria al buon regolamento di un fiume. In fatti se le sponde devono alzarsi contemporaneamente al fondo, è d'uopo che le piene le superino, e s'inondi perciò il terreno adiacente. Ora vorrem noi supporre che la corrente limiterà le sue espansioni a piccole distanze dalle sponde, oppure, il che sembra più probabile, essa non avrà altro freno, se non che quello che gli verrà opposto dalla diversa inclinazione dei fondi, onde potrà accadere, che trovando qualche avviamento la corrente diriga, e stabilisca un nuovo ramo sul terreno coltivato con danno notabile dei possidenti del terreno inondato? Non dovrà perciò un Idraulico destinato a regolare un fiume confidarsi molto nell'alzamento delle rive supposto da *Bernard*, perchè potrebbe commettere errori rilevanti nella difesa a lui affidata (1). Le osservazioni poi dei Fenomeni, che ogni giorno avvengono nei nostri fiumi non ci persuadono abbastanza dell'altro principio stabilito da *Bernard* (2), che i depositi particolari di sabbia poco contribuiscano ad alzare il fondo dei fiumi. La grande altezza, a cui sonosi dovuti portare fra noi nel giro di pochi anni le arginature ci conducono a questo dilemma. O il fondo de' fiumi d'Italia si alza di continuo, o le piene sono più copiose degli anni addietro. Ma siccome, perchè si verificasse questa seconda supposizione, ammetter si dovrebbe un cambiamento nelle stagioni, da cui argomen-

---

(1) L' innalzamento delle rive che produr potesse lo scorrimento delle terre staccate dai monti riuscirà come ognun vede troppo irregolare per potere esser giovevole a tenere incassate le acque.

(2) pag. 281 N.° 366.

tar si potesse che cadessero maggiori le pioggie, e le nevi al presente, di quel che avveniva negli anni passati, del che non credo che finora i più celebri meteorologisti ci abbiano avvertito, così dovrà ammettersi l'alzamento del fondo. Chi poi conosce per esperienza quanto valga ad aumentare la velocità di un fluido qualunque piccolo aumento di altezza, non vorrà dar gran peso alla causa che alcuni indicano produrre maggiore alzamento delle piene, cioè li restringimenti moderati dall'alveo, che da molti si praticano nella difesa dei fiumi. Qualche influsso piuttosto aver potrebbe su questo fenomeno così fatale alle arginature la rapidità con cui precipitano dai monti coltivati le acque; ma io son di parere, appoggiato anche alle più recenti osservazioni di fatto, che la causa principale dell'alzamento del pelo delle piene sia il rapido alzamento del fondo cagionato poi in parte almeno dalla coltivazione troppo estesa introdotta nelle montagne.

DESCRIZIONE DI UN TEODOLITE SCENOGRAFICO

MEMORIA

Del Sig. Giovanni Battista Magistrini.

Ricevuta li 12 *Novembre* 1811.

Tutta l'arte della Prospettiva lineare si può ridurre alle due equazioni semplicissime $r = \frac{ay_x + cu_x}{c + y_x}$, $t = \frac{cz_x}{c + y_x}$, nelle quali r, t sono le coordinate dei punti projettati, u_x, y_x, z_x le coordinate dei punti objettivi, a, c le coordinate del punto di veduta, prese sopra le tre intersezioni del piano geometrico, della tavola, e del piano verticale tirato pel punto di veduta, e pel raggio principale. Determinate le costanti a, c a norma delle circostanze, cioè, scelta una conveniente situazione del punto di veduta, sostituite le espressioni delle coordinate z_x, y_x, u_x, ossia delle distanze dei punti objettivi dai tre piani mentovati, non restano più che i successivi calcoli, o le costruzioni geometriche dei valori delle coordinate r, t corrispondenti ai successivi valori dell'indice di situazione x, e l'applicazione dei medesimi alla tavola. A ben dichiarare tuttavia l'origine, l'utilità, e le applicazioni di queste formole, che io non ho che accennate nella mia Poligonometria analitica, debbonsi distinguere primieramente due specie di oggetti relativamente alla prospettiva. Altri sono puramente ideali, quale sarebbe una macchina di prima invenzione, di cui non si avesse modello davanti agli occhi: altri sono reali, e visibili. Negli uni e negli altri conviene in oltre considerare tre casi: quello, in cui tutti i punti costituenti gli oggetti sono disposti fra loro con data legge di distanze da tre piani dati o da un dato polo; quali sarebbero i vertici, li spigoli, le faccie di un corpo regolare; cosicchè le posizioni rispettive non dipendono che dal calcolo, date che siano tre qualunque di esse: quello, nel quale i punti objettivi, quantunque non regolati da nota legge unica, e generale, nelle distanze fra loro, e da piani dati, tuttavia sono soggetti nelle dimensioni, e nel rispettivo collocamento a noti limiti, e particolari condizioni, per le quali si può senza bisogno di misure, nè ispezione attuale rilevarne numericamente ciascuna distanza particolare, ed eseguirne la prospettiva; di questo numero sono gli edifizj architettonici, e le varie parti, e membrature loro in ciascuno dei varj sistemi inventati dagli Antichi: il terzo caso finalmente, in cui si tratta di oggetti, per le dimensioni, e distanze dei quali altro dato non ha il disegnatore che l'attuale misura di ciascun punto objettivo o d'appresso, o da lontano. Questa diversità di casi e di circostanze per altro poco interessa la maggior parte dei pratici, i quali nulla curando la scorta sicura dell'analisi e della geometria tutto abbandonano l'esito delle loro operazioni al materiale meccanismo dell'occhio e della mano: somma importanza vi trovano al contrario quei pochi illuminati, i quali non obbedendo all'occhio, se non quando ragione il consiglia, e non stendendo la mano che dove loro addita la geometria, hanno di qualche maggiore lunghezza del loro operare il largo compenso di un grado di sicurezza, e rigore, inarrivabile alla sola cieca pratica della mano e dell'occhio anche il più esercitato. Questa seconda classe di periti, ai quali unicamente è diretto questo scritto, troverà non picciolo vantaggio nei primi due casi precedenti soggettando l'esecuzione de' suoi disegni alle due equazioni superiori, o alle equazioni polari corrispondenti, che formar si ponno colle solite permutazioni. Poichè le coordinate z, y, u, che suppongonsi funzioni dell' indice intiero variabile x, rappresentano appunto ciascuna la legge delle distanze dei punti objettivi da ciascun piano rispettivo, la qual legge è data nei due casi suddetti. Quell' indice x, oltrecchè mette a parte delle combinazioni, e dei vantaggi dell' analisi stessa delle curve i continui discontigui, sotto la qual denominazione son compresi i sistemi di punti objettivi, di cui parliamo, porge altresì il risparmio di molti altri segni di convenzione, dei quali soglionsi ingombrare i disegni per argomentare con prontezza, e senza confusione dagli oggetti apparenti della prospettiva le situazioni, le direzioni, e altre proprietà degli oggetti reali. Ma nel terzo caso, che è il più frequente e comune nelle arti, specialmente in quella del paesista, e nella Geodesia, il disegnatore analista e geometra, limitato alla sola ispezione degli oggetti, non contento al tempo stesso delle semplici congetture nè delle apparenze è costretto a rivolgersi alla ricerca esatta delle distanze col soccorso delli strumenti. La camera oscura è certo in questo caso il migliore strumento fra quanti ne furono immaginati; poichè essa offre immediatamente la prospettiva di un intiero sistema d'infiniti punti senza bisogno di alcuna misura, nè costruzione geometrica di distanze nè di dimensioni. Se non che il vantaggio di tanta facilità e prestezza di disegnare per mezzo della camera oscura diveniva tosto un difetto, allorchè degli oggetti così copiati nasceva bisogno di formare un rilievo, o d'istituire qualunque ricerca geodetica; pei quali usi è indispensabile la cognizione delle distanze, e delle dimensioni reali. A sì grave inconveniente rimediò mirabilmente l'illustre Geologo *Marzari Pencati* montando la camera oscura a guisa di teodolite, praticandovi i due movimenti rotatorj orizzontale, e verticale intorno al centro della lente misurati da due circoli graduati, e quel che più gli meritò il premio, e l'applauso dell'Istituto Reale, projettando sul vetro della camera i circoli massimi verticali, e i circoli orizzontali di una qualunque sfera visuale concentrica colla lente, dalle intersezioni dei quali son misurate le distanze angolari degli oggetti rispetto al centro della lente, projezione ingegnosa e felice, per la quale lo spettro degli oggetti, ai quali è rivolta la camera, viene in certo modo a ritrovare da sè, e ad indicare sul vetro la vera situazione dei punti, che ad esso corrispondono nello spazio. Quando però il numero dei punti da rilevare è piccolo, e massime quando trattasi di oggetti inaccessibili, e insieme posti in grande distanza, che non si possa spezzare con replicate stazioni, il teodolite ha per la sua esattezza per confessione dello stesso Sig. *Marzari* la preferenza sopra tutti gli altri strumenti. Per esso alle due equazioni della prospettiva riferite di sopra subentrano le equivalenti $r = a + \frac{c \text{ tang. } \delta_x}{\text{sen. } \beta_x}$, $t = c \text{ tang. } \beta_x$, essendo ora a, c le distanze del centro di rotazione del cannocchiale del teodolite dal piano geometrico, e dalla tavola del disegno, δ_x, β_x gli angoli segnati sul quadrante verticale, e sull'orizzontale nell'osservazione del punto objettivo marcato coll'indice x. Queste sono le formole più semplici, che alla prospettiva vengono somministrate dal teodolite nella sua attuale struttura. Ma con questa stessa semplicità di equazioni già preceduta dal penoso travaglio in campagna della misura ad uno ad uno di altrettanti valori degli angoli δ, β, quanti sono i punti objettivi, nuova fatica, e nuovo imbarazzo non minore resta a superarsi nell'esecuzione, in cui richiedesi un numero di costruzioni delle equazioni stesse doppio di quello dei punti stessi osservati. Che se nel triangolo sferico rettangolo, di cui son cateti gli angoli δ, β, occorra bisogno di conoscerne altresì gli angoli obbliqui; sorgono nuovi inciampi, e complicazioni, e di più nuovi pericoli d'inesattezze e di errori: poichè questi angoli non si possono dedurre dai già noti δ, β, i soli che vengono misurati dallo strumento, se non che per mezzo di lunghi calcoli d'approssimazione.

Considerando io tutte queste difficoltà, e questi varj casi della prospettiva, mi venne in animo d'indagare se il teodolite fosse suscettibile di una modificazione, la quale senza togliere i principali vantaggi di sì prezioso strumento, lo rendesse più utile a quest'arte, e porgesse o tutti o in parte senza bisogno di nuove approssimazioni aritmetiche quelli elementi, per la misura dei quali è stato finora necessario di chiamare in soccorso il calcolo. Lusingandomi di avere ottenuto un qualche intento di tale mia ricerca utile per la pratica, e non indegno della curiosità di chi si diletta anche delle pure speculazioni geometriche, mi avanzo a sottoporlo al giudizio della Società Italiana d'ogni utile perfezionamento delle Arti, e delle Scienze tanto benemerita, alla quale ebbi poc'anzi la sorte e l'onor singolare d'essere ascritto.

1. Se si porta l'intersezione di due linee rette ortogonali sui punti di una sfera obbligando il piano, in cui giacciono, a passare pel centro, e dirigendone una costantemente ad una estremità di un diametro fisso: l'altra retta, c'insegna la Geometria elementare, passerà sempre per l'altra estremità di quel diametro stesso.

2. Adempiansi queste tre condizioni con un regolo, e con una diottra o con un cannocchiale connessi a squadra obbligando il regolo a passare per un punto fisso. È manifesto, che uno spettatore, il quale guardasse per questa diottra gli oggetti, che lo circondano, verrebbe a dirigere tutte le sue visuali ad un altro punto parimenti fisso, la cui distanza dal primo sarebbe un diametro della sfera circoscritta alla squadra, come se qui scelto avesse il punto di veduta, e di qui se ne stesse immobile ad osservare.

3. Tra i modi meccanici d'imprimere un tale sferico movimento all'intersezione dell'asse visuale d'una diottra colla normale linea media di un regolo, che la sostiene, il più semplice, e 'l più vantaggioso m'è parso il seguente.

Un pezzo di lastra d'ottone ilt (fig. 1) è tagliato secondo la curva il, che ha per equazione $r=a(1-\text{sen.}u)$, r, u essendo le coordinate polari, e a il diametro della sfera sulla quale si vorrà eseguire il movimento cercato; e 'l taglio si estende fino ai limiti dati da $u=0$, $u=\frac{p}{2}$, preso p eguale a due angoli retti. Questo pezzo nella sommità i del lembo ricurvo, cioè, nel punto, ove $u = \frac{p}{2}$, è munito d'un picciol manico cilindrico *im*, il cui asse coincide colla tangente della curva nel punto stesso. Da questo stesso punto sporgono sopra ambedue le superficie della lastra due corti e piccioli perni opposti, cilindrici anch'essi. Il manico s'ingrossa alquanto nel mezzo *r* in forma di ruota, indi ripresa per un breve tratto la prima grossezza, termina in un bottone, o cresta *m* a guisa di vite.

Sorge dalla testa S (fig. 7) di un treppiede P Q R S, quale si adopra per sostenere la tavoletta pretoriana, un parallelepipedo *bd* (fig. 2) scavato per un tratto verso la cima nel senso di due faccie opposte. Le altre due pareti per due fessure *ai*, *cr* aperte nella loro sommità sostengono il manico cilindrico precedente loro normale, abbracciando, e stringendone la ruota. Due mollette in oltre *gi*, che partono dal mezzo *g* del pieno del parallelepipedo, e verranno a battere in *i* sulla ruota, ne accresceranno vieppiù la compressione, e l'attrito. La figura 3 rappresenta la sezione della ruota, delle due mollette, e del parallelepipedo fatta per l'asse, e perpendicolarmente alla faccia anteriore. Il parallelepipedo viene innestato sulla testa del treppiede mediante il cilindretto *l*, che lo termina.

Un regolo di ottone *pq* (fig. 4) diviso da una fessura longitudinale in due parti tenute in sesto in una estremità da una diottra normale e nell'altra da una picciola traversa *ki*. Nelle pareti interne del regolo sono praticate due scannellature parallele *bk*, *li* di larghezza, e profondità sufficienti per ricevere esattamente i due perni cilindrici accennati di sopra, che sono fissi nella sommità *i* della curva *li* (fig. 1). Parimente la fessura, che separa le due parti del regolo, è capace della grossezza della lastra, la quale vi può scorrere liberamente senza però oscillare. Unita che sia la diottra sulla testa del regolo, la linea visuale, le due linee medie parallele delle due scannellature interne del regolo, e la linea

nea di confine della traversa, che forma la base del regolo, dovranno essere stabilmente situate in un medesimo piano: in oltre la distanza della base del regolo dalla linea visuale della diottra eguaglierà l'altezza della curva della lastra, cioè la distanza dei punti estremi di essa, ossia il parametro a dell'equazione $r = a\ (\ 1 - \text{sen.}\ u\ )$. La figura 5 rappresenta la diottra munita di due alette b, d, colle quali verrà fermata sulla cima del regolo.

4. Si uniscano ora, e si adattino questi pezzi coll'ordine, e colle condizioni esposte, e di più in modo, che i due perni alla sommità della curva si trovino inseriti nelle scannellature del regolo, la traversa inferiore di questo batta sulla concavità della curva, e uno stesso piano passi per la linea visuale della diottra, per l'asse del manico della lastra, e per mezzo della grossezza della lastra medesima. Dico, che spingendo (fig. 7), e ritirando il regolo per la base f a piacimento, purchè rada colla traversa il margine curvilineo BGF, e a qualunque grado d'inclinazione di giri mediante la cresta, o il bottone e, la visuale prolungata terminerà sempre in uno stesso punto C dietro allo strumento sull'asse di rotazione alla distanza dai due perni eguale all'altezza GB della curva, ossia l'intersezione della visuale della diottra colla linea media del regolo si troverà costantemente sulla sfera di diametro eguale all'altezza della curva avente asse comune collo strumento, e vertice comune colla curva. A dimostrazione di ciò, servirà l'esposizione, che ora darò dell'origine della curva stessa, e del modo di descriverla meccanicamente.

5. Sulla lastra AD ben piana, e liscia (fig. 8) si descrivano due assi ortogonali ab, GF, e il semicircolo $anmd$ sopra il diametro ad, la cui lunghezza si sceglierà a tenore della grandezza, e dello sviluppo, che si vorrà dare allo strumento. Nel centro C si fermi un picciol gnomone, e sopra questo si adatti uno stilo CN, che abbia la libertà di girarvi d'intorno, forato in n alla distanza dal centro C eguale al raggio. Un regolo ns della lunghezza del diametro ad del se-

micircolo si munisca nelle estremità di due punte rivolte per di sotto, e con una fessura longitudinale praticata tra le due punte stesse investa un altro gnomone fisso nel vertice *a* del semicircolo in modo, che possa ruotare, e scorrere, ma passando sempre pel vertice *a*. Una punta del regolo entri nel foro *n* dello stilo *n*C, e faccia sì che il regolo siegua ruotando, e progredendo lo stilo, e descriva egli stesso colla punta obbligata nel foro *n* la semicirconferenza *anmd*. Ora se menando in giro lo stilo C*n* si comprime leggermente il regolo, che è forzato a seguirlo; l'altra punta estrema *s* descriverà sulla lastra la specie di trattoria *bsa*, la cui equazione, se *a* è la distanza delle due punte *n*, *s*, e insieme il diametro *ad*, sarà appunto $r = a\ (1 - \text{sen.}\ u)$, essendo in oltre *u* la metà del numero dei gradi dell'arco *an* sotteso di mano in mano dal regolo, ed *r* la distanza tra'l vertice *a* del semicircolo, e la punta inferiore *s* del regolo. Poichè abbiamo $r = as = ns - na = a - a\ \text{sen.}\ \frac{an}{2} = a\ (1 - \text{sen.}\ u)$.

Eseguita la stessa operazione sulla faccia opposta della lastra con un semicircolo eguale e similmente posto rispetto al precedente, si tagli la lastra seguendo esattamente la curva così descritta da ambe le parti, e proseguendo il taglio a piacimento se ne levi un pezzo d'una certa larghezza discreta, quale sarebbe la figura *ilt* (fig. 1), e si metta in opra, e si adatti colle condizioni, e avvertenze poc'anzi prescritte. Sarà facile il rilevare dalla meccanica costruzione della curva, che il regolo AF (fig. 7) obbligato costantemente a passare pel vertice di essa, e a seguirne con una sua estremità l'andamento porterà sempre sullo stesso circolo di diametro eguale all'altezza della curva un punto della sua linea media distante dall'estremità stessa, quanto è alta la curva, il qual punto dovrà essere l'intersezione colla visuale della diottra, o del cannocchiale. Il che sempre succederà a qualunque inclinazione si giri la lastra sopra il parallelepipedo, cui è appesa.

Ecco pertanto un mezzo d'imprimere a una diottra tre movimenti diversi con due soli impulsi, di formarla sopra qualunque oggetto, e di averne le visuali sempre dirette ad un punto unico di veduta. Ora nulla più manca a questo apparecchio per farlo servire alla prospettiva lineare fuorchè la modificazione e l'aggiunta seguente.

6. Si adatti sulla faccia superiore *pd* del parallelepipedo (fig. 2) un quadrante graduato BC (fig. 6) fermandolo con due viti, che stringano le spranghette *f*, *h* sui due fori *m*, *n* (fig. 2) in modo che il quadrante abbia il centro sulla linea tirata per le due fessure *c*, *a*, intorno alla quale roterà lo strumento; in oltre la periferia graduata sia in un piano parallelo alla faccia *pd* del parallelepipedo, e in fine il raggio, che passa per mezzo del quadrante sia nel piano normale *apd*, che bipartisce il parallelepipedo passando per *c*, *a*. Il quadrante si costruisca di tal raggio, che la diottra ruotando non venga ad urtare contro di esso. Applicato in tal modo il quadrante si prepari un triplice stilo, quale si vede nella figura 6 medesima, di cui due raggi *ad*, *ae* siano diametralmente opposti, e gli altri due *a*B, *a*C siano ad angolo retto fra loro, e semiretto coi primi. Si fermi sul manico tra *m*, *r* (fig. 1) lo stilo mediante il suo occhio *a* in tal posizione, che quando la lastra pende dal suo asse non inclinando nè a destra, nè a sinistra del parallelepipedo, lo stilo si trovi co' suoi tre raggi rispetto al quadrante, come appare nella figura 6. Il triplo indice, e 'l quadrante non compajono nella projezione dello stromento della figura 7, se non nelle due linee opposte *xy*, *zt*. Questo triplo indice potrà ruotando collo strumento marcare sopra del solo quadrante i gradi di due semirivoluzioni intiere una a destra, l'altra a sinistra, e risparmierà così l'imbarazzo di un intiero semicircolo graduato, che impedirebbe la rotazione traversale della diottra.

7. Nell'atto che si descrive sulla lastra AD (fig. 8) la curva *asb*, s'incidano successivamente presso l'estremità *s* del regolo, e sulla direzione della linea media del medesimo i

numeri suddupli dei gradi, che son descritti sul circolo generatore *anmd* dall'altra estremità *n*. Questi numeri suddupli esprimeranno i complementi degli angoli *na*C, che il regolo formerà coll'asse *ad*. Per evitare l'incomodo dell'espressa graduazione numerizzata del circolo generatore, si descriva concentrico con esso, e sulla stessa base GF un semicircolo GNMF della grandezza di qualcuno, che se n'abbia già graduato, e allungato lo stilo C*n* dell'intervallo *n*N, si osservino i gradi, che sono marcati sul nuovo semicircolo dallo stilo CN o mediante la numerizzazione del semicircolo stesso, ovvero riportando col compasso gli archi GN, GM sul semicircolo, o quadrante d'egual raggio, che si ha in pronto già numerizzato. Lo stesso si eseguisca sull'altra faccia della lastra. Anzi sulle due faccie si ponno impiegare due ordini diversi di graduazione in modo, che le divisioni di una servano di nonio, e di correzione alle divisioni dell'altra. Nella figura si vedono due esempj di questa graduazione del margine della lastra, sulla quale i numeri 30, e 70 sono scritti in fondo al regolo nelle due posizioni, che questo prende, allorchè lo stilo si dirige ai numeri 60, e 140 del semicircolo.

Dal mezzo della base del regolo (fig. 4) sulla direzione delle due linee medie delle scannellature interne sporgono due aghi *s*, *t*, i quali mentre il regolo investirà la lastra *ilt* (fig. 1), dovranno indicare da ambe le parti le divisioni precedenti. Per essi io saprò subito l'angolo d'inclinazione della diottra o della visuale OC (fig. 7) coll'asse dello strumento, poichè il numero che si troverà sotto la punta D, sarà il numero dei gradi dell'angolo OCB.

8. Invece della graduazione del lembo curvilineo della lastra si potrebbe, se si credesse più facile, e comodo, dividere in parti decimali le due faccie laterali del regolo, come rappresentano i punti marcati sopra *vq* (fig. 4), e sopra AF (fig. 7); e adattando una piccola staffa sui due perni del regolo, o prolungando le punte dei perni stessi fino ad escire,

e mostrarsi sulle faccie laterali medesime, rendere visibili le successive distanze della testa del regolo, e della visuale della diottra dal centro dei due perni. Queste distanze sarebbero le corde dei doppj archi, che misurano gli angoli ACB (fig. 7) nel circolo generatore della curva BFG.

9. Ora suppongasi un sistema di punti H, M, L, K, N (fig. 9) traguardati collo strumento fin qui descritto, il cui asse cada sulla linea CQ, e la cui diottra porti tutte le successive visuali nel punto C. S'immagini la piramide visuale così risultante tagliata da un piano DE normale a CQ. Il sistema dei punti h, m, q, l, k, n d'intersezione del piano colle visuali sarà la prospettiva sopra il piano stesso dei punti H, M, Q, L, K, N. Il punto q sarà il così detto punto principale della prospettiva, e qC, o Qc il raggio, che chiamasi principale. Se da q si tirano nel piano DE a tutti i punti d'intersezione h, m, l, k, n le rette qh, qm, ql, qk, qn normali necessariamente al raggio principale Cq, risulteranno altrettanti triangoli rettangoli, i cui angoli obbliqui opposti a queste normali saranno quelli, che di sopra chiamavamo u nella equazione della curva dello strumento (num. 5). Se dunque si chiama s la normale ql, cioè l'ordinata polare della prospettiva l di un punto qualunque L, nel traguardar il quale siasi trovato sulla divisione della lastra dello strumento il numero u segnato dal regolo; avremo $s = c$ tang. u, dove c è la distanza qC della tavola dal punto di veduta. Ovvero chiamando b la parte del regolo prolungato fino alla visuale della diottra, che sottendeva l'arco di gradi $2u$ nel circolo generatore di diametro a, per essere $b = a$ sen. u, quindi sen. $u = \frac{b}{a}$, e cos. $u = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$, e tang. $u = \frac{b}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$, sarà $s = \frac{bc}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$, dove b verrà dato successivamente dalla divisione del regolo, quando di questa invece della graduazione della curva vogliasi far uso.

Sebbene non sia tanto complicata nè l'una nè l'altra di queste due formole, perchè difficile, e lungo riescir ne possa il calcolo aritmetico, massime se si hanno buone tavole trigonometriche: sarà tuttavia più spedita ed esatta la misura geometrica, che ne offre la figura 10. Si adatti a due assi ortogonali AQ, QB un quadrante graduato AB, e si tirino i raggi QD, QE, QF, QG, che formino coll'asse QA successivamente gli angoli u. Si prenda sopra QA partendo dal centro la distanza $Qc = c$, e si tiri la normale indefinita cz: i segmenti di questa retta cd, ce, cf, cq saranno i valori delle ordinate polari rappresentate dall'equazione $s = c$ tang. u; come è chiaro dai triangoli rettangoli cQd, cQe, ec. Che se invece degli angoli u son date dallo strumento le corde b, e si deve far uso della formola $s = \frac{bc}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$; si prenda sopra il medesimo asse $Qa = a$, e sopra di esso si descriva il semicircolo ahkQ; indi si applichino in a le successive corde osservate ah, ak, al, ai, e per le estremità h, k, l, i, ec. si tirino le corde supplementarie Qh, Qk, Ql, Qi, ec. Queste taglieranno sulla retta precedente cZ i segmenti cd, ce, cf, cg, ec., che saranno i valori cercati di s della seconda formola: il che si vedrà osservando che i triangoli Qah, Qak, ec. rettangoli sono simili ai triangoli rettangoli Qcd, Qce, ec.

L'elemento c però non può prendersi a capriccio nei casi particolari, come noi abbiam fatto in questa costruzione generale delle due formole. Dipende esso dall'estensione, che in ciascun caso si vorrà dare alla prospettiva, potendo questa variare all'infinito per un medesimo sistema di oggetti, attese le infinite posizioni del piano secante della piramide ottica rispetto al punto di veduta. Sia s' la massima dimensione stabilita, che dovrà avere il disegno intorno al punto principale, cioè sia s' l'ordinata polare della prospettiva del punto più lontano dal raggio principale fra tutti i punti objettivi, che debbon essere disegnati e compresi nella tavola; e sia u' l'angolo corrispondente fatto dalla visuale col raggio principale, allorchè si traguarda questo punto estremo: ovvero sia b' il pezzo del regolo, che rimane iscritto nel circolo genitore della curva dello strumento, allorchè parimente si traguarda un tal punto. Avremo le due formole $c = \frac{s'}{\text{tang.}\,u'}$, $c = \frac{s'\sqrt{(a^2 - b'^2)}}{b'}$. Si prolunghi QB in S (fig. 10), e sia QS $= s'$, e AQ sia di gradi u'. Tirato il raggio QG, e a questo da S la parallela SC, il segmento QC sarà $= \frac{s'}{\text{tang.}\,u'}$. Per la formola poi $c = \frac{s'\sqrt{(a^2 - b'^2)}}{b'}$ si prenda nel semicircolo ahlQ di diametro a la corda $ai = b'$, e si tiri Qi, che sarà $= \sqrt{(a^2 - b'^2)}$. Si porti sopra QB la corda ai in QB', e la Qi in Qo, e sia QS $= s'$. Tirata la B'o, e la retta SC parallele, questa determinerà nel segmento QC il valor di c rappresentato dalla seconda formola, come risulta dal confronto dei lati omologhi dei due triangoli simili B'Qo, SQC.

Resta ora a determinarsi la giusta situazione di ciascuna ordinata s della prospettiva di ciascun punto objettivo sulla tavola. S'immagini un piano indefinito (fig. 9) tirato pel raggio principale, e normale al piano DE, che rappresenta la tavola. Questo piano è quello stesso, che si tirerebbe per l'asse dello strumento, e pel mezzo del quadrante applicato al medesimo. L'intersezione col piano DE sarà la retta RS, che passerà pel punto principale q, che si prende per origine o polo delle ordinate s, delle quali abbiamo poc' anzi espresse analiticamente, e costruite geometricamente le grandezze. È chiaro, che l'angolo Rqn fatto con questa linea d'intersezione RS dall'ordinata polare per esempio qn del punto n prospettiva del punto objettivo N sarà lo stesso che l'angolo, che si troverà marcato sul quadrante dello strumento, allorchè si mira con esso il punto N. Chiamo la linea RS asse principale della prospettiva, e gli angoli, che con essa formano le ordinate polari, gli esprimo con $\pm v$, $+$ gli angoli a destra, e $-$ gli angoli a sinistra, come Rql. Ora prendendo dal quadrante dello strumento questi angoli, e dalla curva direttrice del regolo graduata gli angoli *u*, mentre ho coi secondi, e colla costruzione precedente le ordinate polari della prospettiva, avrò nei primi le ascisse angolari scegliendo nella tavola il polo nel punto principale, e l'asse sulla linea, che chiamo asse principale della prospettiva.

Dato dunque un sistema di punti osservati col nostro strumento, stabilisco prima di tutto la grandezza della tavola, su cui voglio rappresentarlo in prospettiva; e secondo che l'asse dello strumento nell'osservare era rivolto verso il mezzo del sistema, o da un lato, o verso la cima, o verso il fondo, fisso sulla tavola similmente il punto principale o verso il mezzo, o da un lato, o in cima, o in fondo. In questo punto colloco il centro di un semicircolo graduato DAE (fig. 11) munito di una riga HK, che si può girare intorno al centro C, e un lembo della quale giace sempre sulla direzione d'un diametro; e adatto la base DE del semicircolo in modo, che il vertice cada in A, per dove passerebbe l'asse principale, cioè la linea d'intersezione della tavola col piano prolungato dello strumento nella sua primitiva situazione, ossia la linea RS della figura 9. Indi giro la riga HK a destra o a sinistra del vertice A di tanti gradi, quanti per ciascun punto objettivo osservato ne trovo notati a destra o a sinistra sul quadrante dello strumento: in fine prendo le aperture di compasso *cd*, *ce*, *ef*, ec. nella figura 10, e le trasporto sulla riga HK (fig. 11) partendo dal centro verso le divisioni, sulle quali la trattengo di mano in mano. Per esempio sulla graduazione della curva dello strumento, oppure sopra quella del regolo avendo per un certo punto objettivo osservato il numero 40, oppure la corda *ak* (fig. 10), e sul quadrante dello strumento il numero 15 a sinistra; applico nel quadrante di costruzione (fig. 10) il raggio QE alla divisione 40, e formo il segmento *ce* sulla linea delle ordinate polari: giro sul semicircolo DAE (fig. 11) la riga alla divisione 15 a sinistra del vertice A; coll'apertura di compasso

ce

ce precedente segno sulla tavola PQ la distanza C*e* dal centro lungo la linea CH. Il punto *e* è la prospettiva del punto osservato.

10. Il medesimo strumento senza bisogno di nissun'aggiunta o modificazione serve egualmente alla misura delle distanze sì dirette, che orizzontali, e verticali dei punti inaccessibili. Solamente per le distanze orizzontali, e verticali richiedesi di più, qualcuno dei noti mezzi per collocare l'asse dello strumento in direzione orizzontale. A tal fine si potrebbe munire il parallelepipedo nell'estremità di un disco normale all'asse, cioè, parallelo all'asse dello strumento, e i tre appoggi del treppiede di tre viti quali s'adoprano pel teodolite usato. Collocando sopra il disco due livelli a bolla d'aria, e regolandoli col movimento dolce di tutta la macchina medianti le tre viti si verrebbe facilmente ad orizzontarne il raggio principale. Premessa questa operazione si diriga la diottra successivamente ai varj punti proposti, e di più ad uno scopo I (fig. 9), che si collocherà sulla direzione CQ del raggio principale alla maggiore distanza CI dalla stazione principale, che si possa misurar sul terreno. Osservati, e registrati gli angoli u formati dalle visuali della diottra col raggio principale, che chiameremo angoli di deviazione longitudinale, e gli angoli v che chiameremo di deviazione trasversale, dati i primi dalla graduazione della lastra ricurva, i secondi dalla graduazione del quadrante, si trasporti lo strumento nel sito dello scopo I rivolgendolo o nella stessa direzione, o in direzion contraria, coll'asse o raggio principale però orizzontato come prima, e situato sulla stessa linea CI, sulla quale trovavasi prima. Si traguardino di nuovo i punti stessi già osservati dal punto C, e si notino gli angoli delle nuove visuali IN, IL, IM, ec. fatti coll'asse dello strumento, e indicati sulla curva direttrice della diottra. Gli angoli poi di deviazione traversale dello strumento in questa seconda stazione saranno li stessi, che venivano indicati nella prima per li stessi punti rispettivamente.

Avremo così i triangoli CNI, CLI, CKI, CHI, nei quali il lato CI, per ipotesi misurato sul terreno, è comune a tutti, e in oltre son dati in ciascuno gli angoli contigui al lato comune CI, cioè l'angolo in C, che chiamiamo u, e l'angolo in I, o il suo supplemento, che chiameremo u'. Dunque chiamando in oltre d la distanza diretta CL di un punto L qualunque, ed l la distanza CI delle due stazioni, avremo $l : d :: \text{sen.}(u'-u) : \text{sen.}u'$, quindi $d = \frac{l\ \text{sen.}\ u'}{\text{sen.}(u'-u)}$.

Nel foglio, e nella figura stessa di costruzione, che ha servito per la prospettiva (fig. 10), suppongasi l'arco AD del quadrante di un numero di gradi eguale al numero u notato sulla lastra, allorchè si traguardava il punto L (fig. 9), e che sia AQ (fig. 10) l'arco u' dato pel punto stesso nella seconda stazione, cioè l'angolo LIQ. Sul prolungamento del raggio estremo QA preso $QE' = l$, e per E' tirata la E'D' parallela all'altro raggio estremo QE fino all'incontro del raggio medio QD, sarà QD' la distanza d cercata; essendo l'angolo $E'QD' = u$, e $QD'E' = u' - u$.

11. Trovate le distanze di rette CL, CN, CK, ec. dal punto C (fig. 9) collo strumento orizzontato in ambedue le stazioni, e ritenuto il registro così delle deviazioni orizzontali u, come pure delle trasversali chiamate di sopra v, si ha tutto ciò, che occorre per determinare le differenze di livello dei punti osservati rispetto alla stazione principale, e le distanze orizzontali. Di fatti consideriamo un punto L, e immaginiamo un piano orizzontale tirato pel raggio principale CQ, un piano verticale tirato per la visuale CL, la cui intersezione col primo piano sia Cx, e un terzo piano, che passi pel raggio principale CQ, e per la visuale CL; e in questi tre piani con centro C, e con raggio $= 1 =$ Cz descrivasi il triangolo sferico zty, che sarà rettangolo in z. È manifesto, ritenute le denominazioni superiori, e chiamate Δ le differenze di livello, δ le distanze orizzontali dei punti proposti, che sarà il lato $ty = u$, e l'angolo $tyz = \frac{p}{2} - v$, e

in fine per le note formole trigonometriche $Lx = d.\,\text{sen.}\,ty \times \text{sen.}\,tyz = d.\,\text{sen.}\,u\,\text{sen.}\left(\frac{p}{2} - v\right) = d.\,\text{sen.}\,u\,\text{cos.}\,v = \Delta$, $Cx = d.\,\text{cos.}\,u\,\text{cos.}\,v = \delta$.

Sia AG il numero dei gradi v (fig. 10). Si tiri il raggio QG, e si prolunghi in p. Dal punto D′ estremità della distanza QD′ già costruita di sopra per l'angolo $AD = u$, si tiri $D'm$ parallela a QG sul raggio iniziale AQ prolungato, e la normale $D'n$, e da n la np normale sopra GQ, e sopra la parallela $D'm$ sarà $rn = \Delta$, $Qp = \delta$. Come si vedrà facilmente osservando, che $D'mn = pQn = AQG = v$, $D'Q = \delta$, $D'Qn = AQD = u$.

12. Vogliasi l'espressione della distanza tra loro di due punti qualunque, e la differenza di livello parimente fra loro. S'intendano numerizzati i punti objettivi, e gli angoli, che le visuali rispettive formano col raggio principale, siano indicati con u_1, u_2, u_3, u_4 .... u_x, così con v_1, v_2, v_3 .... v_x gli angoli d'inclinazione dello strumento, similmente con δ_1, δ_2, δ_3 .... δ_x le distanze dal punto di veduta; e siano i due punti $(x, x+n)$ esimi quelli, dei quali cercasi la distanza, e la differenza di livello, per esempio L, N. Si tirino tre piani, uno per le due visuali corrispondenti ai due punti, due pel raggio principale, e per le due visuali stesse. Sopra questi piani, e dal punto di veduta come centro, e con raggio per esempio CL si descriva il triangolo sferico obliquangolo QLN′. Avremo i due lati QL, QN′ espressi appunto da u_x, u_{x+n}, e l'angolo compreso $LQN' = v_{x+n} - v_x$. Pel terzo lato incognito, che misura l'angolo delle due visuali, chiamandolo t, si avrà dalla trigonometria $\text{cos.}\,t = \text{cos.}\,u_x \times \text{cos.}\,u_{x+n} - \text{sen.}\,u_x\,\text{sen.}\,u_{x+n}\,\text{cos.}\,(v_{x+n} - v_x)$, e per la distanza LN dei due punti, che chiameremo d', si troverà $d' = \sqrt{\left\{ d^2_{x+n} - 2d_x\,d_{x+n}\,\text{cos.}\,t + d_x^2 \right\}}$, nota formola di *Moivre*, trattandosi d'un triangolo rettilineo LCN, in cui oltre ai lati $CL = d_x$, $CN = d_{x+n}$ è ora noto anche l'angolo da essi compreso $= t$.

Si descriva (fig. 12) con raggio $= \mathrm{CD} = d_x$ il semicircolo DNA, e col diametro $\mathrm{AB} = 1$ il semicircolo BVL'N'A tangente al primo in A. Si tirino le corde AV, AL', AN', che taglino nel secondo gli archi $\mathrm{BV} = u_x$, $\mathrm{BN}' = u_{x+n}$, $\mathrm{BL}' = v_{x+n} - v_x$, sarà $\mathrm{AV} = \cos. u_x$, $\mathrm{AN}' = \cos. u_{x+n}$, $\mathrm{AL}' = \cos. (v_{x+n} - v_x)$, e le distanze BV, BN', BL' saranno rispettivamente $= \mathrm{sen}. u_x$, $\mathrm{sen}. u_{x+n}$, $\mathrm{sen}. (v_{x+n} - v_x)$. Si tiri per A FG normale a DA prolungato, si prenda $\mathrm{AF} = \mathrm{AG} = 1$. Indi presa $\mathrm{A}e = \mathrm{AV} = \cos. u_x$, $\mathrm{A}r = \mathrm{AN}' = \cos. u_{x+n}$ e tirate Gr, es parallele, sarà $\mathrm{A}s = \cos. u_x \cos. u_{x+n}$. Similmente fatto $\mathrm{A}f = \mathrm{sen}. u_{x+n}$, $\mathrm{A}h = \mathrm{sen}. u_x$, le due parallele F$h$, fi ci daranno $\mathrm{A}i = \mathrm{sen}. u_x \, \mathrm{sen}. u_{x+n}$. Presa in fine $\mathrm{A}d = \mathrm{AL}' = \cos. (v_{x+n} - v_x)$, e tirate le due parallele Gi, dk, si troverà $\mathrm{A}k = \mathrm{A}i \cos. (v_{x+n} - v_x) = \mathrm{sen}. u_x \, \mathrm{sen}. u_{x+n} \cos. (v_{x+n} - v_x)$. Dunque $\cos. t = \mathrm{A}s - \mathrm{A}k = \mathrm{K}s$. Ora da k sotto un angolo qualunque tiro una retta, e su di essa prendo $\mathrm{K}y = \mathrm{AC} = d_x$, e fatto $\mathrm{KT} = \mathrm{AB} = 1$, tiro T$y$, e da s la parallela sx: questa mi dà $kx = d_x \cos. t$. Porto kx da C in P sul raggio CA, alzo la normale PN, ed ho l'arco $\mathrm{AN} = t$; prendo $\mathrm{CL} = d_{x+n}$, e da L ad N tiro la retta LN. Sarà $\mathrm{LN} = \sqrt{(\mathrm{LP}^2 + \mathrm{PN}^2)} = \sqrt{\{\mathrm{C}d_{x+n} - (\mathrm{P})^2 + d_x^2 \, \mathrm{sen}. t^2\}} = \sqrt{\{d^2_{x+n} - 2 d_{x+n} d_x \cos. t + d_x^2\}} = d'$ distanza cercata. Tutte queste costruzioni non hanno bisogno di dimostrazione, e sono le più semplici, e facili della geometria elementare.

Chiamando finalmente y la differenza di livello dei due punti stessi $(x, x+n)$ esimi, e rammentando la prima delle due formole del numero 11, si troverà $y = d_{x+n} \, \mathrm{sen}. u_{x+n} \cos. v_{x+n} - d_x \, \mathrm{sen}. u_x \cos. v_x$, espressione anche questa determinabile esattamente coi mezzi stessi di costruzione precedenti.

13. Colla proposta modificazione pertanto nulla si toglie al teodolite dei già noti vantaggi nella ricerca delle distanze reali degli oggetti, e nelle altre applicazioni della Geodesia. Mentre prima i dati del teodolite erano i cateti di un triangolo visuale sferico rettangolo, ora se ne hanno invece l'ipo-

tenusa, e un angolo obbliquo. Con questi nuovi elementi le due costruzioni, che ogni punto objettivo richiedeva per essere disegnato in prospettiva, sono ridotte ad una sola; poichè delle due equazioni, che sempre esister debbono per un sistema di punti, quella sola, che determina le coordinate polari, dipende ora dal calcolo, tenendo luogo dell' altra lo strumento medesimo, che ce ne misura immediatamente le ascisse angolari. Il nuovo grado di facilità, che di qui risulta nell' esecuzione della prospettiva essendo stato il mio primo scopo nell' intraprendere questo qualunque perfezionamento del teodolite, m' indusse a distinguere il nuovo strumento risultante colla denominazione di teodolite scenografico, quantunque a tutti gli altri usi del teodolite ordinario possa egualmente servire. La descrizione però, che ne ho delineata, riguardare non si dee che come un semplice schizzo della struttura fondamentale. Obbligato io alla sola geometria teorica come fui sempre finora, e privo di occasioni, e di mezzi d' esperienza, e di pratica di strumenti, invano tenterei un' adequata determinazione delle dimensioni più convenienti, della figura più elegante, e della migliore connessione delle parti del mio strumento, e col modo migliore di combinarne il peso, e la stabilità col volume del minimo imbarazzo, e colla sicurezza e facilità del maneggio, e delle applicazioni. A tutte queste mancanze saprebbero provvedere in gran parte li stessi artefici, quando ne fosse riconosciuta l' utilità, e ordinata l' esecuzione. Aggiungerò solamente un qualche cenno del metodo di farne uso, che mi sembra il più compendioso e spedito.

14. Collocato lo strumento sul luogo delle osservazioni, e diretto l' asse rispetto all' orizzonte, e al meridiano, come richiede il punto di vista, sotto cui vuolsi rappresentare la veduta, si miri successivamente colla diottra, o col cannocchiale a tutti i punti, che si ha bisogno di osservare, e alle osservazioni secondo l' ordine, con cui si succedono, si assegnino rispettivamente gli indici 1, 2, 3, 4, ec., e questi

si notino nella prima delle quattro colonne di un foglio di carta preparato, come si vede nella figura 13. In ciascuna osservazione si copii dalla lastra ricurva dello strumento l'angolo u, che ho chiamato angolo di deviazione longitudinale, e se ne scriva il valore nella seconda colonna del foglio dirimpetto al numero della prima colonna corrispondente all' osservazione: similmente si registri nella terza colonna l'angolo v di deviazione trasversale, che trovasi segnato sul quadrante. Dovendosi trasportare in una seconda stazione ausiliaria lo strumento, se si avrà cura di dare al medesimo la posizione, e direzione simile alla precedente, e di osservare i punti stessi col medesimo ordine; in questa seconda stazione basterà il registro delle sole nuove deviazioni longitudinali u' nella quarta colonna contro agli indici corrispondenti delle osservazioni. Allorchè nella veduta si troveranno angoli, e margini, o contorni rettilinei; osservatine i soli punti estremi, si uniranno con parentesi esteriori nel foglio di registro le caselle rispettive; con che si avrà indizio delle rette, che avransi a descrivere nel disegno, e come i punti della prospettiva dovranno essere gli uni legati cogli altri. Nella figura 13 si hanno di tutte queste cose quattro esempi per gli indici 1, 8, 10, e 14. Sulla linea dell' indice 1 si ha $u=v=u'=0$, con che si rileva, che il punto segnato con questo numero trovavasi sulla direzione dell' asse dello strumento, o sul raggio principale. Il punto dell' osservazione 8.ª si vede, che era dall' asse dello strumento alla distanza angolare 10, e dal piano verticale tirato per l' asse era alla distanza angolare 19 a destra. Il punto segnato 10 era dall' asse distante 20, e dal pian per l' asse distante a sinistra 15. Il punto 14 era alla distanza 65 dall' asse, e 109 a destra del pian verticale. Le parentesi *ab*, *bc*, *ac* mostrano, che una retta congiunge il punto 8 col 10, un' altra il punto 10 col 14, e una terza il punto 8 collo stesso punto 14. Praticate simili annotazioni per tutti i punti, potrà l' operatore abbandonare la veduta, di cui possiede già in silfatto registro una

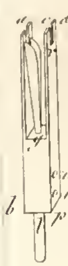


Fig. 2.

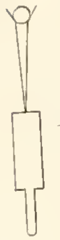


Fig. 3.

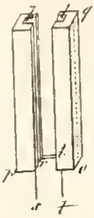
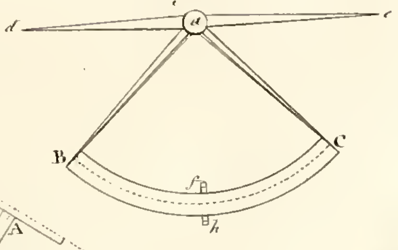


Fig. 4.

Fig. 6.



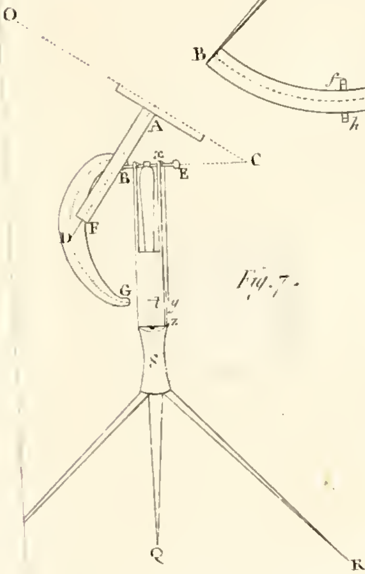

O
A
C
x
B
E
D
F
G
y
z
S
Q
R

Fig. 7.

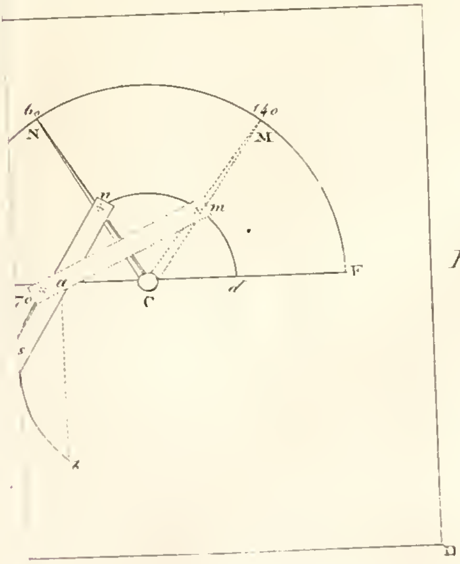

60
140
N
M
n
m
F
a
C
d
70
s
z
D

Fig. 8.

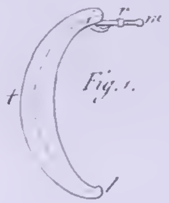


Fig. 1.

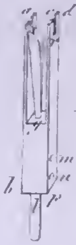


Fig. 2.

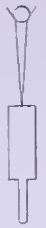


Fig. 3.

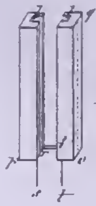


Fig. 4.

Fig. 5.

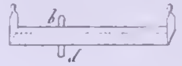
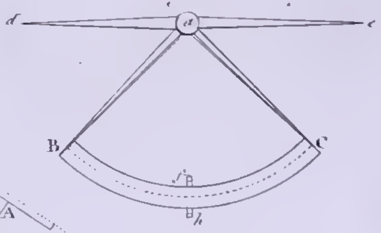


Fig. 6.



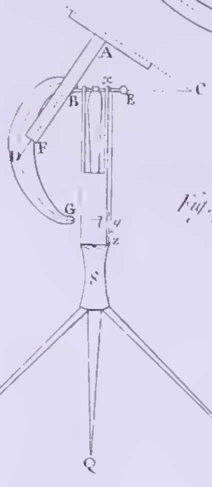

A
x
C
B
E
F
D
G
q
z
S
P
Q
R

Fig. 7.

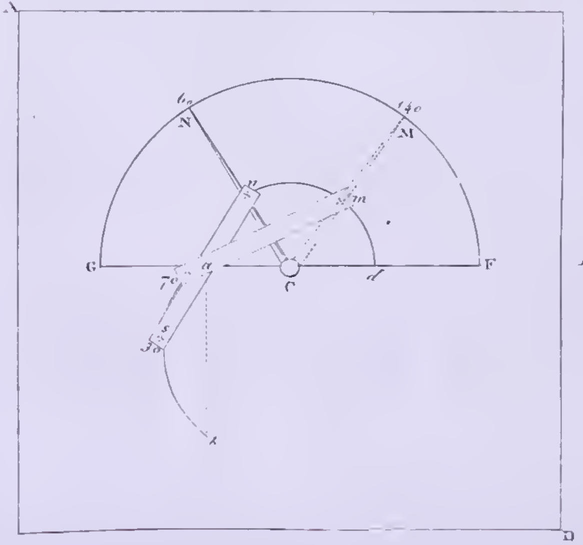
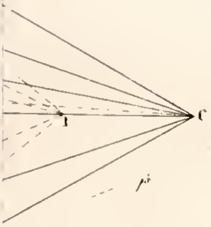

A
60
N
140
M
n
m
G
a
C
d
F
70
s
30
t
D

Fig. 8.

Fig. 9.



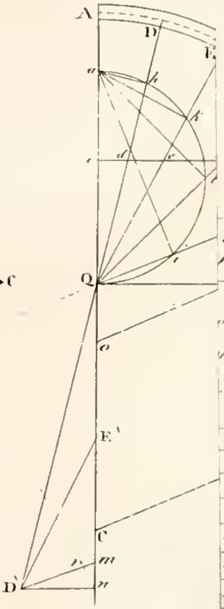
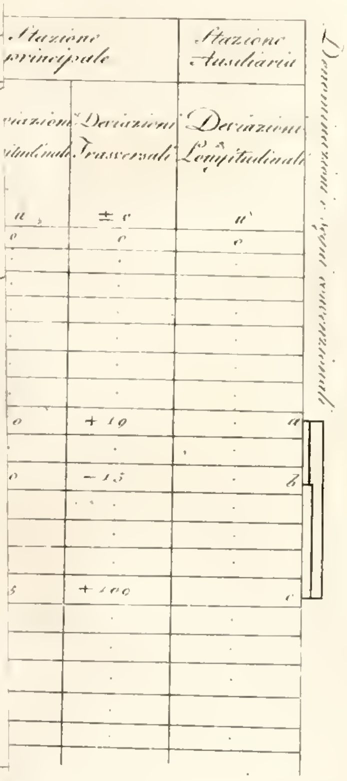

A
D
E
a
h
k
d
e
c
i
Q
o
E'
C
m
n
D'

Fig. 13.



Stazione principale		Stazione Ausiliaria	
...viazioni ...itudinali	Deviazioni Trasversali	Deviazioni Longitudinali	Denominazioni e segni convenzionali
u	± c	u'	
o	o	o	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
o	+ 19	.	a
.	.	.	
o	− 15	.	b
	.	.	
	.	.	
	.	.	
5	+ 100		c
	.	.	
	.	.	
	.	.	
	.	.	
	.	.	

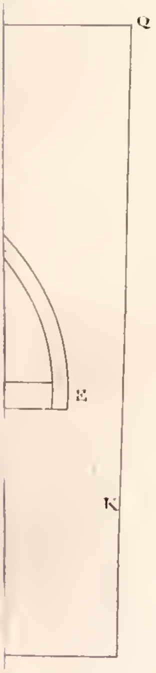


Fig. 11.

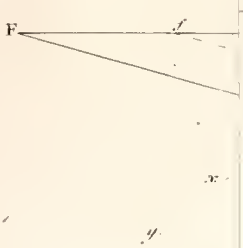


Fig. 9.

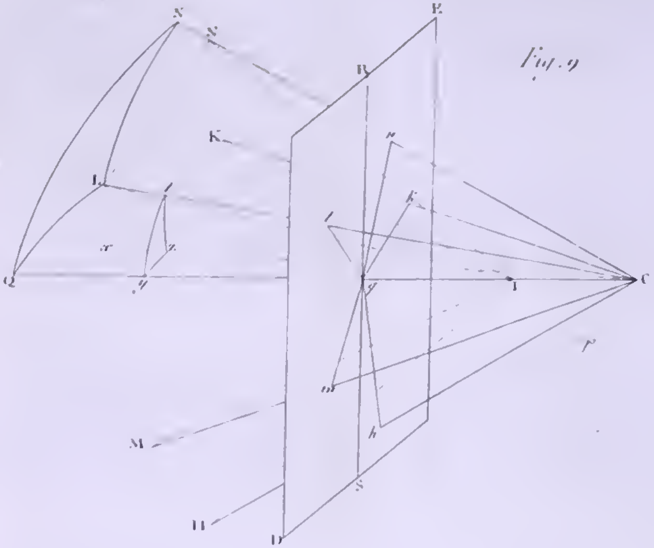

N
S
E
R
K
L
l
x
z
Q
y
n
k
i
q
I
C
r
m
h
M
S
H
D

Fig. 10.

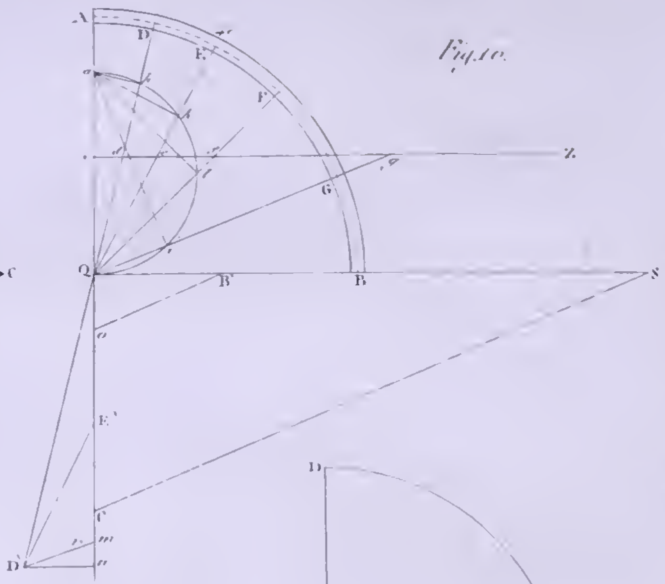
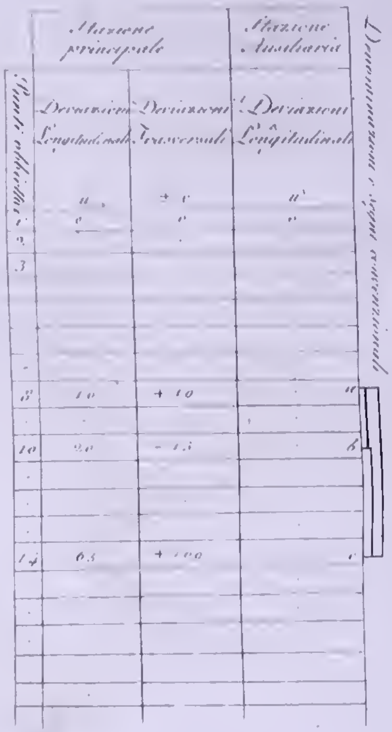

A
D
E
F
a
b
d
c
Z
g
G
Q
B'
B
S
o
E'
C'
m
n
D'

Fig. 13.



Punti obbiettivi	Stazione principale		Stazione Ausiliaria	Denominazioni e segni convenzionali
	Deviazioni Longitudinali	Deviazioni Trasversali	Deviazioni Longitudinali	
1	u	± v	u'	
2	v	v	v	
3				
8	10	+ 10		a
10	20	− 15		b
14	65	+ 100		c

Fig. 11.

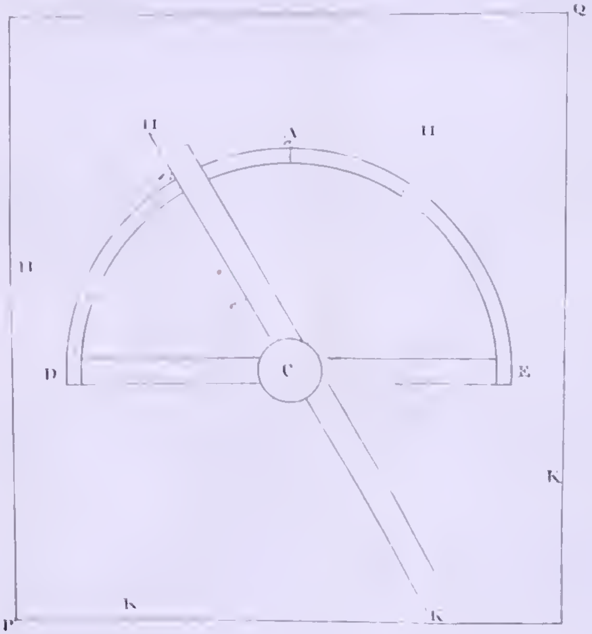
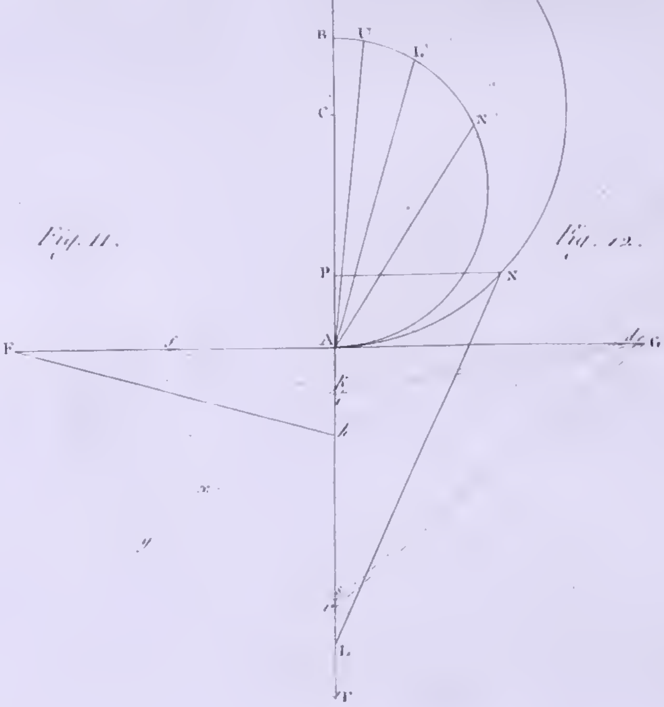

Q
H
A
H
H
D
C
E
K
P
K
K

Fig. 12.


B
U
L'
C
N'
P
N
F
f
A
d
G
E
h
x
y
L
F

SCOLIO

Alla Memoria Magistrini

Da inserirsi tra le pag. 70, 71 *del Tomo XVI, Parte I.*

Nelle applicazioni geodetiche precedenti abbiamo supposto 1.° che il punto di veduta ausiliario sia allo stesso livello col punto principale; 2.° che questi due punti siano nello stesso piano verticale, in cui trovasi l'asse principale dello strumento, cioè, l'asse del cono visuale della stazione principale; 3.° che non debbansi osservare altri oggetti fuorchè quelli, che sono compresi nel massimo cono visuale, che lo strumento può descrivere intorno ad un solo asse principale CQ (*Fig.* 9). Queste tre condizioni saranno bene spesso impraticabili, le prime due specialmente, essendo assai raro, che il luogo delle operazioni offra sul terreno una base orizzontale in quella direzione, e di quella grandezza conveniente che si richiederebbe. È dunque necessario di provvedere a questi casi, che non abbiamo di sopra contemplati, additando le opportune modificazioni sì dello strumento, come delle formole esposte.

I. La testa S del treppiede (*Fig.* 7) presenti all'albero *z*B una base fissa circolare graduata, e forata nel centro; il cui asse coincida coll'asse dell'albero, allorchè questo viene ad essa innestato e sovrapposto: inoltre l'albero possa rotare sopra la base intorno all'asse comune, senza oscillazioni ne' scuotimenti, e rotando misuri con uno stile sul lembo della base il proprio movimento. Questa base o disco normale all'albero dello strumento quando sia di una sufficiente ampiezza, servirà primieramente a sostenere due livelli a bolla d'aria, mediante i quali e col mezzo di due viti applicate al treppiede, atte ad inclinarlo lentamente per ogni verso, si potrà orizzontare lo strumento ossia renderne verticale l'asse dell'albero.

II. Sia ora l'osservatore in tali circostanze, che non possa scegliere una stazione ausiliaria allo stesso livello della principale, e sia costretto a prendere un nuovo punto di veduta o più elevato, o più depresso del principale, con questo vantaggio però che il nuovo punto sia nel piano verticale scelto nella prima stazione. Collo strumento collocato e orizzontato in una delle due stazioni traguardi l'altra: misuri l'angolo d'elevazione, o depressione dell' una rispetto all'altra, e la distanza diretta delle due stazioni medesime. In seguito medianti i movimenti subalterni longitudinale, e trasversale della diottra o cannocchiale venga traguardando gli oggetti già osservati nella prima stazione; avvertendo in questa nuova serie di osservazioni ausiliarie di registrare nello schizzo non solamente le nuove deviazioni longitudinali *u'* della diottra, ma ancora le trasversali in una quinta colonna, le quali non saranno in questo caso eguali a quelle della stazione principale, come lo erano allorchè le due stazioni trovavansi sullo stesso asse orizzontale.

III. Non possa in secondo luogo l'osservatore trasportare lo strumento in una stazione ausiliaria nè situata allo stesso livello colla principale nè situata nel piano verticale fondamentale prescelto in quella, ma sia costretto di prendere il secondo punto di veduta in un nuovo piano verticale parallelo al primo, e di orizzontare in questo il suo strumento. Nel movimento dell'albero aggiunto poc'anzi avrà, con che verificare il parallelismo di questo nuovo piano verticale con quello della prima stazione. Oltre a questa operazione misurerà l'osservatore la distanza delle due stazioni, e traguardando una collo strumento collocato nell'altra, noterà la particolare deviazione trasversale e longitudinale corrispondente. Dopo questa preparazione fermerà, come si conviene l'albero sulla sua base, in modo cioè, che l'asse ne resti verticale, e'l nuovo asse ottico orizzontale riesca parallelo al principale; indi procederà alla successiva osservazione ausiliaria degli oggetti, registrando i nuovi elementi rispettivi di situazione sullo schizzo a canto dei primi già segnati nella stazione primaria.

Sia l la distanza trovata dei due punti di veduta; siano U, V le deviazioni longitudinale, e trasversale della diottra diretta dall'uno all'altro punto di veduta; u, v come sopra le deviazioni per un dato oggetto qualunque mirato dalla stazion principale; u', v' le deviazioni dell'oggetto stesso mirato dalla stazione sussidiaria. La più semplice formola delle distanze d dal primario punto di veduta che convenga d'impiegare, è $d = \pm \frac{l\,\text{sen.}\,U\,\text{sen.}\,(v'-V)}{\text{sen.}\,u\,\text{sen.}\,(v-v')}$. Questa si troverà facilmente nei triangoli che risultano immaginando tirata la linea d, e dall'oggetto calate le normali ai due assi orizzontali delle due stazioni, e unite con una linea retta le estremità delle normali stesse. Tale sarà l'espressione generale delle distanze che si dovrà sostituire alla superiore, la quale non serve che nel caso di un asse unico orizzontale per entrambe le stazioni. Se $V = 0$ la formola diviene $d = \pm \frac{l\,\text{sen.}\,U\,\text{sen.}\,v'}{\text{sen.}\,u\,\text{sen.}\,(v-v')}$, e appartiene al caso del numero II precedente. Se $V = \frac{p}{2}$, cioè retto, saranno i due assi delle due stazioni non solamente orizzontali, e paralleli, ma altresì allo stesso livello; e la formola per questo caso sarà $d = \pm \frac{l\,\text{sen.}\,U\,\cos.\,v'}{\text{sen.}\,u\,\text{sen.}\,(v-v')}$. Per dedurre similmente una formola pel caso considerato a principio, cioè, dei due punti situati sullo stesso asse orizzontale, si dovrebbe porre $U = 0$; ma siccome sarebbe inoltre $v = v'$, la formola riescirebbe indeterminata, e bisognerebbe scambiarla in un'altra. Ma a questo caso essendo già stato provveduto di sopra, si può tralasciare siffatta permutazione. Dei due segni della formola poi si riterrà quello, che renderà ciascun valor particolare della distanza d positivo.

IV. Terminate le osservazioni di tutti gli oggetti compresi nella prima ampiezza visuale, di cui è suscettibile la doppia deviazione della diottra intorno a un dato asse fondamentale vogliansi riconoscere, e determinare anche gli altri oggetti d'intorno alla stazione primaria. Ritenendo in questa orizzontato e collocato lo strumento come qui innanzi; se ne giri poi l'albero sulla propria base d'un angolo α verso i nuovi oggetti. Verrà così il punto di veduta a descrivere un arco orizzontale di gradi α intorno all'asse dell'albero; e lo strumento prenderà un nuovo asse visuale inclinato col primitivo dell'angolo stesso α. Fermato l'albero si traguardino i nuovi oggetti e in un nuovo schizzo si registrino i nuovi elementi u, v, u', v'. Quindi si passi a tutte ripetere similmente le stesse operazioni nella stazione ausiliaria. Chiamando i la distanza del punto di veduta dello strumento dall'asse dell'albero, e D la distanza degli oggetti venuti in tal modo a portata dello strumento dal punto primitivo di veduta, quello, cioè, cui già si riferirono gli oggetti del primo cono visuale, si avrà D medianti le due formole

$$d = \pm \frac{l\,\text{sen.}\,\text{U}\,\text{sen.}(v' - \text{V})}{\text{sen.}\,u\,\text{sen.}(v - v')},$$

$$\text{D} = \sqrt{\Big\{ 4i^2\,\text{sen.}\frac{\alpha^2}{2} + d^2 - 4id\,\text{sen.}\frac{\alpha}{2}\Big(\text{sen.}\,u\,\text{sen.}\,v\,\cos.\frac{\alpha}{2} + \cos.\,u\,\text{sen.}}$$

V. Ha pertanto l'osservatore, che voglia far uso dello strumento proposto, il vantaggio di poter mettere in opra gli elementi geodetici, e determinare gli oggetti tutti, che son visibili d'intorno ad una stazione principale in una formola unica, e semplicissima $d = \pm \frac{l\,\text{sen.}\,\text{U}\,\text{sen.}(v' - \text{V})}{\text{sen.}\,u\,\text{sen.}(v - v')}$, qualunque sia la situazione rispettiva delle due stazioni principale, ed ausiliaria, purchè in entrambe fermi, e adatti lo strumento in due piani verticali e paralleli. La formola riesce inefficace, allorquando l'oggetto trovasi nel piano, che congiunge i due assi visuali orizzontali delle due stazioni, poichè in questo caso si ha $v' = \text{V}$, $v' = v$. Ma si osservi che colla formola precedente ha luogo del pari quest'altra

$$d = l\sqrt{\left\{ \frac{1 - [\,\text{sen.}\,u'\,\text{sen.}\,\text{U}\cos.(v' - \text{V}) + \cos.\,u'\cos.\,\text{U}\,]^2}{1 - [\,\text{sen.}\,u\,\text{sen.}\,u'\cos.(v - v') + \cos.\,u\,\cos.\,u'\,]^2} \right\}},$$ la quale diviene nel caso presente $d = \frac{\pm\, l\,\text{sen.}(u' - \text{U})}{\text{sen.}(u' - u)}$; e compie l'assunto di queste aggiunte.

specie di prospettiva simbolica da potersi realizzare, quando, e dovunque gli piacerà, nel modo descritto di sopra al numero 9. Nè dovrà egli ritornare sul luogo per la livellazione, e per la misura delle distanze degli oggetti osservati: ha del pari nel registro stesso, e nelle regole esposte al numero 10, e 11 quanto gli bisogna per tale intento: dovrà egli solamente modificare i trovati elementi a norma delle rettificazioni dello strumento, e delle correzioni della refrazione della luce, e della sfericità della terra, se le circostanze lo esigeranno.

SOPRA LE LINEE E LE SUPERFICIE PARALLELE

MEMORIA

Del Signor A. Bordoni.

Presentata li 14 Novembre 1811.

Dal Sig. Cav. Brunacci ed approvata dal Sig. Venturoli.

Leibnizio fu il primo a spiegare coll'ajuto del teorema del *Guldini*, che, la superficie compresa tra due curve parallele nello stesso piano, è sempre equivalente ad un rettangolo avente per base la parallela condotta a metà della distanza, e per altezza la distanza stessa. Dopo di lui li Signori *Kaestner*, *Cagnazzi*, ed il Professore *Lotteri* nel medesimo anno, cioè nel 1792 pubblicarono tre Memorie relative alle curve parallele sullo stesso piano, nelle quali insegnarono a trovare l'equazione della parallela ad una data, l'area compresa tra due linee parallele, e ciò fecero con principj diversi da quelli impiegati da *Leibnizio*, ed ottennero altri nuovi risultamenti.

Nella presente Memoria, oltre le dimostrazioni rigorose degli anzidetti risultamenti e di altri nuovi relativi pure alle linee nel medesimo piano, si troveranno delle proposizioni rispetto alle curve parallele a doppia curvatura, e tutte quelle proposizioni generali, che ho creduto le più importanti relativamente alle superficie parallele: proposizioni, se non m'inganno, che non furono sino ad ora conosciute.

Delle curve parallele situate nel medesimo piano.

Definizione. Una linea che abbraccia tutte le periferie, che hanno il medesimo raggio ed i centri sopra di una stessa linea

linea data, si dice parallela a questa data. Ecco la definizione di due linee parallele nello stesso piano data dal medesimo *Leibnizio*, e sulla quale io fonderò la prima proposizione della teorica delle curve parallele, che sono nel medesimo piano.

PROPOSIZIONE I.

Data l'equazione finita ($y=\phi x$) *di una curva, trovare quella della sua parallela.*

È dimostrato nella teoria delle soluzioni particolari (§. 282) (*) che, se $F(t, u, x)=0$ rappresenta l'equazione di una curva tra le sue coordinate t, u ed il parametro x, è dimostrato, dico, che fatto continuamente variare quel parametro, onde divenga x', x'', ec. le curve rappresentate dalle equazioni $F(t, u, x')=0$, $F(t, u, x'')=0$, ec. sono tutte abbracciate da un'altra, e l'equazione di quest'altra si ha, ponendo nell'equazione $F(t, u, x)=0$ in vece della x il suo valore, che si cava dalla $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=0$.

In conseguenza pertanto della data definizione delle curve parallele sullo stesso piano, se QEQ'F (*Fig.* 1) è una di quelle periferie, le quali hanno tutte un medesimo raggio n, ed il centro sulla curva data DD, e debbono essere abbracciate dalla parallela CC; e se indichiamo colle x, $y=\phi x$ le coordinate OP, PM del centro M; e colle t, u le coordinate OR, RQ del punto Q nella parallela CC e corrispondente ad M nella data, l'equazione della periferìa QEQ'F, cioè $(t-x)^2+(u-\phi x)^2-n^2=0$; ci darà quella della parallela, quando vi si porrà in vece della x, quel valore che per x ci darà l'equazione differenziale $t-x+(u-\phi x)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0$.

(*) Le citazioni dei §§. si riferiscono al trattato del calcolo sublime del Prof. *Brunacci*.

Corollario 1. Cavando i valori delle coordinate t, u dalle due equazioni

$$(t-x)^2+(u-\varphi)^2-n^2=0,\quad t-x+(u-\varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0,$$

ossia dalle equivalenti

$$(t-x)^2+(u-y)^2-n^2=0,\quad t-x+(u-y)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0,$$

si ottiene

$$t=x-n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)},\ \text{ed}\ u=y+n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)},$$

i quali differenziati danno $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)=1-n\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^3}$, e $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left\{1-n\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^3}\right\}$; cioè $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, ossia $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$; ovvero $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$. Vale a dire la tangente QT della linea CC è parallela alla tangente Mt della linea DD; ossia le tangenti condotte pei punti corrispondenti delle curve data e parallela sono esse pure parallele.

Corollario 2. Ponendo nell'equazione $s=y+x:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-r:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ (§. 78) della normale MN alla curva DD in luogo delle coordinate r, s della stessa normale, i valori delle t, u trovati qui sopra, si ha

$$y+n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}=y+x:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-x:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)},$$

ossia $0=0$; cioè i valori delle coordinate t, u del punto Q soddisfanno all'equazione $s=y+x:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-r:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ della normale suddetta; e perciò il punto Q sarà un punto del prolungamento della normale stessa NM, e la MQ una parte del medesimo prolungamento. Pertanto la retta MQ, essendo parte del prolungamento della normale NM, sarà perpendicolare alla tangente Mt, ed anche, pel Corollario antecedente, alla tangente QT della curva parallela CC; cioè a dire, la retta MQ sarà perpendicolare tanto alla tangente Mt, quanto alla QT.

Di più la stessa retta MQ, essendo eguale a $\sqrt{\left((t-x)^2+(u-y)^2\right)}$, sarà pure, a motivo di $(t-x)^2+(u-y)^2-n^2=0$, eguale evidentemente alla n; vale a dire, le normali delle due linee parallele condotte ai punti a cui corrispondono le coordinate x, y, e t, u hanno la stessa posizione, ossia coincidono, e differiscono costantemente dalla quantità n: quindi due linee parallele esistenti sul medesimo piano, avendo le normali comuni, avranno comune anche la sviluppata ordinaria, cioè la sviluppata piana.

Corollario 3. Il doppio segno che può precedere il radicale $\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$ contenuto nelle espressioni delle t, u trovate nel Corollario primo, significa, che ad ogni valore delle coordinate x, y della data, corrispondono due di quelle della parallela; cioè che ciascun ramo DD della linea data, avrà alla medesima distanza $n=\text{MQ}=\text{MQ}'$ due archi CC, CC′ paralleli uno da una parte e l'altro dall'altra di esso.

Corollario 4. Se si porranno nei valori delle coordinate t, u i valori delle quantità y, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ dati in x e cavati dall' equazione $y=\phi x$ della linea data, e si daranno alla x diversi valori particolari, si otterranno i corrispondenti delle coordinate t, u della parallela, coi quali si potrà essa descrivere per punti.

Corollario 5. Se si daranno dei successivi valori alla quantità n, che entra come parametro anche nell'equazione della parallela, ossia se essa si farà variare, non varierà sempre la specie o natura delle successive linee rappresentate dalle equazioni risultanti; e ciò pel principio su cui è fondata la divisione delle diverse specie delle curve del medesimo ordine: ma le linee rappresentate da queste successive equazioni, essendo parallele alla data, sono parallele tra di loro; adunque non è escluso il parallelismo alle curve della medesima specie. Ciò che prova l'insussistenza del teorema. „ Nessuna curva, trattone la periferìa, ha per parallela un' „ altra curva della medesima specie „ stabilito da un celebre Analista, e commendato da altri.

Osservazione I. Quantunque non sia escluso il parallelismo tra le curve della medesima specie, come si è dimostrato nell'ultimo Corollario, nulladimeno, non tutte le curve possono avere delle parallele della specie alla quale appartengono anch'esse; come se ne vedrà un esempio alla fine di questa osservazione.

Per iscoprire se una data linea possa avere una o più parallele della sua specie, o in generale di una data specie, il metodo diretto sarebbe di tentare la riduzione dell'equazione della parallela a quella della specie data; ma siccome questo metodo, che in sostanza riducesi evidentemente a scoprire, se la parallela abbia la proprietà della data, espressa algebraicamente dalla sua equazione, dà dei risultamenti generalmente complicati; così nei casi particolari sarà meglio scoprire coll'equazione stessa della data, qualche altra più semplice proprietà parimente ad essa caratteristica, ed indi osservare, se questa avrà luogo anche in una o più linee sue parallele.

Esempio. Si dimanda se la parabola espressa dall'equazione $y^2 - ax - b = 0$, abbia una o più parallele, che sieno anch'esse parabole della medesima specie, cioè apolloniane.

Dall'equazione data $y^2 - ax - b = 0$, si cava $y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{a}{2}$, cioè la sottonormale costante: proprietà caratteristica delle parabole di questa specie. Adunque se la parabola potrà avere una o più parallele della sua specie, dovrà essere costante per uno o più valori della n la sottonormale $u\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, ossia $u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$; ma sostituendo nella espressione $u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$

in vece delle u, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$ i loro valori trovati nel Corollario primo, si ha $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left\{y+n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}\right\}$; e di nuovo sostituendo in quest'ultima in luogo delle y, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ i loro valori $\sqrt{(ax+b)}$, $a:2\sqrt{(ax+b)}$, che dà l'equazione $y^2-ax-b=0$, si ottiene $\frac{a}{2}+an:2\sqrt{\left(ax+b+\frac{a^2}{4}\right)}$ per espressione della sottonormale di qualunque linea parallela alla parabola apolloniana; e questa espressione, qualunque valore abbia la n, ossia qualunque sia la linea parallela, varia, variando la x; quindi la parabola apolloniana non può avere un'altra parabola della sua specie ad essa parallela; cioè non vi possono essere due parabole apolloniane tra di loro parallele.

OSSERVAZIONE 2. Volendo disporre i valori delle coordinate t, u per fissare i successivi punti di una delle due parallele allo stesso ramo della data, bisognerà prima di tutto osservare, per un valore particolare della x, quali saranno i segni che si dovranno dare ai termini $n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$, $n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$ per ciascuna di quelle parallele; affinchè i valori delle t, u corrispondenti ai successivi della x sieno le successive coordinate di una delle due parallele, e non l'ascissa di una e l'ordinata dell'altra. Fatto questo, si terranno quei segni stabiliti sino ai punti corrispondenti a $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{1}{0}$, dopo i quali converrà ripetere la stessa osservazione, od avere tutti quei riguardi relativamente ai segni, che si hanno in casi simili, quando si vogliano trovare le tangenti trigonometriche degli angoli formati dalle tangenti di una curva coll'asse delle ascisse.

PROPOSIZIONE II.

Trovare l'equazione differenziale delle linee parallele alle date espresse dall'equazione differenziale $\varphi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)=0$.

Ritenendo le medesime indicazioni delle coordinate stabilite nella proposizione antecedente, avrassi dal Corollario primo della medesima proposizione $y=u-n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$, ed $x=t+n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$; di più atteso il parallelismo, dovranno le tangenti corrispondenti ai punti a cui competono le coordinate x, y, e t, u essere parallele tra di loro, cioè $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, come abbiamo dimostrato nello stesso Corollario; vale a dire, sussisteranno tra le coordinate delle due linee parallele le quattro equazioni $y=u-n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$, $x=t+n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, $\varphi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)=0$. Ora ponendo nell'ultima di queste quattro equazioni in luogo delle quantità $x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ i loro valori cavati dalle prime tre, si ha la sola

$$\varphi\left\{t+n\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}, u-n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}, \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\}=0$$

la quale rappresenterà l'equazione differenziale delle linee parallele a tutte quelle rappresentate dalla data $\varphi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)=0$, cioè a dire l'equazione cercata.

Integrando l'equazione differenziale ottenuta, si avrà l'equazione finita di tutte le linee parallele, e questa conterrà una costante arbitraria introdotta dalla integrazione, la quale si potrà trovare opportunamente, acciò l'equazione integrale ottenuta rappresenti la parallela ad una tale delle curve date. Se si tratterà però di trovare l'equazione della linea parallela a quella rappresentata dalla soluzione particolare della data $\phi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) = 0$, allora si potrà risparmiare la suddetta integrazione, trovando, o la soluzione particolare dell'equazione $\phi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) = 0$, ed indi colla proposizione antecedente quella della parallela; ovvero si potrà immediatamente trovare la soluzione particolare dell'equazione generale a tutte le linee parallele, cioè della differenziale

$$\phi\left\{t + n\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}, u - n : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}, \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\} = 0;$$

giacchè questa rappresenterà appunto l'equazione cercata; come facilmente si può dimostrare.

DEFINIZIONE. Gli archi di due linee parallele compresi tra le stesse normali si diranno tra di loro corrispondenti: così HQ (*Fig.* 2) si dirà corrispondente dell'arco LM, e reciprocamente LM di HQ.

PROPOSIZIONE III.

Data l'equazione di un arco, trovare l'espressione del suo corrispondente; cioè data l'equazione ($y = \phi x$) *dell'arco* LM, *trovare l'espressione dell'arco* HQ.

Indicando colla S l'arco cercato HQ, e colla s l'arco LM di cui si conosce l'equazione, e colle t, u, ed x, y le loro coordinate, come nella Proposizione I, si avrà, per le applicazioni del calcolo differenziale alla rettificazione delle curve (§. 81), $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$: e ponendo nella seconda di queste espressioni per $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ il suo valore $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$ trovato nel Corollario primo della proposizione I, si avrà $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2=\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2$, ossia $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2$; cioè estraendo la radice quadrata, e sostituendo per $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$ il suo valore trovato nel Corollario stesso, avrassi $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)-n\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$. Quindi integrando, si otterrà l'espressione cercata dell'arco corrispondente, cioè $S=s-n\,.\,Ang.\ \text{tang.}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\text{cost.}$

Volendo ora trovare la costante introdotta dalla integrazione, indichiamo colla a la tangente trigonometrica dell'angolo LTx, fatto dalla tangente LT condotta alla prima estremità L dell'arco s coll'asse delle ascisse, ed avremo, pei dati della questione $S=0$, $s=0$, e $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=a$, i quali valori danno $\text{cost.}=n\,.\,Ang.\ \text{tang.}\,a$; cioè l'arco cercato S sarà eguale ad $s+n\left(Ang.\ \text{tang.}\,a-Ang.\ \text{tang.}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)$, ossia

$S=s+n\,.\,Ang.\ \text{tang.}\,\frac{a-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{1+a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$. Da quest'ultima espressione ne risulta, che l'arco corrispondente S condotto dalla parte convessa del dato, è sempre equivalente all'arco s, che si conosce, perchè si conosce la sua equazione $y=\phi x$, più un arco circolare descritto col raggio eguale alla $n=MQ$ distanza degli archi paralleli, e corrispondente all'angolo formato dalle due normali HL, MQ condotte alle estremità degli archi S, s. Quest'angolo, ossia arco descritto con un raggio eguale alla unità, e corrispondente ad un angolo eguale a quello formato dalle due normali estreme degli archi paralleli, lo indicaremo sempre colla A.

Corollario 1. Indicando colla S_1 l'arco corrispondente allo stesso dato s, ma condotto dalla sua parte concava, si avrà $s=S_1+nA$, ossia $S_1=s-nA$.

Corollario 2. Se due archi s, s' saranno lunghi egualmente, e di più le normali condotte alle estremità di uno formeranno un angolo eguale a quello formato dalle due normali condotte alle estremità dell'altro, gli archi S, S' egualmente distanti da essi e loro corrispondenti dalla stessa parte, cioè ambedue dalla parte convessa, od ambedue dalla concava, saranno anch'essi tra di loro eguali. In fatti, indicando colla n la distanza tanto dei due paralleli S, s, quanto degli altri S', s', e colla A l'angolo formato dalle normali condotte alle loro estremità, si avrà, per le formole esposte qui sopra, $S = s \pm n \,.\, A$, ed $S' = s' \pm n \,.\, A$; cioè sarà $S = S'$, essendo per supposizione $s = s'$. Da questo ne risulta, che tutte le ovali isoperimetre, avranno linee corrispondenti pure isoperimetre tra di loro; di più queste linee corrispondenti, le quali saranno generalmente altre ovali, equivaleranno al contorno di una delle date, più o meno una periferìa descritta con un raggio eguale alla distanza di esse dalle date; come risulta dall'equazione $S = s \pm n \,.\, \text{Ang.}\, 360^\circ = s \pm 2\pi n$, π indicando la metà della periferìa, che ha per raggio la unità.

Corollario 3. Chiamando M l'arco ab parallelo ai due $LM = s$, $HQ = S$ ed equidistante da essi, si avrà $M = s + \frac{n}{2} A$, ed $S = M + \frac{n}{2} A$, ossia $M = S - \frac{n}{2} A$; e perciò $2M = s + S$, ovvero $M = \frac{s+S}{2}$; cioè a dire l'arco M parallelo ai due S, s ed equidistante da essi, equivale alla metà della loro somma.

Corollario 4. In ultimo risulta dall'equazione $S = s + nA$, che, conoscendo tre delle quattro quantità S, s, n, A, si potrà trovare, colla stessa equazione la quarta. Così, se si volesse trovare l'equazione di un arco eguale in lunghezza ad una data retta o linea qualunque b, supposto questo il corrispondente dalla parte convessa del dato s di una linea di cui si conosce l'equazione, avrebbesi $b = s + nA$, la quale equazione dà immediatamente $n = \frac{b-s}{A}$. Ora conoscendo la distanza tra l'arco eguale alla linea b, ed il dato s di cui si conosce la equazione, facilmente colle cose esposte nella prima proposizione, si troverebbe l'equazione del corrispondente eguale in lunghezza alla linea b.

OSSERVAZIONE. Se anche la linea data avesse dei flessi, avrebbesi sempre $S = s \pm nA$, avendo riguardo alla grandezza ed al segno dell'angolo A: così nella Lemniscata di *Giacomo Bernulli* si avrà per l'intera curva $S = s$, perchè $A = 0$. Ma se la linea data avrà dei regressi, allora o converrà modificare l'espressione esposta dell'arco S, o meglio considerare ciascun ramo della curva data separatamente. Ciò dicasi anche per la proposizione seguente.

PROPOSIZIONE IV.

Trovare l'espressione dell'area compresa tra due linee parallele corrispondenti e le loro normali estreme, essendo data l'equazione di una di esse; cioè trovare l'area LMQH *compresa tra gli archi* $LM = s$, $HQ = S$, *e le normali estreme* HL, MQ, *conoscendosi l'equazione della* LM.

Pongasi RPMQ, ossia $\frac{n}{2}(u+y)\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)} = P$,

BPML, ovvero (§. 90) $\int y \partial x = \phi x$,

HARQ, ossia (§. 90) $\int u \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) \partial x = \psi x$,

HLMQ $= fx$, ed ABLH $= Q$, e differenziando,

si avrà $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{n}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\}\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)} + \frac{n}{2}(u+y)\left\{\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)} - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3}\right\}$,

$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = y$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = u\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, e $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$ essendo la quantità Q indipendente dalla x, ossia costante relativamente a questa variabile. Ponendo ora in queste espressioni in vece delle quantità u, $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ i loro valori trovati nel Corollario primo della Proposizione I, si otterrà

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = n\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)} + ny\,\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3} - n^2\,\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2} + n^2\,\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^4},$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = y - ny\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3} + \frac{n}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)} - n^2\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^4},\ \text{e}\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = y,\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0,$$

come sopra.

Ora dall'ispezione della figura si comprende essere identica l'equazione $fx = \psi x + P - \phi x - Q$, la quale differenziata per rapporto alla variabile x dà $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$; e sostituendo in questa equazione i valori delle quantità $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$ trovati sopra, e riducendo, si ottiene l'equazione $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = n\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) - \frac{n^2}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$, la quale integrata dà l'area $fx = ns - \frac{n^2}{2}\,Ang.\ \text{tang.}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \text{cost.}$ Ma fatto $x = OB$ si ha pei dati della proposizione, $fx = 0$, ed $s = 0$; adunque cost. $= \frac{n^2}{2}\,Ang.\ \text{tang.}\ a$; e quindi l'area fx, ossia

$$HLMQ = ns + \frac{n^2}{2}\left(Ang.\,\text{tang.}\,a - Ang.\,\text{tang.}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) = ns + \frac{n^2}{2}\ A.$$

Vale a dire, l'area cercata HLMQ equivale ad un rettangolo avente l'arco $s = LM$ per base, e la distanza $n = MQ$ delle due linee parallele per altezza; più la superficie di un settore circolare avente per raggio la medesima distanza n, e corrispondente ad un angolo eguale a quello formato dalle normali condotte alle estremità degli archi corrispondenti S, s.

Corollario 1. Indicando colla f_1x l'area compresa tra la linea data s, e la sua corrispondente S_1 dalla parte concava, si avrà $f_1 x = nS_1 + \frac{n^2}{2} A$; ovvero ponendo per S_1 il suo valore $s - nA$ trovato nel Corollario primo della proposizione antecedente, sarà $f_1 x = ns - \frac{n^2}{2} A$. Cioè l'area compresa tra l'arco s ed un suo corrispondente dalla parte concava equivale ad un rettangolo ec. ec.

Corollario 2. Se la linea data fosse un ovale, e che si cercasse la superficie della intera corona esterna, avrebbesi $fx = ns + \frac{n^2}{2}\, Ang.\, 360^\circ = ns + \pi n^2$; cioè la corona esterna equivale ad un rettangolo avente per base il perimetro dell' ovale data, e per altezza la distanza della parallela dalla medesima; più la superficie di un cerchio descritto colla distanza stessa, o larghezza della corona: come trovò *Fontana Gregorio* con ragionamenti geometrici. Se la f indicasse l'area compresa tra una curva di m giri, e la sua corrispondente dalla parte convessa, sarebbe $f = ns + m\,.\pi n^2$.

Corollario 3. Moltiplicando per n ciascun membro dell' equazione $M = s + \frac{n}{2} A$, esposta nel Corollario terzo della proposizione antecedente, si ha $Mn = ns + \frac{n^2}{2} A$; cioè $Mn = fx = HLMQ$. Vale a dire l'area HLMQ compresa tra le due linee parallele HQ, LM sullo stesso piano è eguale alla distanza $n = MQ$ moltiplicata per la linea parallela corrispondente $M = ab$ ed equidistante da esse; ossia equivale ad un rettangolo avente per base la parallela condotta a metà distanza, e per altezza la stessa distanza: risultamento che forma il teorema di *Leibnizio* accennato al principio di questa Memoria.

Corollario 4. Essendo $M = \frac{S+s}{2}$, come abbiamo veduto nel Corollario terzo della proposizione antecedente, si avrà ancora $3M = 2M + \frac{S+s}{2}$, ossia $Mn = \frac{n}{3}\left(2M + \frac{S+s}{2}\right)$, moltiplicando ambedue i membri per $\frac{n}{3}$; ma, pel Corollario antecedente, Mn è eguale all'area compresa tra i due archi S, s; adunque l'area compresa tra due linee parallele è anche eguale ad un terzo della loro distanza, moltiplicata per la metà della somma delle due linee corrispondenti insieme col doppio della parallela condotta a metà distanza. Risultamento che ha tutta l'analogìa coll'utilissimo ed elegantissimo teorema di *Torricelli* esposto dal *Torelli* nelle aggiunte che egli fece alle sezioni coniche di *Guido Grandi*, ed ultimamente riprodotto dal Sig. *Rossi* in una sua elegantissima Memoria.

COROLLARIO 5. Se le normali estreme di due archi s, s' equivalenti formeranno angoli eguali, le aree comprese tra di essi ed i loro corrispondenti S, S' dalla stessa parte ed egualmente distanti, saranno anch'esse equivalenti. In fatti, i valori di queste aree verranno date dalle espressioni $ns + \frac{n^2}{2}A$, $ns' + \frac{n^2}{2}A$, le quali sono eguali tra di loro, giacchè $s = s'$. Quindi nelle ovali isoperimetre, e generalmente parlando in tutte le curve rientranti isoperimetre, le corone che avranno la medesima larghezza, e che saranno dalla stessa parte delle ovali o curve date, cioè dalla parte esteriore o dalla interiore, saranno equivalenti: teorema utilissimo per gli Architetti.

COROLLARIO 6. Finalmente coll'equazione $f = ns + \frac{n^2}{2}A$ si potrà trovare una delle quattro quantità f, n, s, A conoscendo le altre tre: di più combinando le due equazioni $f = ns + \frac{n^2}{2}A$, $S = s + nA$ si potranno delle cinque quantità f, S, s, n, A determinar due atte a soddisfarle, date essendo le altre tre. Per esempio. Se fosse data la lunghezza dell'arco s, l'angolo A formato dalle due normali condotte alle sue estremità, e si cercasse la distanza e l'equazione di un altro arco suo corrispondente dalla parte convessa, il quale dovesse chiudere col dato s e le due normali estreme un'area equivalente alla superficie data a, l'equazione $f = ns + \frac{n^2}{2}A$ ci darebbe immediatamente $n = \frac{-s \pm \sqrt{(s^2 + 2aA)}}{A}$; cioè $n = \frac{-s + \sqrt{(s^2 + 2aA)}}{A}$, perchè l'altro valore non ha in questo caso nessuno significato. Quindi conoscendosi l'equazione dell'arco s, si avrà quella del parallelo cercato, facendo nella Proposizione I^a $n = \frac{-s + \sqrt{(s^2 + 2aA)}}{A}$.

Delle curve parallele a doppia curvatura.

DEFINIZIONE. Due linee a doppia curvatura si diranno parallele, quando saranno eguali tra di loro le rette tirate da tutti i punti di una perpendicolarmente all'altra, e di più parallele tra di loro le due tangenti di esse condotte alle estremità di ciascuna di queste rette. Questa definizione delle linee parallele a doppia curvatura, vale anche per quelle esistenti nel medesimo piano; anzi per queste ultime, si potrà ommettere la seconda parte, essendo essa, per le linee parallele esistenti nello stesso piano, una conseguenza della prima.

Potrei qui esporre e dimostrare relativamente alle curve a doppia curvatura delle proposizioni simili a quelle esposte e dimostrate per le linee parallele sul medesimo piano, e di più aggiungerne molte altre particolari alla doppia curvatura; ma ne esporrò solamente alcune, le quali oltre di essere le più importanti, saranno utili anche per dimostrarne delle altre nella teorica delle superficie parallele.

PROPOSIZIONE V.

Due linee qualunque parallele tra di loro esistono sempre su di una stessa superficie sviluppabile; cioè sopra di una di quelle superficie, le quali supposte flessibili ed inestendibili, si possono svolgere con una semplice flessione in modo di poterle distendere interamente, senza nessuna piegatura nè rottura, sopra di un medesimo piano.

Abbassando da tutti i punti di una delle due linee parallele delle rette perpendicolari all'altra, queste rette risulteranno anche perpendicolari alla prima, essendo parallele le tangenti condotte alle loro estremità (definizione esposta); cioè le rette così condotte, saranno normali all'una ed all'altra, ossia normali comuni alle due linee a doppia curvatura parallele. Di più, per lo stesso parallelismo delle tangenti, tutte queste normali comuni, prolungate sufficientemente, s'incontreranno a due a due; cioè la prima incontrerà la seconda, la seconda la terza, questa la quarta, ec., per essere a due a due sul medesimo piano delle corrispondenti tangenti parallele: dimodochè esse formeranno colle loro successive intersezioni una linea, generalmente a doppia curvatura, la quale avrà per tangenti le normali stesse, ed in conseguenza essa sarà una sviluppata tanto di una quanto dell'altra; ossia sarà dessa la sviluppata comune delle due linee parallele.

Ora ella è una proprietà definitiva delle superficie sviluppabili, che esse si possono generare da una retta, la quale movendosi nello spazio, si conserva costantemente tangente ad una data curva (*Monge* feuille 19); e della quale superficie la curva alla quale mantiensi costantemente tangente la retta generatrice è lo spigolo di regresso, e le sue tangenti le così dette caratteristiche della stessa superficie sviluppabile. Pertanto, se una retta si moverà mantenendosi costantemente tangente alla comune sviluppata delle due curve parallele, essa genererà una superficie sviluppabile, la quale avrà per ispigolo di regresso la stessa comune sviluppata, e per rette caratteristiche le tangenti della medesima sviluppata; ma tutte le rette caratteristiche della superficie sviluppabile, ossia le tangenti della comune sviluppata, passano per le due curve parallele, giacchè sono tutte normali ad ambedue queste curve; adunque ancora la superficie sviluppabile passerà per ambedue le curve parallele; e perciò le due curve saranno sopra, o meglio saranno nella superficie sviluppabile stessa. Vale a dire, due linee qualunque parallele tra di loro sono sempre sulla stessa superficie sviluppabile, che ha per ispigolo di regresso la loro comune sviluppata, e per caratteristiche le rette normali comuni alle medesime due linee parallele, ossia tangenti alla stessa comune sviluppata.

Proposizione VI.

Date le due equazioni ($y = fx$, $z = \varphi x$) *di una linea qualunque, trovare l'arco corrispondente di una sua parallela.*

Immaginando interamente sviluppata, ossia distesa sul medesimo piano qOp (*Fig.* 3) la superficie sviluppabile sulla quale vi sono le due linee parallele (prop. ant.), ed indicando colla DD condotta sullo stesso piano qOp, quella nella quale si sarà cambiata, dopo l'immaginato sviluppo, la linea a doppia curvatura rappresentata nello spazio dalle equazioni $y = fx$, $z = \varphi x$, e colla linea CC quella nella quale si sarà cambiata la sua parallela, saranno evidentemente queste due linee piane anch'esse parallele tra di loro; di più avranno una distanza MQ eguale a quella delle due parallele a doppia curvatura, e per comune sviluppata la linea piana IXH rappresentante la linea nella quale si sarà cambiata la comune sviluppata delle due linee a doppia curvatura, ossia lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile.

Ora

Ora riferendo le due linee DD, CC agli assi ortogonali Oq, Op, cioè alla normale comune Oq, che passa per le prime estremità D, C delle due lineé parallele, ed alla Op parallela alle tangenti DN, CL condotte alle stesse estremità (si terranno sempre questi assi), ed indicando colla p l'ascissa OP, colla q l'ordinata PM, colla s l'arco MD, colla S l'arco corrispondente CQ, colla n la distanza MQ, e finalmente indicando colla A, al solito, l'angolo DVM formato dalle due normali DV, MV condotte alle estremità D, M dell' arco s, avrassi colla Proposizione III $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)+n\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)$, ossia $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ prendendo la x per variabile principale, od anche $S=s+nA$; cioè si conoscerà sempre l'arco corrispondente S, quando si conosceranno le quantità s, ed A. Vediamo pertanto, come si possono trovare queste due quantità coll'ajuto delle due equazioni $y=fx$, $z=\varphi x$, le quali per ipotesi sono date.

Supponendo il punto M della linea piana DD quello al quale corrispondevano nello spazio le coordinate x, y, z, sarà l'arco s eguale anzi il medesimo arco della linea a doppia curvatura avente per equazioni $y=fx$, $z=\varphi x$, e corrispondente alle coordinate x,y,z; cioè sarà $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}$, e perciò s eguale all'integrale $\int\partial x\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}$ preso tra i limiti, che si prescriveranno. Similmente, essendo in questo caso, per la particolare disposizione degli assi delle coordinate p, e q, l'angolo A eguale all'angolo MTp che fa la tangente MT coll'asse delle ascisse, sarà $A = Ang.\ tang.\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)$; ossia differenziando $\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)=\frac{\left(\frac{\partial^2 q}{\partial p^2}\right)}{1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2}$; ma indicando colla R il raggio osculatore MX della linea piana DD, si sa, che R è eguale ad $\frac{\left(1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\partial^2 q}{\partial p^2}\right)}$; e perciò $\frac{\left(\frac{\partial^2 q}{\partial p^2}\right)}{1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2}=\frac{\left(1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2\right)}{R}$; adunque $\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)=\frac{\left(1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{R}=\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)}{R}$; ovvero supponendo x la variabile principale, sarà $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)=\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}{R}$. Vale a dire si conoscerà $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$, quando si conoscerà la quantità R.

Il punto M rappresentando sul piano qOp la nuova posizione di quel punto a cui corrispondevano nello spazio le coordinate x, y, z, e la sviluppata IXH rappresentando la linea nella quale si è cambiata la comune sviluppata delle due linee a doppia curvatura, il punto X di contatto della stessa IXH colla normale ME rappresenterà la posizione che avrà preso il punto di contatto della comune sviluppata delle due linee parallele a doppia curvatura colla normale comune, che passa pel punto corrispondente alle coordinate x, y, z; e perciò il raggio osculatore $MX = R$ della linea piana DD sarà eguale al raggio della linea espressa dalle equazioni $y=fx$, $z=\varphi x$, il quale è anche tangente alla sviluppata comune delle parallele. Ma *Monge* c' insegna, nel decimo volume delle Memorie presentate alla Reale Accademia delle scienze di Parigi, come si possono trovare i raggi di una curva, tangenti ad una tale sviluppata, quando sieno date della curva stessa le equazioni e le coordinate di un punto per cui dee passare una sua normale tangente a quella tale sviluppata; adunque conosceremo la R, giacchè sono date le equazioni $y=fx$, $z=\varphi x$ di una delle due linee parallele a doppia curvatura, e le coordinate di un punto, per lo meno, per cui deve passare l'altra, ossia le coordinate di un punto di una normale della curva data; e con ciò conosceremo tanto il numeratore $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}$, quanto il denominatore R del valore di $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$; quindi conosceremo ancora lo stesso angolo A, poichè esso sarà eguale all'integrale $\int\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}}{R}\partial x$, presa tra i medesimi limiti, tra i quali si prenderà l'altro $\int\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}\partial x$ per avere l'arco s.

Altro modo per avere l'angolo A, *od almeno una sua derivata prima.*

Essendo le normali comuni alle due linee parallele tangenti nel medesimo tempo alla comune loro sviluppata, gli angoli formati dalle stesse successive normali saranno i medesimi angoli formati dalle successive tangenti di questa sviluppata; e perciò la ricerca dell'angolo A è ridotta a quella dell'angolo generato da una tangente della comune sviluppata, la quale scorra lungo la medesima curva, senza cessare mai di essere sua tangente: ma l'angolo che genera questa tangente è eguale a quello che genererebbe una retta, la quale variasse di posizione nello spazio, senza cessare di passare per l'origine delle coordinate e di mantenersi parallela alla medesima tangente; e questa retta genererebbe evidentemente una superficie Conica, la quale avrebbe il vertice all'origine; adunque l'espressione dell'angolo A, sarà la stessa di quella della intersezione della suddetta superficie Conica con una superficie sferica avente il centro all'origine, e per raggio quello delle tavole trigonometriche. Passiamo pertanto a determinare l'espressione di questa intersezione.

Chiamate x, y, z le coordinate di un punto della comune sviluppata, o in generale di una linea qualunque, e p, q, r quelle di un punto di una retta, che passa per l'origine parallelamente alla tangente della stessa sviluppata condotta al punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z, si avranno le equazioni $q = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)p$, $r = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)p$, le quali rappresenteranno la retta parallela alla tangente, se si considererà in esse la x come determinata, e rappresenteranno la superficie Conica di cui abbiamo parlato, se si considererà la stessa x come quantità da eliminarsi. Adunque le equazioni della intersezione della superficie Conica e della sfera, che ha il centro all' origine delle coordinate e per raggio l' unità trigonometrica, saranno $q = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)p$, $r = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)p$, $p^2 + q^2 + r^2 - 1 = 0$ (indicando p, q, r adesso le coordinate ortogonali della intersezione stessa); ovvero

$$p = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)} = 1 : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right),\ q = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right),$$

$r = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)$. Quindi considerando l' arco di questa intersezione e le sue coordinate p, q, r funzioni della x, si otterrà $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$,

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2,$$

e $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2$; cioè ponendo nell' espressione di $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$ i valori delle $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$, si avrà

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x^2}\right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right\} :$$
$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right\} : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3;$$

ovvero, osservando, che $1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$, e perciò differenziando $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)$, si otterrà

$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 = \left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)^2\right\} : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$; cioè estraendo la radice quadrata, si avrà $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) = \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)\right\}}}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}$.

Nelle considerazioni fatte per ottenere quest'ultima espressione abbiamo supposto la x variabile principale, se invece si fosse supposta la stessa x, unitamente a tutte le altre quantità y, z, s, A funzioni di un'altra qualunque variabile t, sarebbesi ottenuto per la derivata $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)$ l'espressione, che si otterrà, sostituendo in quella trovata di $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ in vece delle quantità $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)$ le loro equivalenti (§. 71) $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3$, ec.; cioè si sarebbe ottenuto $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\right)^2\right\}}}{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)}$. Espressione affatto simile a quella che dà *Lagrange* nella sua Meccanica Analitica per l'espressione dell'angolo di contingenza di una linea qualunque, e che egli trova cogl'infinitesimi, seguendo un metodo tutto diverso dal nostro.

Trovato che avremo colle regole esposte, tanto l'arco s della linea avente per equazioni $y = fx$, $z = \varphi x$, quanto l'angolo A, avrassi immediatamente coll'equazione $S = s + nA$, esposta sopra, l'arco corrispondente S. Vale a dire l'arco corrispondente dalla parte convessa di una linea qualunque, sia essa a semplice, o a doppia curvatura, sarà sempre eguale a quello della data, più un arco circolare avente per raggio la distanza delle due linee parallele, e corrispondente ad un angolo eguale all'integrale dell'angolo di contingenza della comune sviluppata, preso tra i limiti indicati dagli stessi archi corrispondenti; cioè all'angolo A.

Corollario I. Ponendo nell' equazione, esposta sopra, $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ per $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ il suo valore $\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}:R$, ossia l'equivalente $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right):R$, si avrà $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)+n\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}{R}$; cioè prendendo per variabile principale l'arco s, sarà $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=1+\frac{n}{R}$: formola, che servirà mirabilmente, come si vedrà, per dimostrare facilmente alcune proposizioni, che esporremo nella teorica delle superficie parallele.

PROPOSIZIONE VII.

Trovare la porzione della superficie sviluppabile compresa tra le due linee parallele e le normali estreme, conoscendosi, come nella proposizione antecedente, le equazioni di una di esse.

Supponghiamo, come nella proposizione antecedente, la superficie sviluppabile sulla quale vi sono le due linee tra di loro parallele, distesa sopra il piano qOp, e per quello che abbiamo detto nella medesima proposizione, sarà la superficie cercata equivalente alla superficie DCQM compresa tra le due linee parallele DD, CC condotte sullo stesso piano, e le loro normali estreme QM, DC. Quindi indicando colle s, n, ed A, ciò che abbiamo indicato nella proposizione antecedente, e colla fx la superficie cercata, si avrà, per la Proposizione IV, $fx=ns+\frac{n^2}{2}A$. Vale a dire, la superficie compresa tra la linea data e la sua corrispondente dalla parte convessa equivale sempre ad un rettangolo avente per base l'arco della data, e per altezza la distanza delle due linee parallele; più la superficie di un settore circolare avente per raggio la medesima distanza delle due linee parallele, e corrispondente all'angolo A, cioè all' integrale dell' angolo di contingenza della sviluppata comune, preso tra i limiti indicati dagli stessi archi corrispondenti.

Stante la grande simiglianza che hanno le formole $S = s + nA$, $fx = ns + \frac{n^2}{2}A$ e le quantità in esse rappresentate co' segni S, s, n, A, fx riferibili alle curve a doppia curvatura, colle analoghe equazioni e quantità rappresentate co' medesimi segni esposte nelle proposizioni III, IV, io tralascio qui di esporre le conseguenze, compatibili colla doppia curvatura, simili a quelle esposte estesamente in quelle proposizioni: di più veduta la semplicità sotto la quale si sono fortunatamente presentate le equazioni $S = s + nA$, $fx = ns + \frac{n^2}{2}A$ di queste due ultime proposizioni, e perciò la facilità colla quale si possono cavare da esse le conseguenze, tralascio anche di esporne delle nuove particolari alle linee parallele a doppia curvatura, e passo immediatamente a parlare delle superficie parallele.

Delle superficie parallele.

Relativamente alle superficie parallele esporrò delle proposizioni affatto simili a quelle esposte rispetto alle linee parallele sullo stesso piano; di più, senza nuocere alla successione delle idee seguirò anche il medesimo ordine, inserendo però di mano in mano quelle proposizioni particolari alla natura diversa di queste estensioni: anzi appoggierò qui pure la prima Proposizione alla

DEFINIZIONE. Una superficie che abbraccia tutte le sfere, che hanno il medesimo raggio ed i loro centri tutti sopra di una superficie data, dicesi parallela a questa data.

Questa definizione è affatto simile a quella data per le linee parallele esistenti sullo stesso piano, e sopra della quale ho appoggiato la prima proposizione della loro teorica.

Proposizione VIII.

Data l'equazione finita ($z = \varphi(x, y)$) *di una superficie qualunque, trovare quella di una sua parallela.*

È dimostrato nella teorica delle soluzioni particolari (§. 284), che, se $F(t, s, u, x, y) = 0$ rappresenta l'equazione di una superficie tra le sue coordinate t, s, u ed i parametri x, y, è dimostrato, dico, che fatto continuamente variare quei parametri, onde divengano x', y', x'', y'', ec. le superficie rappresentate dalle equazioni $F(t, s, u, x', y') = 0$, $F(t, s, u, x'', y'') = 0$, ec. sono tutte abbracciate da un'altra, e l'equazione di quest'altra si ha, ponendo nell'equazione $F(t, s, u, x, y) = 0$ in vece delle quantità x, y i loro valori cavati dalle equazioni $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$.

In conseguenza pertanto della definizione esposta delle superficie parallele, se colle t, s, u indichiamo le coordinate di una di quelle sfere, che hanno un medesimo raggio n, e tutte il centro sulla superficie data, e debbono essere abbracciate dalla superficie parallela; e se indichiamo colle x, y, $z = \psi(x, y)$ le coordinate del centro di questa sfera, la sua equazione, cioè $(t - x)^2 + (s - y)^2 + (u - z)^2 - n^2 = 0$, ci darà quella della superficie parallela, quando vi si porrà in luogo delle x, y quei valori che per x, y ci daranno le equazioni $t - x + (u - z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$, $s - y + (u - z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$.

Nota. Nell'avvenire scriverò per brevità u', $u_{,}$, z', z'', $z_{,}$, $z_{,,}$, $z'_{,}$ in vece delle $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$.

Corollario I. Considerate nell'equazione $(t - x)^2 + (s - y)^2 + (u - z)^2 - n^2 = 0$ le due quantità x, y siccome funzioni delle t, ed s, e quali vengono date dalle due equazioni

$t - x$

$t - x + (u - z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$, $s - y + (u - z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, ossia $t - x + (u - z)z' = 0$, $s - y + (u - z)z_\prime = 0$, e prese di quella le due prime differenziali rapporto alle stesse variabili t, ed s indipendenti tra di loro, si hanno le due equazioni differenziali

$$t-x+(u-z)u'-\left(t-x+(u-z)z'\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)-\left(s-y+(u-z)z_\prime\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)=0,$$

$$s-y+(u-z)u_\prime-\left(t-x+(u-z)z'\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)-\left(s-y+(u-z)z_\prime\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)=0,$$

le quali, per la sussistenza delle due $t - x + (u - z)z' = 0$, $s - y + (u - z)z_\prime = 0$ si riducano evidentemente alle altre $t-x+(u-z)u'=0$, $s-y+(u-z)u_\prime=0$; dal che risulta che tra le coordinate delle due superficie parallele sussistono le quattro equazioni $t - x + (u - z)z' = 0$, $s - y + (u - z)z_\prime = 0$, $t - x + (u - z)u' = 0$, $s - y + (u - z)u_\prime = 0$ le quali danno $\frac{x-t}{u-z} = z'$, $\frac{x-t}{u-z} = u'$, $\frac{y-s}{u-z} = z_\prime$, $\frac{y-s}{u-z} = u_\prime$; e perciò $z' = u'$, $z_\prime = u_\prime$. Vale a dire, i piani tangenti alle due superficie parallele ai punti corrispondenti alle coordinate x, y, z, e t, s, u sono anch'essi tra di loro paralleli.

Corollario 2. Cavando dalle tre equazioni $(t-x)^2+(s-y)^2+(u-z)^2-n^2=0$, $t-x+(u-z)z'=0$, $s-y+(u-z)z_\prime=0$ i valori delle coordinate t, s, u si ottiene

$$t = x - \frac{nz'}{\sqrt{(1+z'^2+z_\prime^2)}},\quad s = y - \frac{nz_\prime}{\sqrt{(1+z'^2+z_\prime^2)}},\quad u = z + \frac{n}{\sqrt{(1+z'^2+z_\prime^2)}},$$

i quali sostituiti nelle equazioni (§. 309) $a - x + (c - z)z' = 0$ $b - y + (c - z)z_\prime = 0$ in luogo delle a, b, c coordinate della normale rappresentata da queste due equazioni, danno

$$x - \frac{nz'}{\sqrt{(1+z'^2+z_\prime^2)}} - x + \left(z + \frac{n}{\sqrt{(1+z'^2+z_\prime^2)}} - z\right)z' = 0,$$

$$y - \frac{nz_\prime}{\sqrt{(1+z'^2+z_\prime^2)}} - y + \left(z + \frac{n}{\sqrt{(1+z'^2+z_\prime^2)}} - z\right)z_\prime = 0,$$

ossia $0 = 0$, $0 = 0$; adunque la normale della superficie data condotta al punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z

passa pel punto della superficie parallela a cui corrispondono le coordinate t, s, u. Ma abbiamo trovato nel Corollario antecedente, che, il piano tangente alla superficie data nel punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z, e quello della parallela nel punto corrispondente alle altre t, s, u, sono paralleli tra di loro; quindi la normale alla superficie data, che passa pel punto corrispondente alle coordinate x, y, z sarà anche normale alla parallela al punto a cui corrispondono le t, s, u; cioè a dire sarà normale comune alle due superficie tra di loro parallele.

Similmente, essendo la distanza dei due punti corrispondenti alle coordinate x, y, z, e t, s, u eguale a $\sqrt{((t-x)^2+(s-y)^2+(u-z)^2)}$, e questa quantità risultando per l'equazione $(t-x)^2+(s-y)^2+(u-z)^2-n^2=0$ eguale alla quantità n, la distanza tra questi due punti sarà anch'essa costantemente eguale alla n. Vale a dire, le normali delle due superficie parallele, condotte ai loro punti che corrispondono alle coordinate x, y, z, e t, s, u occupano nello spazio la stessa posizione, e differiscono costantemente della linea n.

Corollario 3. Il doppio segno che può precedere il radicale $\sqrt{(1+z'^2+z_{\prime}^2)}$ contenuto nelle espressioni trovate qui sopra delle coordinate t, s, u ci fa vedere, che ad ogni valore delle x, y, z corrispondono due di quelli delle coordinate t, s, u della parallela; cioè che a ciascuna foglia della superficie data corrispondono due foglie della parallela, una da una parte e l'altra dall'altra di essa, ed alla medesima distanza.

Osservazione 1. Volendo descrivere per punti una tale superficie parallela alla data, bisognerà primieramente fissare il segno al radicale contenuto nei valori delle medesime coordinate; ciò che si farà, come si fa generalmente per avere le coordinate di quelle sole porzioni di tutte le normali di una superficie, che cadono dalla stessa parte della superficie medesima. Fatto questo, si porranno nelle espressioni delle

t, s, u, così stabilite, i valori delle quantità z, z', $z_{,}$ cavati dall'equazione $z = \phi(x, y)$ della superficie data; ed indi si daranno alle due quantità indipendenti x, y diversi valori particolari, e si otterranno i corrispondenti delle coordinate t, s, u, i quali disposti perpendicolarmente l'uno all'altro nel modo a tutti noto, daranno nello spazio i punti di quella tale superficie parallela.

Osservazione 2. Veduta l'uniformità della soluzione data della Proposizione presente con quella della Proposizione I, colla quale quest' ultima ha tutti i rapporti, stimo inutile la ripetizione della conseguenza esposta nel Corollario quinto della suddetta proposizione; giacchè essa si applica, senza il minimo cambiamento, ancora alle superficie.

PROPOSIZIONE IX.

Trovare l'equazione differenziale delle superficie parallele a quelle rappresentate dall' equazione pure differenziale $\phi(x, y, z, z', z_{,}) = 0$.

Siccome i rapporti delle coordinate delle due superficie parallele espressi dalle equazioni $(t-x)^2+(s-y)^2+(u-z)^2-n^2=0$ $t-x+(u-z)z'=0$, $s-y+(u-z)z_{,}=0$ ed il parallelismo dei piani tangenti, ossia le due equazioni $z'=u'$, $z_{,}=u_{,}$, sono affatto indipendenti dal modo che si presenta l'equazione conosciuta della data superficie, così si avranno, tra le coordinate delle due superficie di cui si parla, le seguenti equazioni

$$\phi(x, y, z, z', z_{,}) = 0, \quad (t-x)^2+(s-y)^2+(u-z)^2-n^2=0$$
$$t-x+(u-z)z'=0, \quad s-y+(u-z)z_{,}=0, \quad z'=u', \quad z_{,}=u_{,},$$

le quali combinate tutte in qualunque maniera, danno sempre delle equazioni, che rappresentano delle proprietà delle coordinate di una, o di ambedue le superficie parallele.

Ponendo nelle prime quattro di queste equazioni in luogo delle quantità z', $z_{,}$ le loro eguali u', $u_{,}$ dateci dalle ultime due, si avranno quattro equazioni, nella prima delle quali ponendo di nuovo in vece delle x, y, z i loro valori

$$t + \frac{nu'}{\sqrt{(1 + u'^2 + u_1^2)}},\ s + \frac{nu_1}{\sqrt{(1 + u'^2 + u_1^2)}};\ u - \frac{n}{\sqrt{(1 + u'^2 + u_1^2)}}$$

cavati dalle altre tre, si avrà la sola equazione

$$\phi\left(t + \frac{nu'}{\sqrt{(1+u'^2+u_1^2)}}, s + \frac{nu_1}{\sqrt{(1+u'^2+u_1^2)}}, u - \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2+u_1^2)}}, u', u_1\right) = 0$$

la quale contenendo le sole coordinate della superficie parallela, ne rappresenta la sua equazione; cioè sarà questa l'equazione differenziale cercata.

Se si cercasse l'equazione finita della superficie parallela a quella rappresentata dalla soluzione particolare della data $\phi(x, y, z, z', z_1) = 0$, essa si otterrebbe, o trovando la soluzione particolare di questa equazione data, ed indi l'equazione della parallela colla proposizione antecedente; ovvero trovando immediatamente la soluzione particolare dell' equazione differenziale di tutte le superficie parallele, cioè a dire dell'equazione trovata sopra

$$\phi\left(t + \frac{nu'}{\sqrt{(1+u'^2+u_1^2)}}, s + \frac{mu_1}{\sqrt{(1+u'^2+u_1^2)}}, u - \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2+u_1^2)}}, u', u_1\right) = 0;$$

giacchè questa soluzione particolare rappresenterà appunto la superficie cercata; cioè la parallela a quella rappresentata dalla soluzione particolare della equazione differenziale delle date. Tutto accade come nelle linee parallele esistenti nello stesso piano.

Definizione. I punti ove una stessa retta incontra perpendicolarmente due superficie parallele, si chiameranno punti corrispondenti di queste superficie, o semplicemente corrispondenti. Similmente, se da tutti i punti di una linea condotta sopra di una superficie, si condurranno delle perpendicolari a questa superficie, e si prolungheranno sino all'incontro di un'altra superficie ad essa parallela, la linea che esse segneranno sopra di quest'altra superficie, si dirà linea corrispondente della prima; e reciprocamente la prima della seconda; cioè queste due linee si diranno tra di loro corrispondenti.

PROPOSIZIONE X.

Conoscendo l' equazione di una delle projezioni di una linea condotta sopra di una superficie data, trovare le equazioni della linea sua corrispondente.

Chiamando x, y, z le tre coordinate di un punto della superficie data, il quale è anche comune alla linea condotta sopra di essa, e t, s, u le tre coordinate del punto corrispondente, ed n la distanza delle due superficie parallele, si otterrà come sopra

$$t=x-\frac{nz'}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},\ s=y-\frac{nz_{,}}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},\ u=z+\frac{n}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}};$$

dimodochè sostituendo in queste tre equazioni i valori delle due quantità y, z cavati dall' equazione data della superficie, e da quella pure data della projezione, otterransi i valori delle coordinate t, s, u espressi in funzione della sola x; ed eliminando la x da questi valori, si avranno due equazioni tra le sole coordinate t, s, u, le quali rappresenteranno la linea corrispondente alla data.

PROPOSIZIONE XI.

Tra tutte le linee che si possono condurre sopra di una data superficie, trovare quelle che hanno le corrispondenti parallele a sè stesse; cioè trovare tra tutte le linee corrispondenti, quelle parallele tra di loro.

Per la stessa definizione delle linee corrispondenti esse hanno tutte la prima proprietà che debbono avere due linee per essere tra di loro parallele, cioè che le rette tirate da tutti i punti di una perpendicolarmente all' altra sono eguali; e perciò la soluzione della proposizione si riduce a trovare quelle tra le linee corrispondenti, le quali godono anche della seconda proprietà che aver debbono due linee, in generale, per essere tra di loro parallele (veggasi la definizione esposta delle linee parallele a doppia curvatura). Vale a dire, tutto riducesi a trovare quelle linee corrispondenti, che hanno le due tangenti condotte alle estremità di ciascuna delle suddette perpendicolari, cioè ai punti corrispondenti alle coordinate x, y, z, e t, s, u, anch'esse parallele tra di loro.

Essendo le tangenti delle linee corrispondenti, condotte pei punti a cui corrispondono le coordinate x, y, z, e t, s, u, sopra i piani condotti per gli stessi punti tangenzialmente alle superficie parallele, e questi piani, per quello che abbiamo già dimostrato nel primo corollario della proposizione VIII paralleli tra di loro, saranno le medesime tangenti anch'esse parallele, se avranno le loro projezioni su di un piano delle coordinate, per es. quelle sul piano delle coordinate x, z, o delle t, s, che è il medesimo, parallele pure tra di loro, ossia se formeranno angoli eguali coll'asse delle x; cioè tra le linee corrispondenti, quelle che saranno tra di loro parallele, avranno delle projezioni sul piano delle xy le cui equazioni soddisfaranno alla differenziale $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)$, ossia alla equivalente $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, prendendo la x, in ambedue i membri, per variabile principale.

Qualunque sieno le due linee corrispondenti, si ha sempre, come abbiamo veduto nella proposizione antecedente,

$$t=x-\frac{nz'}{\sqrt{(1+z'^2+z_,^2)}}, \text{ ed } s=y-\frac{nz_,}{\sqrt{(1+z'^2+z_,^2)}},$$

ossia $t=x-\frac{nz'}{\omega}$, ed $s=y-\frac{nz_,}{\omega}$, ponendo $\sqrt{(1+z'^2+z_,^2)}=\omega$;

e perciò

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)=1-\frac{nz''}{\omega}+\frac{z'z''+z_,z'_,}{\omega^3}.nz'+\left(\frac{z_,z_{,,}+z'z'_,}{\omega^3}.nz'-\frac{nz'_,}{\omega}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right), \text{ e}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\left(1-\frac{nz_{,,}}{\omega}+\frac{z_,z_{,,}+z'z'_,}{\omega^3}.nz_,\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-\frac{nz'_,}{\omega}+\frac{z'z''+z'z'_,}{\omega^3}.nz_,,$$

i quali valori sostituiti nell'equazione $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$,

danno $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\left(1-\frac{nz_{,,}}{\omega}+\frac{z_{,}z_{,,}+z'z'_{,}}{\omega^3}.nz_{,}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-\frac{nz'_{,}}{\omega}+\frac{z'z''+z_{,}z'_{,}}{\omega^3}.nz_{,}}{1-\frac{nz''}{\omega}+\frac{z'z''+z_{,}z'_{,}}{\omega^3}.nz'+\left(\frac{z_{,}z_{,,}+z'z'_{,}}{\omega^3}.nz'-\frac{nz'_{,}}{\omega}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$;
ossia facendo sparire il grande denominatore, e sostituendo in vece dell' ω il suo valore $\surd(1+z'^2+z_{,}^2)$, e poi ordinando l'equazione risultante per rapporto alla quantità $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, si ha

$$\left\{(1+z_{,}^2)z'_{,}-z'z_{,}z''\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\left\{(1+z'^2)z_{,,}-(1+z_{,}^2)z''\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-(1+z'^2)z'_{,}+z'z''z_{,}=0,$$

equazione, alla quale debbono soddisfare le equazioni delle projezioni sul piano delle xy di tutte le linee condotte sulla superficie data, che hanno le corrispondenti parallele a sè stesse. Quindi sostituendo nella medesima equazione in vece delle quantità z', $z_{,}$, z'', $z_{,,}$, $z'_{,}$ i loro valori cavati dall'equazione della superficie data, i quali saranno per la natura stessa della superficie funzioni delle x, y, ed integrando l'equazione risultante, se ne otterrà una finita, che conterrà una costante arbitraria, e rappresenterà un'infinità di curve, le quali saranno le projezioni delle linee condotte sulla superficie data, che hanno le corrispondenti parallele a sè stesse.

Corollario 1. L'equazione

$$\left\{(1+z_{,}^2)z'_{,}-z'z_{,}z_{,,}\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\left\{(1+z'^2)z_{,,}-(1+z_{,}^2)z''\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-(1+z'^2)z'_{,}+z'z''z_{,}=0$$

essendo la stessa equazione delle sì celebri linee della massima e minima curvatura della superficie data, ne risulta, che le linee corrispondenti parallele tra di loro, sono le medesime linee di curvatura delle due superficie parallele; di più che le linee di curvatura delle due superficie parallele, sono le sole corrispondenti parallele tra di loro, ossia che, tanto il parallelismo delle linee corrispondenti, quanto la massima e minima curvatura di una superficie, definiscono le medesime linee: risultamento utile per la Stereotomìa.

Corollario 2. Indicando colle C, c gli archi delle due linee di curvatura della superficie data, che passano pel punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z, colle R, r i raggi di curvatura della medesima superficie, e colle C′, c' gli archi detti corrispondenti agli archi C, c e condotti sulla superficie parallela, si avrà, pel Corollario della Proposizione VI, $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right) = 1 + \frac{n}{R}$, e $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right) = 1 + \frac{n}{r}$.

Osservazione. Avendo dimostrato qui sopra l'identità tra le linee di curvatura di una superficie, e quelle linee che hanno le corrispondenti parallele a sè stesse, tralascio di dimostrare, che per lo stesso punto di una superficie, generalmente parlando, non possono passare che due linee sole, le quali abbiano le loro corrispondenti parallele a sè stesse; che queste si segano ad angolo retto, ed altre singolari proprietà di queste linee, le quali si trovano esposte e dimostrate nelle Opere di *Monge*, *Lagrange*, e *Brunacci* (§. 310) relativamente alle linee della massima e minima curvatura delle superficie.

Definizione. Le porzioni di due superficie parallele, che saranno terminate da linee corrispondenti, diransi superficie tra di loro corrispondenti, o semplicemente corrispondenti.

Proposizione XII.

Data l'equazione di una superficie, e quelle del suo contorno, trovare l'espressione della superficie sua corrispondente.

Ritenendo le indicazioni delle coordinate di ambedue le superficie, impiegate già più volte, ed indicando colla Q la superficie corrispondente cercata, si avrà, per le applicazioni del calcolo differenziale alla quadratura delle superficie (§. 320), $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial s}\right) = \sqrt{(1 + u'^2 + u_{\prime}^2)}$; cioè prendendo l'integrale doppio dell'espressione $\partial t \partial s \sqrt{(1 + u'^2 + u_{\prime}^2)}$ rapporto alle variabili t, s, che sono tra di loro indipendenti, ed estendendolo tanto alla fine della prima integrazione, quanto a quella della seconda, tra i limiti fissati dalle linee corrispondenti al contorno della superficie data, si otterrà la superficie

cie corrispondente cercata. Questo sarebbe il metodo a preferirsi, come il più diretto, per trovare la superficie corrispondente Q, ma siccome s'incontrano grandissime difficoltà nelle sue applicazioni; poichè richiede l'equazione della stessa superficie parallela, e quelle delle linee corrispondenti al contorno della data; e perciò espongo il seguente, col quale si può determinare la stessa superficie corrispondente, senza determinare nè l'equazione della superficie parallela, nè quelle delle linee corrispondenti al contorno della data.

Supponendo $t = f(x, y)$, ed $s = \varphi(x, y)$, cioè a dire le variabili principali t, s contenute nell'equazione $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial s}\right) = \sqrt{(1 + u'^2 + u_{,}^2)}$ funzioni delle altre due x, y pure tra di loro indipendenti, le regole che si danno per trasformare interamente un differenziale secondo parziale di una qualunque quantità (§. 177), ossia per trovare il differenziale secondo parziale per rapporto a due variabili indipendenti, quando si conosca già il suo differenziale secondo parziale preso per rapporto a due altre variabili pure tra di loro indipendenti e funzioni delle altre due, danno

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right) = \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\} \sqrt{(1 + u'^2 + u_{,}^2)};$$

" Quando farà bisogno, si prenderà il secondo membro col segno contrario „ ma abbiamo trovato t, nel Corollario secondo della Proposizione VIII, ossia

$$f(x, y) = x - \frac{nz'}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}} = x - \frac{nz'}{\omega}, \text{ ed } s \text{ ovvero}$$

$$\varphi(x, y) = y - \frac{nz_{,}}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}} = y - \frac{nz_{,}}{\omega}, \text{ da cui cavasi}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 1 - \frac{nz''}{\omega} + \frac{nz'}{\omega^3}(z'z'' + z_{,}z'_{,}), \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{nz_{,}}{\omega^3}(z'z'' + z_{,}z'_{,}) - \frac{nz'_{,}}{\omega},$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 1 - \frac{nz_{,,}}{\omega} + \frac{nz_{,}}{\omega^3}(z_{,}z_{,,} + z'z'_{,}), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{nz'}{\omega^3}(z_{,}z_{,,} + z'z'_{,}) - \frac{nz'_{,}}{\omega};$$

e di più pel Corollario primo della medesima Proposizione VIII, si ha $u' = z'$, $u_{,} = z_{,}$, per cui $\sqrt{(1 + u'^2 + u_{,}^2)} = \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)} = \omega$;

adunque ponendo nell'espressione esposta di $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)$ in vece delle quantità $\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}$ questi loro valori, si avrà

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)=\Big\{\left(1-\frac{nz''}{\omega}+\frac{nz'}{\omega^3}(z'z''+z_{,}z_{,}')\right)\left(1-\frac{nz_{,,}}{\omega}+\frac{nz_{,}}{\omega^3}(z_{,}z_{,,}+z_{,}z_{,}')\right)$$
$$-\left(\frac{nz_{,}}{\omega^3}(z'z''+z_{,}z_{,}')-\frac{nz_{,}'}{\omega}\right)\left(\frac{nz'}{\omega^3}(z_{,}z_{,,}+z'z_{,}')-\frac{nz_{,}'}{\omega}\right)\Big\}\omega;$$

ovvero facendo le moltiplicazioni indicate, e sostituendo in luogo della ω il suo valore $\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$, si otterrà $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)$ eguale all'espressione

$$(i)\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{n[2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}+\frac{n^2(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}},$$

la quale dipende, come si vede, dalla sola equazione della superficie data; dimodochè sostituendo nell'espressione

$$\left\{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{n[2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}+\frac{n^2(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}}\right\}\partial x\partial y$$

in luogo delle quantità z', $z_{,}$, $z_{,}'$, z'', $z_{,,}$ i loro valori cavati dall'equazione della superficie data, si avrà una funzione delle sole variabili indipendenti x, y il di cui integrale doppio preso relativamente a queste due variabili, ed esteso tra gli stessi limiti, tra i quali converrà estendere quello dell'altra espressione $\partial x\partial y\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$ per avere la superficie data, ci darà la superficie corrispondente cercata Q. Con questo metodo la difficoltà è ridotta alla sola integrazione doppia, cioè ad una difficoltà appartenente alla natura medesima della questione.

Corollario 1. Se la superficie data sarà quella della minima estensione, ossia quella la cui equazione soddisfa alla differenziale $2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}=0$, come dimostrasi nel calcolo delle variazioni " *Lagrange*. Funzioni. Lezione vigesimaterza ", allora sparirà il termine $\frac{n[2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}$, e si avrà semplicemente $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)$

$=\surd(1+z'^2+z_{,}^2)+\frac{n^2(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}{\surd(1+z'^2+z_{,}^2)^3}$; cioè basterà integrare l'espressione $\left\{\surd(1+z'^2+z_{,}^2)+\frac{n^2(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}{\surd(1+z'^2+z_{,}^2)^3}\right\}\partial x\partial y$ per avere la superficie corrispondente a quella della minima estensione.

Corollario 2. Similmente, se la superficie data sarà sviluppabile, si avrà solamente $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)=\surd(1+z'^2+z_{,}^2)$ $+\frac{n[2z'z_{,}z'_{,}-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}$, essendo per le superficie sviluppabili $z''z_{,,}-z'^2_{,}=0$, come dimostrasi nella loro analisi; ed integrando l'espressione

$$\left\{\surd(1+z'^2+z_{,}^2)+\frac{n[2z'z_{,}z'_{,}-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}\right\}\partial x\partial y,$$ si avrà la superficie corrispondente alla data superficie sviluppabile.

ESEMPIO. Sia $z=\surd(a^2x^2-y^2)$, cioè la superficie data sia quella di un cono retto, che ha il vertice all'origine delle coordinate, e per asse quello delle x, e di cui la tangente trigonometrica dell'angolo che fa un suo lato collo stesso asse è a; e cerchiamo la superficie corrispondente alla quarta parte di essa compresa tra i piani delle coordinate positive.

L'equazione $z=\surd(a^2x^2-y^2)$ ci dà $z'=\frac{a^2x}{\surd(a^2x^2-y^2)}$, $z_{,}=\frac{-y}{\surd(a^2x^2-y^2)}$, $z''=\frac{-a^2y^2}{\surd(a^2x^2-y^2)^3}$, $z_{,,}=\frac{-a^2x^2}{\surd(a^2x^2-y^2)^3}$, e $z'_{,}=\frac{a^2xy}{\surd(a^2x^2-y^2)^3}$; cioè $\surd(1+z'^2+z_{,}^2)=\frac{ax\surd(1+a^2)}{\surd(a^2x^2-y^2)}$, $\frac{n[2z'z_{,}z'_{,}-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}=\frac{n}{\surd(a^2x^2-y^2)}$; e perciò in questo caso sarà $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)=\left(n+ax\surd(1+a^2)\right)\frac{1}{\surd(a^2x^2-y^2)}$.

Integrando l'espressione $\left(n+ax\surd(a^2+1)\right)\frac{\partial x\partial y}{\surd(a^2x^2-y^2)}$ relativamente alla y, ed estendendo l'integrale tra i limiti di $y=0$, ed $y=ax$ fissati, si otterrà $\frac{\pi}{2}\left(n+ax\sqrt{(1+a^2)}\right)\partial x$; e di nuovo integrando questa espressione relativamente alla x, e trovando l'arbitraria colla condizione, che spariscono unitamente le coordinate e la superficie, si avrà la superficie cercata $Q=\frac{1}{2}\pi nx+\frac{1}{4}\pi ax^2\sqrt{(1+a^2)}$.

Altro modo generale per avere l'espressione della superficie corrispondente, od almeno una sua derivata seconda parziale.

Supponendo fissate sulla superficie parallela due linee qualunque, da cui partire e da considerarsi quali assi per misurare gli archi di curvatura della stessa superficie, e chiamando C', c' le lunghezze degli stessi archi compresi tra il punto del loro incontro e le due linee fissate, si avrà [*] $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c'\partial C'}\right)=1$. Ma indicando colle C, c i due archi di curvatura della superficie data e corrispondenti ai due C', c' già nominati, e colle R, r i suoi raggi di curvatura che corrispondono ai medesimi archi C, c, si ha, per quello che abbiamo esposto nel Corollario secondo della proposizione antecedente, $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right)=1+\frac{n}{R}$, e $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right)=1+\frac{n}{r}$; adunque colla medesima regola accennata ed impiegata sopra per trasformare i differenziali secondi parziali, si avrà $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c\partial C}\right)=\left(1+\frac{n}{R}\right)\left(1+\frac{n}{r}\right)$; ovvero ($k$) $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c\partial C}\right)=1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}$. Quindi considerando l'espressione $\left(1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}\right)\partial c\partial C$, che dipende dalla sola superficie data, come funzione degli archi C, c di curvatura della stessa superficie, e prendendo il suo integrale doppio rapporto alle variabili C, c esteso tra gli stessi limiti, tra i quali bisognerà estendere quello dell' espressione $\partial c \partial C$ per avere la medesima superficie data, sarà questo integrale doppio dell' espressione $\left(1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}\right)\partial c \partial C$ la superficie cercata Q.

---

[*] Benchè la formola $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c'\partial C'}\right)=1$ non siasi sino ad ora nè dimostrata nè esposta da nessuno ch'io sappia, nulladimeno, qui l'assumo senza dimostrarla per la grandissima facilità colla quale si può dimostrare co' principj Leibniziani.

Corollario 1. Supponendo la superficie data quella della minima estensione, sarà $R = -r$, cioè i due raggi di curvatura eguali e di segno contrario, come dimostra *Monge* nell' applicazione dell' analisi alla generazione delle superficie curve; così per questa superficie si avrà semplicemente $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right) = 1 - \frac{n^2}{rR}$.

Corollario 2. Similmente, supponendo sviluppabile la superficie data, sarà uno dei raggi R, r, come si sa, eguale all' infinito; e supposto questo R, si avrà $\frac{1}{R} = 0$, e perciò $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right) = 1 + \frac{n}{r}$: dimanierachè, prendendo l'integrale doppio dell' espressione $\left(1+\frac{n}{r}\right)\partial c \partial C$ relativamente alle variabili C, c, ed estendendolo tanto alla fine della prima integrazione quanto alla fine della seconda tra quei limiti, che si prescriveranno, si otterrà la superficie corrispondente ad una data sviluppabile.

Esempio. Sia BVC (*Fig.* 4) la quarta parte della superficie di un cono retto, che ha il vertice al punto V, per asse VA, e di cui un lato qualunque fa coll' asse VA un angolo BVA, che ha per tangente a; e cerchiamo, come nell' esempio antecedente, la superficie corrispondente alla porzione PVR compresa tra i lati PV, RV, e l'arco circolare PMR, che ha tutti i punti equidistanti dal vertice V.

Le linee di curvatura di questa superficie conica corrispondenti al punto M saranno una la retta OMV, e l'altra l'arco circolare RMP, dimodochè ritenendo l'ipotesi del corollario, cioè che R sia il raggio eguale all'infinito, sarà C una parte della retta OMV, cioè sarà $C = MV$, supponendo lo stesso vertice V l'origine di questi archi; e l'altro arco c sarà una parte dell'arco circolare PMR, cioè sarà eguale ad MP, supponendo la retta BV l'asse, o l'origine da cui partire per misurare questi archi; e perciò il raggio di curvatura della medesima superficie conica corrispondente all'arco c, cioè l'r sarà eguale alla normale MN; vale a dire, sarà $C = MV$, $c =$ arco circolare MP, $R = \frac{1}{0}$, $r = MV$ tang. $MVN = aC$, $PQ = \frac{aC}{\sqrt{(1+a^2)}}$, e $PMR = \frac{1}{2}\pi \,.\, \frac{aC}{\sqrt{(1+a^2)}}$.

Ora considerando l'arco C costante, sarà costante pure il raggio r; e perciò l'integrale dell'espressione $\left(1 + \frac{n}{r}\right) \partial c$ rapporto alla c, sarà $\left(1 + \frac{n}{r}\right) c +$ arbitr.; cioè $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right) = \left(1 + \frac{n}{r}\right) c +$ arbitr.; ed esteso tra i limiti di $c = 0$, e $c = PMR = \frac{1}{2}\pi \,.\, \frac{aC}{\sqrt{(1+a^2)}}$ si avrà $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right) = \frac{1}{2} \frac{a\pi}{\sqrt{(1+a^2)}} \,.\, C + \frac{1}{2} \frac{\pi n}{\sqrt{(1+a^2)}}$; ed integrando di nuovo relativamente alla C, ed osservando che sparisce la superficie Q insieme all'arco C, si otterrà $Q = \frac{1}{4} \,.\, \frac{a\pi}{\sqrt{(1+a^2)}} \,.\, C^2 + \frac{\pi n}{\sqrt{(1+a^2)}} \,.\, C$. Ponendo in quest'ultima espressione in luogo della C il suo valore $x \sqrt{(1+a^2)}$, si ricava, come sopra, $Q = \frac{1}{4} a \pi x^2 \sqrt{(1+a^2)} + \frac{1}{2} \pi n x$.

Quantunque lo scopo ch'io mi sono prefisso in questa memoria di analisi geometrica, sia di esporre e dimostrare le sole regole o formole generali, che possono essere utili tanto al pratico quanto al teorico, e di farne qualche semplice applicazione per insegnare l'uso delle formole stesse, nulladimeno, siccome s'incontrano spesse volte le superficie di rivoluzione sì nella pratica che nella teorica, così prima di lasciare questa proposizione farò vedere a qual semplicità si possono ridurre le formole (*i*), (*k*) per qualunque superficie di rivoluzione; di più farò vedere, per queste superficie, come si possa cavare d'ambedue il medesimo risultamento. Ciò che servirà per conoscere maggiormente le formole stesse, e particolarmente la seconda.

Prendendo per asse delle x quello di rivoluzione, ed indicando colla $u = \phi x$ l'equazione tra le coordinate ortogonali x, u della intersezione della medesima superficie con un piano ux, che passa per l'asse di rivoluzione, sarà $z^2 + y^2 = u^2$, ossia $z = \sqrt{(u^2 - y^2)}$ l'equazione della stessa superficie; e perciò scrivendo u', u'', in vece di $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$, si avrà

$$z' = \frac{uu'}{\sqrt{(u^2 - y^2)}},\ z'' = \frac{uu''}{\sqrt{(u^2 - y^2)}} - \frac{y^2 u'^2}{\sqrt{(u^2 - y^2)^3}},\ z_{,} = \frac{-y}{\sqrt{(u^2 - y^2)}},$$

$z_{,}' = \frac{yuu'}{\sqrt{(u^2 - y^2)^3}}$, e $z_{,,} = \frac{-u^2}{\sqrt{(u^2 - y^2)^3}}$; e quindi $\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}$ $= \frac{u\sqrt{(1 + u'^2)}}{\sqrt{(u^2 - y^2)}}$, $\frac{2z'z_{,}z_{,}' - (1 + z_{,}^2)z'' - (1 + z'^2)z_{,,}}{1 + z'^2 + z_{,}^2} = \frac{1 + u'^2 - uu''}{(1 + u'^2)\sqrt{(u^2 - y^2)}}$, e finalmente $\frac{z''z_{,,} - z_{,}'^2}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)^3}} = \frac{-u''}{\sqrt{(u^2 - y^2)}\sqrt{(1 + u'^2)^3}}$. Vale a dire, sarà per qualunque superficie di rivoluzione

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right) = \frac{u\sqrt{(1 + u'^2)}}{\sqrt{(u^2 - y^2)}} + n\frac{1 + u'^2 - uu''}{(1 + u'^2)\sqrt{(u^2 - y^2)}} - n^2\frac{u''}{\sqrt{(u^2 - y^2)}\sqrt{(1 + u'^2)^3}},$$

ossia $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right) = \left\{u\sqrt{(1 + u'^2)} + n\frac{1 + u'^2 - uu''}{1 + u'^2} - n^2\frac{u''}{\sqrt{(1 + u'^2)^3}}\right\}\frac{1}{\sqrt{(u^2 - y^2)}}$: equazione che integrata relativamente alla y, ed esteso l'integrale tra i limiti di $y = 0$, ed $y = u$, cioè tra i piani delle coordinate positive, qualunque sia la superficie di rivoluzione dà $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left\{u\sqrt{(1 + u'^2)} + n\frac{1 + u'^2 - uu''}{1 + u'^2} - n^2\frac{u''}{\sqrt{(1 + u'^2)^3}}\right\}\frac{\pi}{2}$; e per l'intera superficie

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2\pi\left\{u\sqrt{(1 + u'^2)} + n\frac{1 + u'^2 - uu''}{1 + u'^2} - n^2\frac{u''}{\sqrt{(1 + u'^2)^3}}\right\}.$$

Individuata pertanto che sarà la superficie di rivoluzione, e perciò conosciuta l'equazione $u = \varphi x$ porransi nell'espressione $2\pi \left\{ u\sqrt{(1+u'^2)} + n\frac{1+u'^2-uu''}{1+u'^2} - n^2\frac{u''}{\sqrt{(1+u'^2)^3}} \right\} \partial x$, o nella equivalente $2\pi \left(u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}} \right) \left(\sqrt{(1+u'^2)} - \frac{nu''}{1+u'^2} \right) \partial x$ in vece delle quantità u, u', u'' i loro valori cavati dall'equazione $u = \varphi x$, e si avrà un'espressione, la quale integrata relativamente alla x, ed esteso l'integrale tra i limiti, che si prescriveranno, ci darà la superficie cercata Q.

Ora indicando colla p l'ordinata di una linea parallela a quella rappresentata dall'equazione $u = \varphi x$, e supponendola sul piano delle xy unitamente a quest'altra, e colla S l'arco della medesima parallela, si avrà, pel Corollario primo della Proposizione I, $p = u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}}$, e per la Proposizione III $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \sqrt{(1+u'^2)} - \frac{nu''}{1+u'^2}$; e perciò ponendo nell'espressione trovata $2\pi \left(u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}} \right) \left(\sqrt{(1+u'^2)} - \frac{nu''}{1+u'^2} \right) \partial x$ in vece dei fattori $u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}}$, $\sqrt{(1+u'^2)} - \frac{nu''}{1+u'^2}$ le quantità p, $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$ ad essi eguali, si avrà $2\pi p \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) \partial x$, cioè $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2\pi p \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$: come otterrebbesi, osservando, che la superficie Q è anch'essa di rivoluzione, e che l'intersezione di essa col piano ux è una linea avente per ascissa $x - \frac{nu'}{\sqrt{(1+u'^2)}}$, e per ordinata $p = u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}}$.

Similmente per la formola (k), supponendo che le due linee da cui partire e da considerarsi quali assi per misurare gli archi C, c sieno per gli archi c l'intersezione del piano delle uz colla superficie di rivoluzione, e per gli archi C la periferia che è l'intersezione della medesima superficie col piano

piano condotto pel suo principio perpendicolarmente all'asse di rivoluzione, e considerando l'arco C come costante, ed indi integrando relativamente all'arco c, si avrà $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right) = \left(1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}\right)c +$ arbitraria; integrale che esteso tra i limiti di $c=0$, e di $c=2\pi u$ dà $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right)=2\pi u\left(1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}\right)$, ossia $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right)=2\pi\left(u+n\frac{u}{r}\right)\left(1+\frac{n}{R}\right)$. Quindi ponendo nell'espressione $2\pi u\left(1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}\right)\partial C$ in luogo delle r, R i loro valori espressi per l'arco C, ed integrando l'espressione che ne risulta relativamente alla C, ed indi determinando convenientemente l'arbitraria, si avrà la superficie Q.

Finalmente, essendo i raggi r, R di curvatura di una superficie di rivoluzione, uno la normale e l'altro il raggio osculatore della linea avente per equazione $u=\varphi x$, in questo caso sarà primieramente $r=u\sqrt{(1+u'^2)}$, e perciò $u+n\frac{u}{r}=u+\frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}}$, ossia eguale alla p; ed in secondo luogo pel Corollario della Proposizione VI, $1+\frac{n}{R}=\left(\frac{\partial S}{\partial C}\right)$; quindi $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right)=2\pi p\left(\frac{\partial S}{\partial C}\right)$, ovvero prendendo la x per variabile principale, si avrà $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=2\pi p\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$: come abbiamo trovato sopra per la formola (i).

PROPOSIZIONE XIII.

Data l'equazione di una superficie, e quelle del suo contorno, trovare l'espressione del volume o solido compreso tra essa ed una sua corrispondente.

Rappresentando colla funzione $Q(x, y, n)$ la superficie corrispondente alla data e distante da essa della n, saranno

$$Q(x+\alpha,y+\beta,n)-Q(x,y+\beta,n)-Q(x+\alpha,y,n)+Q(x,y,n),$$

$$Q(x+\alpha,y+\beta,n+\theta)-Q(x,y+\beta,n+\theta)-Q(x+\alpha,y,n+\theta)+Q(x,y,n+\theta),$$ ovvero

$$A=\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\alpha^2\beta}{2}\left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^2\partial y}\right)+\text{ec.}+\frac{\alpha\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x\partial y^2}\right)+\text{ec.},$$ e $$B=\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\alpha^2\beta}{2}\left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^2\partial y}\right)+\text{ec.}+\frac{\alpha\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x\partial y^2}\right)+\text{ec.}$$

due superficie corrispondenti a quella porzione della data, la quale ha per projezione sul piano delle xy il rettangolo di cui i lati sono gli aumenti α, β; e distanti dalla stessa data, la prima per l'intervallo n e la seconda per $n+\theta$. Similmente rappresentando colla funzione $V(x,y,n)$ il volume compreso tra la data superficie e la corrispondente $Q(x,y,n)$, saranno

$$V(x+\alpha,y+\beta,n)-V(x,y+\beta,n)-V(x+\alpha,y,n)+V(x,y,n),$$

$$V(x+\alpha,y+\beta,n+\theta)-V(x,y+\beta,n+\theta)-V(x+\alpha,y,n+\theta)+V(x,y,n+\theta),$$ ossia

$$M=\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\alpha^2\beta}{2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}\right)+\text{ec.}+\frac{\alpha\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y^2}\right)+\text{ec.},$$ ed $$N=\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\alpha^2\beta}{2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}\right)+\text{ec.}+\frac{\alpha\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y^2}\right)+\text{ec.}+\alpha\beta\theta\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y\partial n}\right)+\text{ec.}$$

i due volumi compresi tra le superficie A, B e la porzione suddetta della data; e perciò N—M, ovvero $\alpha\beta\theta\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y\partial n}\right)+\text{ec.}$ esprimerà il volume compreso tra le due superficie A, B fra di loro corrispondenti.

Ora evidentemente questo sarà maggiore di $A\theta$ e minore di $B\theta$, o minore di $A\theta$ e maggiore di $B\theta$; adunque col primo dei due principj dai quali dipende la soluzione di qualunque Problema fondamentale di Geometria (*) o di Mecca-

---

(*) Per questi principj si vegga una Memoria dal Cav. *Brunacci* inserita nel primo tomo dell'Istituto Italiano.

nica sublime, si otterà $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial n}\right)=\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$; quindi $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)=Q$. Trovata pertanto l'espressione della superficie Q colla proposizione antecedente, basterà integrare l'espressione $Q\partial n$ relativamente alla sola variabile n, e trovare l'arbitraria introdotta dall'integrazione colla condizione che spariscono insieme V, ed n; e l'espressione risultante, sarà quella del volume V compreso tra la data superficie e la sua corrispondente $Q(x, y, n)$; cioè a dire sarà l'espressione cercata.

Corollario. Differenziando l'equazione trovata sopra $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)=Q$ relativamente alle variabili c, C, si ha $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial n \partial c \partial C}\right)=\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right)$, cioè si hanno tra le quantità V, Q le due equazioni $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial n}\right)=\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial n \partial c \partial C}\right)=\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right)$; nelle quali ponendo in vece delle quantità $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right)$ i loro valori trovati nella proposizione precedente, si otterranno le equazioni

$$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial n}\right)\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{n[2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}+\frac{n^2(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}},$$

$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial n \partial c \partial C}\right)=n+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}$, le quali integrate relativamente alla n ed ommesse le arbitrarie, giacchè determinate risultano eguali a zero, danno

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)=n\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{\frac{n^2}{2}\left(2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}\right)}{1+z'^2+z_{,}^2}+\frac{\frac{n^3}{3}\left(z''z_{,,}-z_{,}'^2\right)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}},$$

e $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right)=n+\frac{n^2}{2r}+\frac{n^2}{2R}+\frac{n^3}{3rR}$. Da queste due ultime equazioni si cava che, il volume cercato, sarà anche eguale all' integrale doppio dell'espressione

$$\left\{n\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{\frac{n^2}{2}\left(2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}\right)}{1+z'^2+z_{,}^2}+\frac{\frac{n^3}{3}\left(z''z_{,,}-z_{,}'^2\right)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}}\right\}\partial x \partial y$$

preso per rapporto alle variabili x, y; ovvero a quello dell' altra $\left\{n+\frac{n^2}{2r}+\frac{n^2}{2R}+\frac{n^3}{3rR}\right\}\partial c\partial C$ preso per rapporto alle c, C, ed estesi ambedue tra i limiti medesimi, tra i quali bisognerà estendere quello dell'espressione $\partial x\partial y\sqrt{(1+z'^2+z_{\prime}^2)}$ per avere la superficie data.

OSSERVAZIONE. Nelle proposizioni esposte relativamente alle linee a doppia curvatura, ed alle superficie abbiamo supposto tacitamente gli archi c', C' dalla parte convessa dei loro corrispondenti; e da questa supposizione risultarono i valori delle quantità $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right)$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right)$, e quelli delle altre $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c\partial C}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c\partial C}\right)$ da esse dipendenti composti di termini tutti positivi. Questa supposizione, quantunque non abbia luogo in generale, giacchè per molte superficie uno degli archi C', c' trovasi dalla parte convessa del suo corrispondente, e l'altro all'opposto dalla parte concava, e per altre trovansi ambedue dalla parte concava dei loro corrispondenti, nulladimeno non limita la generalità delle formole esposte. Imperciocchè, se l'arco C' si trovasse dalla parte convessa del suo corrispondente C, e l'altro c' dalla parte concava del suo corrispondente c, si avrebbe colla Proposizione III, $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right)=1+\frac{n}{R}$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right)=1-\frac{n}{r}$, i quali darebbero $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c\partial C}\right)=1-\frac{n}{r}+\frac{n}{R}-\frac{n^2}{rR}$, e $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c\partial C}\right)=n-\frac{n^2}{2r}+\frac{n^2}{2R}-\frac{n^3}{3rR}$; e se all'opposto C' si trovasse dalla parte concava e c' dalla convessa, o se ambedue si trovassero dalla parte concava dei loro corrispondenti, si avrebbe coll'accennata proposizione, nel primo caso, $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right)=1-\frac{n}{R}$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right)=1+\frac{n}{r}$, $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c\partial C}\right)=1+\frac{n}{r}-\frac{n}{R}-\frac{n^2}{rR}$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c\partial C}\right)=n+\frac{n^2}{2r}-\frac{n^2}{2R}-\frac{n^3}{3rR}$, e nel secondo $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right)=1-\frac{n}{R}$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right)=1-\frac{n}{r}$, $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c\partial C}\right)=1-\frac{n}{r}$

$-\frac{n^2}{R}+\frac{n^2}{rR}$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right)=n-\frac{n^2}{2r}-\frac{n^2}{2R}+\frac{n^3}{3rR}$. Vale a dire ammessi i principj esposti, sarà generalmente $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right)=1+\frac{n}{R}$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right)=1+\frac{n}{r}$, e perciò $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right)=1+\frac{n}{r}+\frac{\eta}{R}+\frac{n^2}{rR}$, e $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right)=n+\frac{n^2}{2r}+\frac{n^2}{2R}+\frac{n^3}{3rR}$; come abbiamo sempre supposto, prendendo però positivamente i raggi r, R, quando gli archi c', C' saranno dalla parte convessa dei loro corrispondenti c, C, e negativamente nel caso opposto.

ESEMPIO. Supponghiamo, che l'arco circolare HBG (*Fig.* 5) unito invariabilmente alla AE faccia unitamente a questa retta un' intera rivoluzione intorno alla retta OO, e cerchiamo la superficie generata dall'arco LCM parallelo al dato GH, ed il solido compreso tra questa superficie e quella generata dall'arco stesso HBG; cioè cerchiamo la superficie corrispondente di quella generata dall'arco HBG quarta parte della periferia, che ha il centro al punto A distante dall'asse OO di $AE=b$, e per raggio $AG=a$; e cerchiamo il solido compreso tra essa e la generata dal quadrante circolare HBG.

Supponendo che le due linee da cui partire e da considerarsi quali assi per misurare la lunghezza degli archi c, C sieno l'arco circolare HBG nella sua posizione primitiva e quello generato dal punto G colla rotazione; e considerando un punto della superficie data pel quale passa il punto B rotando, si avrà $r=AB$, $R=BQ$, $c=BG$, e C eguale alla parte dell'arco circolare descritto dal punto B per arrivare al punto della superficie, che si considera; cioè sarà $r=a$, $R=\frac{b}{\cos.\frac{c}{a}}-a$, $c=BG$, C= alla parte suddetta della periferia $2\pi\left(b-a\cos.\frac{c}{a}\right)$, e $BD=b-a\cos.\frac{c}{a}$.

Nel caso presente i due archi C, C' avendo i loro centri ambedue al punto Q, ed essendo per ipotesi $BQ<CQ$,

converrà prendere R negativamente; e reciprocamente per essere AC > AB, ed avendo i due archi c, c' i loro centri al medesimo punto della periferìa generata dal punto A, bisognerà prendere r positivamente; cioè sarà

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right) = 1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}, \text{ e } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right) = n + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}.$$

Ora l'arco C è evidentemente indipendente dalle altre quantità, c, r, n, R; e perciò integrando le espressioni $\left(1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}\right) \partial C$, $\left(n + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}\right) \partial C$ relativamente alla stessa C, si avrà $\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right) = \left(1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}\right) C + arb$, e $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = \left(n + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}\right) C + arb$; ovvero estendendo gl'integrali tra i limiti di $C = 0$, e di $C = 2\pi \,.\, BD$, si avrà

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right) = 2\pi\left(1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}\right) BD, \text{ e } \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 2\pi\left(n + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}\right) BD.$$

Quindi ponendo in queste ultime espressioni di $\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right)$, $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)$ per le quantità r, BD, R i loro valori, ed integrando relativamente alla c, ed indi estendendo gl'integrali tra i limiti fissati di $c = 0$, e di $c = \frac{\pi a}{2}$, si otterrà la superficie corrispondente $Q = b(a + n)\pi^2 + 2(a + n)^2 \pi$, ed il solido $V = abn\pi^2 + \frac{1}{2} bn^2\pi^2 - 2a^2\pi n - 2an^2\pi - \frac{2}{3}\pi n^3$.

A compimento di quanto ideai di esporre in questa Memoria sino dal momento che incominciai a scriverla mi rimane solo ad avvertire il lettore, che, quando la distanza n tra la curva data e la parallela sia maggiore del minimo raggio della curva data, il quale è anche tangente alla comune sviluppata, e per le superficie maggiore del minimo raggio di curvatura della superficie data, e che la linea, o la superficie cercata sia dalla parte concava della conosciuta, la troppo generalità inseparabile dai metodi analitici introduce nei risultamenti esposti alcune incongruenze, l'esclusione delle quali è assolutamente impossibile; e che lo sviluppo, e l'esposizione di queste ed altre incongruenze le pubblicherò, all'uopo pubblicando un altro lavoro, che è una continuazione del presente.

A compimento del quale aggiungo il presente Problema.

Quali sono le proprietà che debbe avere una curva, ossia le condizioni a cui debbono soddisfare le sue coordinate, acciò essa sia parallela a quelle curve, le quali sono incontrate da tutte le normali della medesima nelle quali si trovano i suoi raggi osculatori, e nel medesimo tempo le porzioni di queste normali comprese tra essa e la curva che incontrano abbiano per tutto la stessa lunghezza.

Sieno x, y, z le coordinate della curva di cui cerchiamo le proprietà, ed a, b, c quelle della sua normale nella quale si trova il raggio osculatore, che compete al punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z; e saranno allora

$$x-a+(y-b)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$x-a+(y-b)m+(z-c)n=0,$$

le equazioni della stessa normale, nelle quali m, n sono date dalle altre due equazioni

$$1+m\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+n\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=0.$$

I valori delle quantità a, b, c cavati dalle tre equazioni

$$(a)\ldots\ldots x-a+(y-b)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$(b)\ldots\ldots x-a+(y-b)m+(z-c)n=0,$$

$$(c)\ldots\ldots (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2,$$

supponendo che il d non muti valore, sia cioè invariabile, rappresenteranno i valori delle coordinate di una di quelle curve, le quali sono incontrate dalle normali anzidette in maniera, che riescano sempre eguali le porzioni di queste normali, comprese tra ciascuna delle stesse curve e quella di cui cerchiamo le proprietà, ossia le condizioni a cui debbono soddisfare le sue coordinate, acciò essa sia parallela a ciascuna di quelle.

Due sono le proprietà che debbono avere due curve onde essere parallele, cioè essere eguali tra di loro le rette tirate da tutti i punti di una perpendicolarmente all'altra, e parallele tra di loro le due tangenti condotte a quelle curve nelle estremità di queste rette perpendicolari.

Chiaramente si scorge che la prima di queste due proprietà regna tra la curva di cui le coordinate sono x, y, z e quella espressa dalle tre equazioni (a), (b), (c), essendo essa proprietà una legittima conseguenza, di ciò che esprime l'equazione (c). Vi sarà anco la seconda di quelle due proprietà, se le due equazioni $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)$, ossia le loro equivalenti $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$ saranno rese identiche dai valori delle quantità a, b, c, $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$, che ci sono dati dalle equazioni (a), (b), (c), unite ai loro differenziali prese per rapporto alla x, i quali sono

$$(a')\ldots 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-b)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$$

$$(b')\ldots 1+m\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+(y-b)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-m\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)-n\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=$$

$$(c')\ldots(x-a)\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)+(y-b)\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0;$$

vale a dire, la curva le cui coordinate sono x, y, z sarà parallela all'altra, se sussisteranno insieme tutte le otto equazioni seguenti

$$(a)\ldots x-a+(y-b)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$(b)\ldots x-a+(y-b)m+(z-c)n=0,$$

(c)

$$(c)\ldots(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2,$$

$$(a')\ldots 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-b)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0,$$

$$(b')\ldots(y-b)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-m\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)-n\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0,$$

$$(c')\ldots(x-a)\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)+(y-b)\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Eliminando adunque da esse le sei quantità a, b, c, $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$, le equazioni che rimarranno, se non saranno da sè stesse identiche, rappresenteranno le condizioni dimandate.

Ma ponendo nelle tre (a'), (b'), (c') in vece delle quantità $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$ i loro valori cavati dalle ultime due equazioni, cioè eliminando le due quantità $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$, si hanno le sei equazioni (a), (b), (c)

$$(a'')\ldots\left\{x-a+(y-b)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)=0,$$

$$(b'')\ldots 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-b)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)-\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)=0,$$

$$(c'')\ldots(y-b)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)=0,$$

le quali si riducono alle sole cinque (a), (b), (c), (b''), (c''), essendo la (a'') identica colla (a). Cavando ora dalle quattro (a), (b), (c), (b'') i valori delle quantità a, b, c, $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)$, si ottiene

$$a=x-\frac{\left\{n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-m\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}d}{R},\quad b=y+\frac{\left\{n-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}d}{R},$$

$$c = z - \frac{\left\{m - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\} d}{\mathrm{R}} \quad \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right) = 1 + \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right\}^2 d}{\mathrm{R}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right\}},$$

supponendo però

$$\sqrt{\left[\left\{n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) - m\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}^2 + \left\{n - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}^2 + \left\{m + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\}^2\right]} = \mathrm{R}.$$

Questi valori sostituiti nell' ultima equazione (c''), la riducono alla

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)\right\} d}{\mathrm{R}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right\}^2} = 0,$$

la quale non contenendo alcuna delle quantità $a, b, c, \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$, e non essendo da sè stessa identica, rappresenterà la condizione cercata.

Quantunque quest' ultima equazione sia composta di molti fattori

$$d,\ \frac{1}{\mathrm{R}},\ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2,\ \frac{1}{\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right\}},\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right),$$

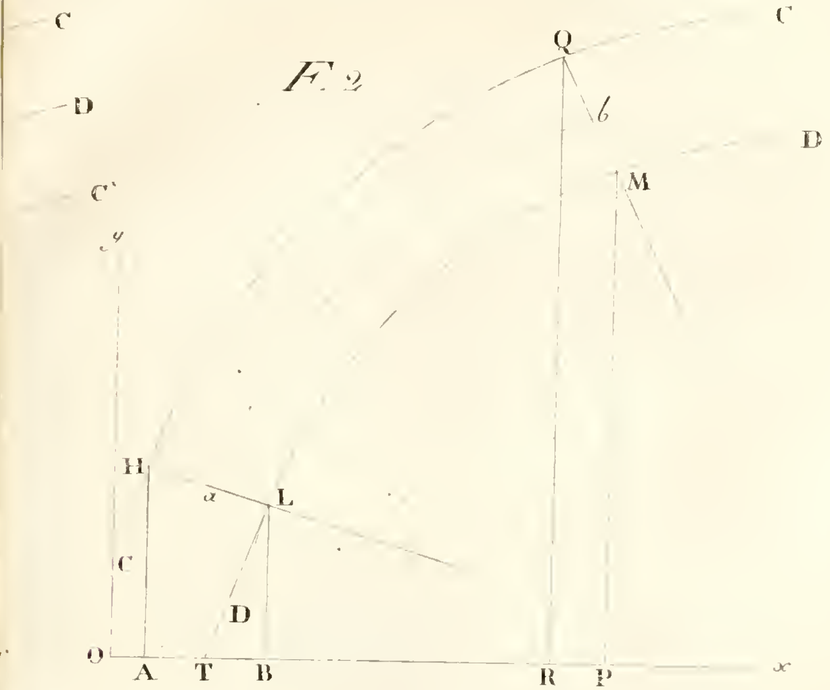
nulladimeno nessuno di questi, se si eccettua quest' ultimo, può essere uguagliato a zero per soddisfarla, senza una evidente contradizione; adunque la condizione cercata sarà espressa dall' equazione differenziale

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) = 0,$$

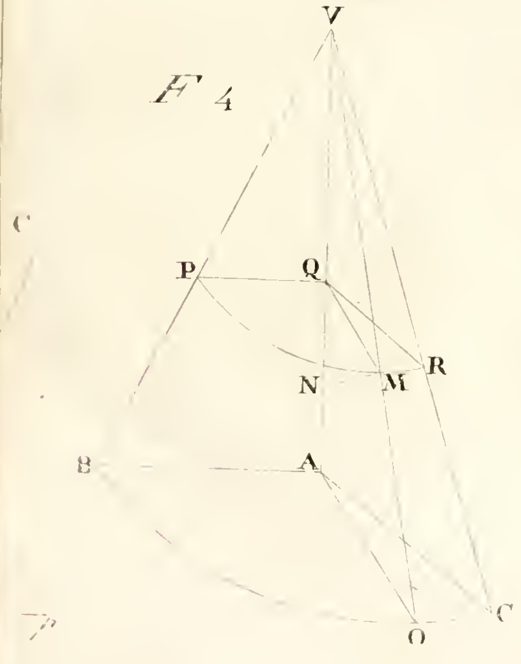
ossia dal suo integrale completo $z = \mathrm{A}y + \mathrm{B}x + \mathrm{C}$. Vale a dire, la curva rappresentata dalle tre equazioni (a), (b), (c), sarà parallela a quella le di cui coordinate sono x, y, z, purchè sia quest' ultima una curva piana.

Il Sig. *Tramontini* nella sua Opera sulle costruzioni grafiche pubblicata questo anno, ammette la curva espressa dalle tre equazioni (a), (b), (c) parallela all' altra; quindi, in forza del risultamento esposto, bisognerà circoscrivere ciò che egli dice al solo caso che quest' altra sia una curva piana.

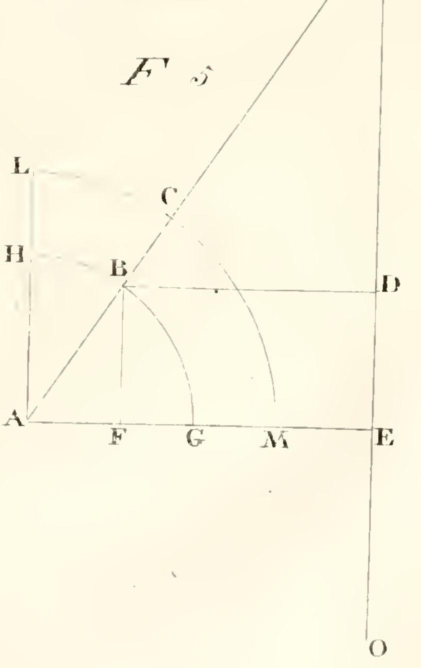
F. 2


C
D
C'
y
Q
C
b
D
M
H
a
L
C
D
O
A
T
B
R
P
x

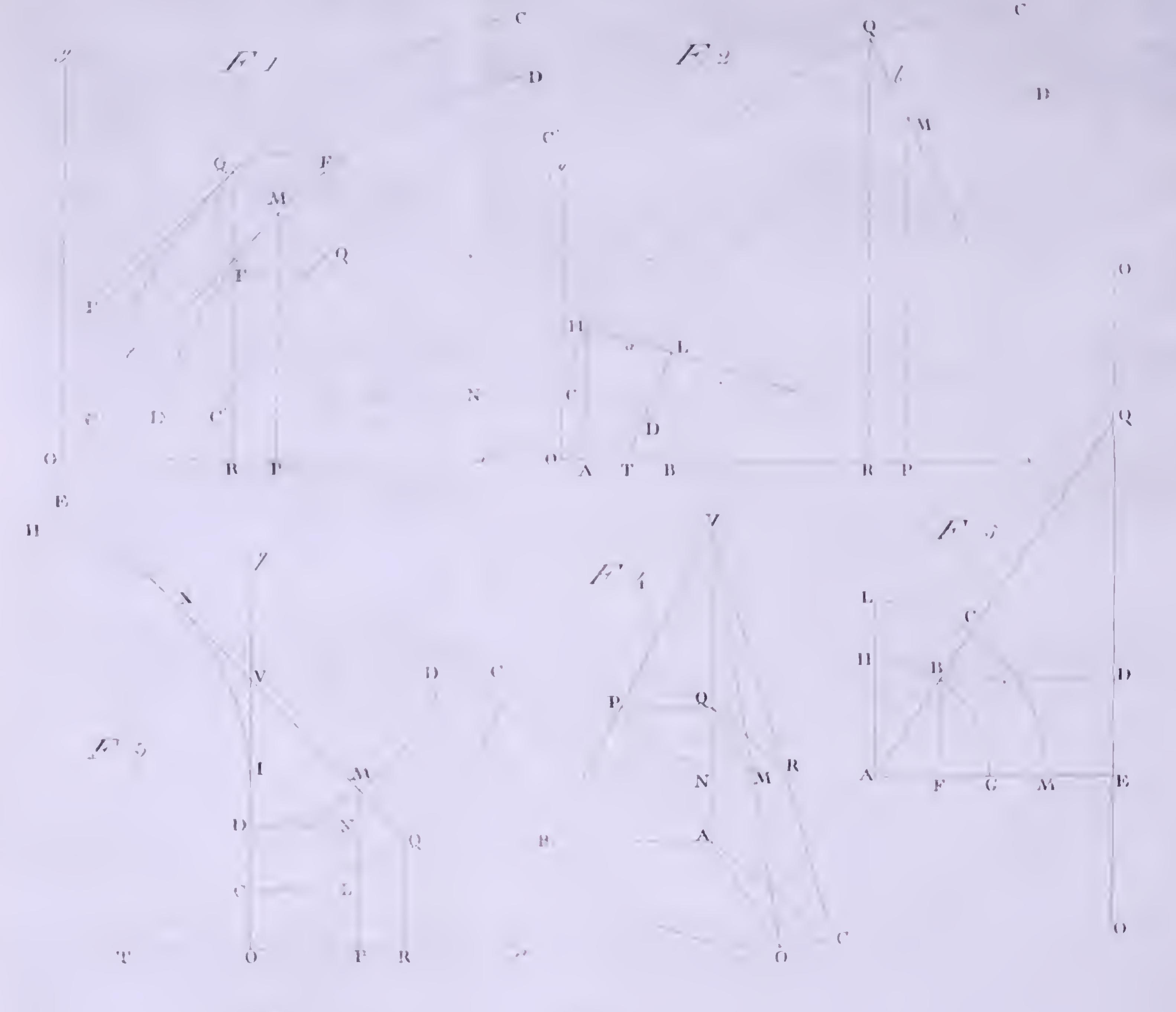
F. 4


V
C
P
Q
R
N
M
B
A
C
O
p

F. 5


O
Q
L
C
H
B
D
A
F
G
M
E
O

Tav. III Società Italiana delle Scienze Memorie di Matematica pag. 122



F. 1
F. 2
F. 3
F. 4
F. 5
C
D
C'
Q
F
M
Q
F
P
E
C'
O
R
P
E
H
N
H
L
C
D
O
A
T
B
Q
b
M
C
D
R
P
O
Q
Z
X
V
D
C
P
Q
I
M
N
R
D
N
Q
B
C
L
T
O
P
R
A
C
O
L
C
H
B
D
A
F
G
M
E
O

Se nella equazione $(c'') \ldots (y-b)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)=0$,

o nell' equivalente

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)\right\} d}{\mathrm{R}\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\}^2}=0,$$

la quale esprime la condizione che si cercava, in vece di supporre che d sia la distanza costante delle due curve suddette, supporremo che esso sia il raggio di curvatura della curva di cui le coordinate sono x, y, z, essa rappresenterà, come dimostra *Lagrange* nella sua teorìa delle funzioni Analitiche, la condizione, acciò la curva dei suoi centri di curvatura sia anche una sua sviluppata; e perciò cogli stessi ragionamenti fatti superiormente, si concluderà, che il luogo geometrico dei centri di curvatura di una data curva sarà una sua sviluppata, nel solo caso che questa sia una curva piana: come dimostrò, in altro modo, *Monge*, nel decimo volume delle Memorie di Matematica presentate alla Reale Accademia delle scienze di Parigi.

LI BARATTI MERCANTILI RIDOTTI E DIMOSTRATI PER ALGEBRA.

MEMORIA

Del Signor Pietro Cossali

Ricevuta li 12 *Febbrajo* 1812.

Sublimi e celebratissimi uomini hanno recata l'algebra a versare su di soggetti aritmetici e teorici, e pratici, ed hanno fornito di bellissime Memorie gli Atti delle Accademie. Ma niuno, che io mi sappia, ha preso cura di richiamare all'algebraica scienza i problemi su i Baratti. *Eulero* nella sua *Arithmetique Demontrée* ne tratta quattro ma de' più facili, due sotto il titolo di *Régle du trois*, e due altre sotto il titolo di *Questionnaire sur les précédentes Régles* all'articolo *sur la Régle du trois*. Ma oltre che sono in dati particolari, e numerici, egli è ben lungi, che dimostrati sieno della Regola i fondamenti, non essendovi a ciascuno Problema, che la prova per mezzo dell'inversione di esso. Numero ben maggiore di tai problemi, e ben più complicati ritrovasi nelle Opere di *F. Luca*, e di *Tartaglia*. Nella *somma* del primo uscita l'anno 1494 montano essi a 48, e nel Trattato generale del secondo ascendono a 43. Ma nell'uno, e nell'altro le risoluzioni mancano di dimostrazione, e nel primo alcune sono false. Avendo io trasportate dai numeri alle lettere tutte esse risoluzioni, ed essendomi riuscito di scoprire in due equazioni l'una che chiamo di *contanti* l'altra che di *baratto* denomino, il fondamento generale di tutte, mi è sembrato quindi bene di presentare qui un compendio ristretto a XI Problemi discutendole, e mostrando la verità delle buone, la falsità delle erronee, ed il difetto delle imperfette. E poichè *F. Luca* distingue tre sorti di Baratti, 1.° che egli chiama *semplice*, 2.° che egli appella *composto*, 3.° che egli denomina a *tempo* quando il pagamento non si fa di presente; io perciò incomincierò dal semplice, proseguirò per lo composto che è quando parte si fa per contanti, e terminerò per quello a tempo.

Problema I. La merce M vale a contanti P, ma in baratto ne vuole il Mercante $P + A$, la merce m vale in contanti p: a quale prezzo deve il secondo Mercante porla in baratto per non avere discapito? E per quantità Q della merce M qual deve essere la quantità q della merce m? S'instituisca la proporzione $P : P + A :: p : \frac{p}{P}(P + A)$, che si chiamerà $p + x$, e sarà questo il prezzo, che dovrà volere per la sua merce m il secondo Mercante.

La quantità q si determinerà dall'equazione $Q(P + A) = q(p + x)$, d'onde $q = \frac{Q(P+A)}{p+x}$. Così *F. Luca* nel quesito suo 1.°, e *Tartaglia* ne' suoi quesiti 3.°, 4.°, 5.°

Io comincierò a distinguere due equazioni l'una, che chiamo

Equazione di contanti $QP = qp$

l'altra, che dico

Equazione di baratto $Q(P + A) = q(p + x)$

Dalla prima ne viene $q = \frac{QP}{p}$.

Dalla seconda $q = \frac{Q(P+A)}{p+x}$

d'onde $P : P + A :: p : p + x$, che è la proporzione stabilita sul principio da *F. Luca*, e da *Tartaglia*.

Problema II. Il Mercante della merce M vuole la parte $\frac{e}{n}$ del prezzo $P + A$ in contanti, qual deve essere il prezzo $p + x$ della merce m, onde il secondo Mercante non abbia nel baratto discapito?

F. Luca nei quesiti 9.°, 10.°, 39.°, e *Tartaglia* nel 9.°

ingiungono d'istituire la proporzione seguente

$$P-\frac{e}{n}(P+A):P+A-\frac{e}{n}(P+A)::p:p+x=\frac{p[P+A-\frac{e}{n}(P+A)]}{P-\frac{e}{n}(P+A)}$$

Che io riduco a $p+\frac{pA}{P-\frac{e}{n}(P+A)}$.

Ma ciò, che merita di essere qui considerato, si è, che nè *Fra Luca*, nè *Tartaglia* non adducono ragione della comandata proporzione. Io a dimostrarla pongo le due equazioni, l'una che seguo ad appellare dei contanti in quanto che oltre alla parte $\frac{e}{n}$ del prezzo $P+A$ di baratto in contanti, contiene li prezzi a contanti P, p, l'altra, che chiamo equazione di baratto, poichè comprende i soli prezzi di baratto. Equazione di contanti $\frac{e}{n}(P+A)Q+qp=PQ$.

Equazione di baratto $\frac{e}{n}(P+A)Q+q(p+x)=(P+A)Q$ sottraendo da questa la equazione prima ne viene $qx=QA$, d'onde $q=\frac{QA}{x}$, sostituendo il qual valore nella prima ne segue $\frac{e}{n}(P+A)Q+\frac{QAp}{x}=PQ$, e dividendo per Q, e liberando x risulta $x=\frac{pA}{P-\frac{e}{n}(P+A)}$, e quinci $p+x=p+\frac{pA}{P-\frac{e}{n}(P+A)}$.

È poi semplicissima la espressione a me proveniente di $q=\frac{QA}{x}$. Secondo *F. Luca*, e *Tartaglia* essa verrebbe ad essere $q=\frac{Q(P+A)-\frac{e}{n}Q(P+A)}{p+x}$, e sostituendo il valore di $p+x$ si avrebbe

$$q=\frac{\left[Q(P+A)-\frac{e}{n}(P+A)Q\right]\left[P-\frac{e}{n}(P+A)\right]}{p(P+A)-\frac{e}{n}(P+A)}=\frac{Q\left[P-\frac{e}{n}(P+A)\right]}{p}$$

espressione molto più composta della mia. La coincidenza però manifestasi, osservando essere $x = \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P + A)}$, conseguentemente $P - \frac{e}{n}(P + A) = \frac{pA}{x}$.

Esempio di *F. Luca*. M è panno, che a contanti vale lire 5, ed a baratto 6, m è lana che a contanti vale 17 lire al cento; il Mercante del panno vuole $\frac{1}{3}$ dell'importo del suo panno al prezzo 6 in contanti: a quale prezzo il Mercante della lana deve alzarne il prezzo? $6 - 5 = A = 1$, $p = 17$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}$, onde $x = \frac{17 \cdot 1}{5 - \frac{1}{3} \cdot 6} = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$, $p + x = 17 + 5\frac{2}{3} = 22\frac{2}{3}$. Si prenda qualunque quantità di panno e. g. canne 68, sarà il numero di centinaja di libbre da prendersi di lana $= q = \frac{68 \cdot 1}{5\frac{2}{3}} = 12$, cioè libbre di lana 1200. Di fatto il prezzo di canne 68 di panno a lire 6 la canna $= 68 \cdot 6 = 408$, $\frac{1}{3} \cdot 408 = 136$, 12 centinaja di lana a lire 17 il centinajo $= 12 \cdot 17 = 204$; ora $136 + 204 = 340 = 68 \cdot 5$ secondo la prima equazione; $136 + 12 \cdot 21\frac{2}{3} = 136 + 272 = 408 = 68 \cdot 6$ giusta la equazione seconda.

Dalla equazione $x = \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P + A)}$ delle cinque quantità P, A, $\frac{e}{n}$, p, x date quattro qualunque si troverà la quinta, su di che vertono altri quesiti di *F. Luca*, e di *Tartaglia*.

E se reciprocamente il Mercante della merce M dar dovesse al Mercante della merce m in contanti la parte $\frac{e}{n}(p + x)q$, e ciononostante si trattasse di cercare il valore di $p + x$, le due equazioni sarebbero

$\frac{e}{n}(p + z)q + Q(P + A) = q(p + x)$ equazione di baratto

$\frac{e}{n}(p + x)q + QP = qp$ equazione di contanti, e sottraendo questa da quella si avrebbe al solito $QA = qx$, donde $q = \frac{QA}{x}$, che sostituito nell' equazione seconda dà $\frac{e}{n}(p + x)\frac{QA}{x} + PQ = \frac{QA}{x}p$, dalla quale dividendo per Q, e liberando x si ottiene

$$x = \frac{(1 - \frac{e}{n})pA}{P + \frac{e}{n}A}, \text{ e quinci } p + x = p + \frac{(1 - \frac{e}{n})pA}{P + \frac{e}{n}A}.$$

Tartaglia nel suo quesito 14.° insegna la proporzione $P + \frac{e}{n-e}(P + A) : P + A + \frac{e}{n-e}(P + A) :: p : p + x$ d' onde

$$p + x = \frac{p\left(P + A + \frac{e}{n-e}(P + A)\right)}{P + \frac{e}{n-e}(P + A)} = p + \frac{pA}{P + \frac{e}{n-e}(P+A)} = p + \frac{(1 - \frac{e}{n})pA}{P + \frac{e}{n}A}.$$

La Proporzione adunque di *Tartaglia* si riduce alla mia formola. Non così la proporzione di *F. Luca* nel suo quesito 12.° la qual è $P + \frac{e}{n}(P + A) : P + A + \frac{e}{n}(P+A) :: p : p+x$; laonde erra *F. Luca*.

Se si ha poi ad indovinare la via, per la quale *Tartaglia* pervenne alla sua proporzione, forse fu questa. Dall' equazione di baratto $\frac{e}{n}(p + x)q + Q(P + A) = q(p + x)$ si ha $Q(P + A) = (1 - \frac{e}{n})(p + x)q$. Si faccia ora

$$(1 - \frac{e}{n})(p + x)q : Q(P + A) :: \frac{e}{n}(p + x)q : \frac{e}{n-e}Q(P + A)$$

il che è generalmente lecito, essendo il prodotto degli estremi uguale al prodotto de' medj, e si avrà, siccome il primo termine uguale al secondo, così il terzo uguale al quarto, laonde la stessa equazione di baratto si cangia in

$$\frac{e}{n-e}Q(P + A) + Q(P + A) = q(p + x),$$

e l' equazione in contanti $PQ + \frac{e}{n}(p + x)q = pq$ cangiasi in

PQ

$$PQ + \frac{e}{n-e} Q (P + A) = qp : \text{onde}$$

$$P + \frac{e}{n-e} (P + A) : P + A + \frac{e}{n-e} (P + A) :: p : p + x .$$

Problema III. Avendo il secondo Mercante, che diede al primo in contanti la parte $\frac{e}{n} (P + A) Q$, alzata la merce sua dal prezzo $p + z$, cercasi se lo fece con vantaggio, o con discapito, e del quanto per 100.

F. Luca ne' suoi quesiti 9, e 27 trovato per il Probl. II il prezzo $p + x$, a determinare il quanto di vantaggio, o discapito per 100 di capitale argomenta

$$pq : q [\pm (p + z) \mp (p + x)] :: 100 : \frac{100}{p} [\pm (p + z) \mp (p + x)]$$

che si riduce a $p : (\pm z \mp x) :: 100 : \frac{100}{p} (\pm z \mp x)$.

Ed a trovare il quanto di vantaggio, o discapito per ogni 100 di baratto argomenta

$$q(p + x) : q [\pm (p + z) \mp (p + x)] :: 100 : \frac{100}{p+x} [\pm (p + z) \mp (p + x)]$$

che similmente riducesi a $p + x : (\pm z \mp x) :: 100 : \frac{100}{p+z} (\pm z \mp x)$

Tartaglia comincia dall' argomentare

$$P + A - \frac{e}{n} (P + A) : P - \frac{e}{n} (P + A) :: q(p + z) : \frac{q(p+z) [P - \frac{e}{n} (P + A)]}{P + A - \frac{e}{n} (P + A)} ,$$

indi ordina di sottrarre dal quarto termine il prodotto qp, finalmente comanda d' instituire la proporzione

$$qp + \frac{e}{n} (P + A) Q : \frac{q (p + z) [P - \frac{e}{n} (P + A)]}{P + A - \frac{e}{n} (P + A)} - qp :: 100 : G$$

intendendo per G il guadagno per 100 sopra la somma del secondo Mercante nel contratto impiegata $qp + \frac{e}{n} (P + A)$.

Io rifletto alle due equazioni

1.ª in contanti $\frac{e}{n}(P+A)Q+qp=PQ$

2.ª di baratto $\frac{e}{n}(P+A)Q+q(p+z)=(P+A)Q$.

Essendovi per il 2.° Mercante guadagno si verifica la seconda, ma non già la prima. Per esempio essendo M panno, il cui prezzo in contanti alla canna $P =$ lire 5, in baratto $P+A=6$, la quantità $Q =$ canne 75; *m* lana fatta valere in baratto $p+z =$ lire 30 al cento in luogo di $p=20$ in contanti, $q = 10$ centinaja, ed essendo $\frac{e}{n}=\frac{1}{3}$, si avrà

$$\frac{e}{n}(P+A)Q=\tfrac{1}{3}\,.\,6\,.\,75=\tfrac{1}{3}\,.\,450=150;\ (P+A)Q=450,$$

$q(p+z)=10\,.\,30=300$: onde $300+150=450$, ecco verificata la equazione seconda di baratto.

Ma avendosi $qp=10\,.\,20=200$; $PQ=75\,.\,5=375$ si ha $\frac{e}{n}(P+A)Q+qp=350$; $PQ=375$. Onde non sarà verificata la equazione prima dei contanti, ma si avrà

$$\frac{e}{n}(P+A)Q+qp=PQ-25.$$

Dunque in generale sarà $qp+\frac{e}{n}(P+A)Q<PQ$, cioè il dato dal secondo Mercante meno, che il ricevuto, e l'eccesso del ricevuto sopra il dato $PQ-\left[qp+\frac{e}{n}(P+A)\right]$ sarà il suo guadagno: nell'addotto caso il 25. Perciò chiamando il guadagno g si avrà l'equazione generale in contanti

$$qp+\frac{e}{n}(P+A)=PQ-g.$$

Ora sottraendo questa da quella di baratto

$q(p+z)+\frac{e}{n}(P+A)=(P+A)Q$ si ha $q=\frac{QA+g}{z}$; e sostituendo questo valore nella prima si trova

$$g = \frac{z\,[\mathrm{PQ} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q}] - \mathrm{QA}p}{p+z} = \frac{(p+z-p)\,[\mathrm{PQ} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q}] - \mathrm{QA}\,p}{p+z}$$

$$= \mathrm{PQ} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q} - \frac{p}{p+z}[\mathrm{P}+\mathrm{A} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})]\mathrm{Q}$$

e sarà questo il guadagno del 2.° Mercante sopra $qp + \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})$ o sia sopra $(\mathrm{PQ} - g)$; onde capitale e guadagno $:: \mathrm{PQ} - g : g ::$ $\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q} + \frac{p}{p+z}[\mathrm{P}+\mathrm{A} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})]\mathrm{Q} : \mathrm{PQ} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A}) \times$ $\mathrm{Q} - \frac{p}{p+z}[\mathrm{P}+\mathrm{A} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})]\mathrm{Q} :: 1 : \frac{(p+z)\mathrm{P}}{(p+\frac{e}{n}z)(\mathrm{P}+\mathrm{A})} - 1$, e giusta questa ragione il 100 al guadagno per 100, che dirò G diverrà $\mathrm{G} = \left(\frac{(p+z)\mathrm{P}}{(p+\frac{e}{n}z)(\mathrm{P}+\mathrm{A})} - 1\right)100$.

Si penetra la ragione della proporzione

$$\mathrm{P}+\mathrm{A} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A}) : \mathrm{P} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A}) :: q(p+z) : \frac{q(p+z)[\mathrm{P} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})]}{\mathrm{P}+\mathrm{A} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})}$$

di *Tartaglia*, e della sottrazione ordinata di qp dal quarto termine, se in luogo dell'equazione in contanti

$$qp + \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q} = \mathrm{QP} - g$$

si finga l'equazione in contanti

$$qp' + \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q} = \mathrm{QP}$$

concependo per p' un prezzo in contanti maggiore di p, il quale faccia verificare l'equazione, supplendo al bisogno di sottrarre g da PQ. Da questa equazione cavando il valore di $\mathrm{Q} = \frac{qp'}{\mathrm{P} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})}$, e sostituendolo nella equazione di baratto $\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A}) + q(p+z) = (\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q}$ si troverà

$$\mathrm{P}+\mathrm{A} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A}) : \mathrm{P} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A}) :: q(p+z) : qp' = \frac{q(p+z)[\mathrm{P} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})]}{\mathrm{P}+\mathrm{A} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})}$$

e quinci $qp' - qp = \dfrac{q(p+z)\left[P - \frac{e}{n}(P+A)\right]}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)} - qp$.

A dimostrar poi la seconda proporzione di esso *Tartaglia* cioè

$$qp + \frac{e}{n}(P+A)Q : \frac{q(p+z)\left[P-\frac{e}{n}(P+A)\right]}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)} - qp :: 100 : G$$

alla mia formola di G riducibile non si ha, che a sostituire nel primo termine di essa proporzione il valore di Q tolto dall'equazione di baratto, con che il termine convertesi in

$pq + \dfrac{q(p+z)\,.\,\frac{e}{n}(P+A)}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)}$, e divisa la prima ragione per q comune a tutti i termini risulta

$$p + \frac{(p+z)\,.\,\frac{e}{n}(P+A)}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)} : \frac{(p+z)\left[P-\frac{e}{n}(P+A)\right]}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)} - p :: 100 : G;$$

ed a togliere il divisore $P+A-\frac{e}{n}(P+A)$, moltiplicando per esso p, $-p$, indi dividendo per $p(P+A)+\frac{e}{n}z(P+A)$ proviene per lo appunto $G = \left(\dfrac{(p+z)P}{(p+\frac{e}{n}z)(P+A)} - 1\right)100$.

Egli è poi evidente che *F. Luca* calcolò il quanto per 100 del guadagno, o discapito del secondo Mercante sopra il prezzo della sua merce in contanti p, o sopra il prezzo per il baratto accresciuto $p+x$; e dice di essersi su di ciò trovato in grandi controversie; ma pur *finaliter si conclude per li saputi che ditto guadagno s' intende del Capitale* cioè di pq. *Tartaglia* lo condanna ragionevolmente volendo, che per capitale si consideri non solo il pq, ma unitamente il contante $\frac{e}{n}(P+A)Q$, che il secondo Mercante sborsa al 1.°, vale a dire tutta la somma $pq+\frac{e}{n}(P+A)Q$. E tanto maggior ragione aveva *Tartaglia* di condannar *F. Luca*, quanto che questi nel suo quesito 32.° computa il guadagno del primo Mercante sopra $\left(P - \frac{e}{n}(P+A)\right)Q$ cioè sopra la data PQ meno la somma ricevuta $\frac{e}{n}(P+A)Q$; onde per essere coerente dovea similmente computare il guadagno del secondo Mercante nel caso opposto sopra l'aggregato della somma data in merci pq, e della data in contanti $\frac{e}{n}(P+A)Q$.

È poi manifesto, che dinotando per D il discapito del secondo Mercante qualora sia $p+z<p+x$ per il Problema II determinato sarà

$$D=\left(1-\frac{(p+z)P}{(p+z\frac{e}{n})(P+A)}\right)100.$$

Il guadagno del secondo Mercante è discapito del primo, e viceversa, ma vi ha questa differenza che laddove il guadagno, o discapito del secondo va riportato alla somma $qp+\frac{e}{n}(P+A)Q$; il discapito all'incontro, od il guadagno del primo va giusta *F. Luca* stesso riportato alla somma $PQ-\frac{e}{n}(P+A)Q$: onde sarà capitale a discapito nel caso di $p+z>p+x$

$$PQ-\frac{e}{n}(P+A)Q : PQ-\frac{e}{n}(P+A)Q-\frac{p}{p+z}\left(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\right)Q$$

e perciò chiamando D' il discapito del primo Mercante per 100

$$D'=\left(1-\frac{p\left(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\right)}{(p+z)\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)}\right)100$$

e nel caso di $p+z<p+x$

$$G'=\left(\frac{p\left(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\right)}{(p+z)\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)}-1\right)100$$

se mai ti piacesse rapportare il D′, e G′ al semplice PQ, avresti

$$G'=\left(\frac{(p+z\frac{e}{n})(P+A)}{(p+z)P}-1\right)100\,;\ D'=\left(1-\frac{(p+z\frac{e}{n})(P+A)}{(p+z)P}\right)100.$$

Entrando in queste formole sei quantità cioè oltre G, o G′, o D, o D′ le quantità z, p, P, A, $\frac{e}{n}$, date cinque qualunque si troverà la sesta: versano in fondo su alcune di tali combinazioni i quesiti 19, 20, 21, 22, 23, 24 di *Tartaglia*. Stando all'esempio al principio delle mie riflessioni su di questo Problema addotto sarà

$$G=\left(\frac{30.5}{(20+\frac{1}{3}.10)6}-1\right)100=\left(\frac{15}{14}-1\right)100=7\tfrac{1}{7}$$

$$D'=\left(1-\frac{20(6-\frac{1}{3}.6)}{30(5-\frac{1}{3}.6)}\right)100=11\tfrac{1}{9}$$ nel primo rapporto, e nel secondo $D'=\left(1-\frac{(20+10.\frac{1}{3})6}{30.5}\right)100=6\tfrac{2}{3}$.

Problema IV. Uno ha la merce M, il cui prezzo in contanti P, in baratto P + A, l'altro ha le merci m, m', i prezzi delle quali in contanti p, p', in baratto $p+x$, $p'+x'$, ed il primo vuole la parte $\frac{e}{n}$ di P + A in contanti, e delle merci m, m' quantità q, q' tali, che $kq(p+x)=q'(p'+x')$ si domanda l'equazione tra P, P + A, p, $p+x$, p', $p'+x'$, $\frac{e}{n}$, k? sarà

1.ª equazione di contanti $\frac{e}{n}(P+A)Q+qp+q'p'=PQ$

2.ª equazione di baratto $\frac{e}{n}(P+A)Q+q(p+x)+q'(p'+x')=Q(P+A)$

3.ª equazione di condizione $kq(p+x)=q'(p'+x')$
sottraendo dalla seconda la prima si ha

$qx+q'x'=QA$, d'onde $q'=\frac{QA-qx}{x'}$, e quinci $\frac{QA-qx}{x'}(p'+x')$ $=kq(p+x)$ dal che si ricava

$q = \frac{QA(p'+x')}{x(p'+x')+kx'(p+x)}$ $\quad q' = \frac{kQA(p+x)}{x(p'+x')+kx'(p+x)}$ sostituiti i quali valori nella prima equazione ne uscirà

$$\frac{A[p(p'+x')+kp'(p+x)]}{x(p'+x')+kx'(p+x)} = P - \frac{e}{n}(P+A).$$

Se si supponesse $q=q'$ avrebbesi le equazioni

1.ª $\frac{e}{n}(P+A)Q + q(p+x') = PQ$

2.ª $\frac{e}{n}(P+A)Q + q(p+x+p'+x') = Q(P+A)$,

e sottraendo la prima dalla seconda proverrebbe $q(x+x') = QA$ e surrogando nella prima il valore di $q = \frac{QA}{x+x'}$ risulterebbe $\frac{(p+p')A}{x+x'} = P - \frac{e}{n}(P+A)$ e facendo uso della terza $k(p+x) = p'+x'$ dalla quale si cava $x' = k(p+x) - p'$ ne seguirebbe

$$\frac{(p+p')A}{x(k+1)+kp-p'} = P - \frac{e}{n}(P+A).$$

Tartaglia nel suo quesito 32, supponendo di fatto $q=q'$, e cercando $p'+x'$ prescrive di fare

$$P - \frac{e}{n}(P+A) : P+A-\frac{e}{n}(P+A) :: p+p' : \frac{(p+p')\left((P+A)-\frac{e}{n}(P+A)\right)}{P-\frac{e}{n}(P+A)}$$

e di prendere $\frac{(p+p')\left(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\right)}{P-\frac{e}{n}(P+A)} - (p+x) = p'+x'$,

che risolvesi in $p+p'+\frac{(p+p')A}{P-\frac{e}{n}(P+A)} - p - x = p'+x'$, o sia in $\frac{(p+p')A}{P-\frac{e}{n}(P+A)} = x+x'$, d'onde $\frac{(p+p')A}{x+x'} = P - \frac{e}{n}(P+A)$.

F. Luca nel quesito 23 in luogo di $p+p'$ pone a terzo termine della proporzione $p+x+p'$, ed erra perciò, seguitando nel resto allo stesso modo, che *Tartaglia*. Nel quesito 22 non si sa che cosa si voglia non essendo coerente ne' numeri.

Se nella mia formola si supporrà $p : p + x :: p' : p' + x'$, sostituendo a $p' + x'$ il suo valore $\frac{p'}{p}(p + x)$, si trasformerà essa in $\frac{A(1 + k)pp'}{xp' + kx'p} = P - \frac{e}{n}(P + A)$ e volendo anche eliminar x' col mezzo dell' equazione $p' + x' = \frac{p'}{p}(p + x)$, la quale porge $x' = \frac{p'}{p}x$, si avrà $\frac{Ap}{x} = P - \frac{e}{n}(P + A)$, ed in questo caso

$$q = \frac{QA}{x(1 + k)} \qquad q' = \frac{kQpA}{xp'(1 + k)}.$$

Sono queste mie formole più ragionevoli di quelle di *Tartaglia* nel quesito 32. E perchè prender $q = q'$ a costo di dover senza proporzione alzare il prezzo p'?

PROBLEMA V. Innalzando il secondo Mercante li prezzi delle sue merci m, m' dalli prezzi in contanti p, p' ai prezzi $p + z + p' + z' > p + x + p' + x'$, si domanda il suo guadagno per 100?

Le tre equazioni saranno per il Probl. III, e per il IV

1.ª in contanti $\frac{e}{n}(P + A) + qp + q'p' = PQ - g$

2.ª di baratto $\frac{e}{n}(P + A) + q(p + z) + q(p' + z') = Q(P + A)$

3.ª di condizione $kq(p + z) = q'(p' + z')$.

Da queste tre equazioni si trova

$$\frac{(QA + g)[p(p' + z') + kp'(p + z)]}{z(p' + z') + kz'(p + z)} = PQ - \frac{e}{n}(P + A)Q - g$$

onde

$$g = \frac{[PQ - \frac{e}{n}(P + A)Q][z(p' + z') + kz'(p' + z')] - QA[p(p' + z') + kz'(p + z)]}{(1 + k)(p + z)(p' + z')}$$

guadagno sopra $\frac{e}{n}(P + A) + qp + q'p'$, o sia sopra $PQ - g$.

Ora $PQ - g$ si trova uguale a

$$\frac{(\mathrm{P}+\mathrm{A})\,\mathrm{Q}\left(p(p'+z')\right)+k\left(p'(p+z)\right)+\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\,\mathrm{Q}\left(z(p'+z')+kz'(p+z)\right)}{(1+k)(p+z)(p'+z')}$$

e perciò il guadagno G sopra 100

$$\mathrm{G}=\left[\frac{\left(\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\right)\left(z(p'+z')+kz'(p+z)\right)-\mathrm{A}\left(p(p'+z')+kp'(p+z)\right)}{(\mathrm{P}+\mathrm{A})\left(p(p'+z')+kp'(p+z)\right)+\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\left(z(p'+z')+kz'(p+z)\right)}\right]100\,.$$

E nel caso di $p+z+p'+z'<p+x+p'+x'$

$$\mathrm{D}=\left[\frac{\mathrm{A}\left(p(p'+z')+kp'(p+z)\right)-\left(\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\right)\left(z(p'+z')+kz'(p+z)\right)}{(\mathrm{P}+\mathrm{A})\left(p(p'+z')+kp'(p+z)\right)+\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\left(z(p'+z')+kz'(p+z)\right)}\right]100$$

il corrispondente discapito D', o guadagno G' del primo Mercante, riportandosi a $\mathrm{PQ}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\,\mathrm{Q}$, sarà

$$\mathrm{D}'=\left[\frac{\left(\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\right)\left(z(p'+z')+kz'(p+z)\right)-\mathrm{A}\left(p(p'+z')+kp'(p+z)\right)}{(1+k)(p+z)(p'+z')\left(\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\right)}\right]100$$

$$\mathrm{G}'=\frac{\mathrm{A}\left(p(p'+z')+kp'(p+z)\right)-\left(\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\right)\left(z(p'+z')+kz'(p+z)\right)}{(1+k)(p+z)(p'+z')\left(\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\right)}\times 100.$$

Se suppongasi $p:p+z::p':p'+z'$ conseguentemente $p:z::p':z'$ sostituendo $\frac{p'}{p}(p+z)$ in luogo di $p'+z'$, e $\frac{p'}{p}z$ in luogo di z' si trova $\mathrm{G}=\left(\frac{(p+z)\,\mathrm{P}}{p+z\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})}-1\right)100$, non altrimenti, che allora quando di due sole merci M, m si tratta; dicasi lo stesso di D, e di G', D'.

Posta $q=q'$, siccome pone *Tartaglia* nel quesito suo 33, e di più fatto, come egli fa, $k=1$, dal che ne segue eziandio $p+z=p'+z'$ diviene

$$\mathrm{G}=\left[\frac{\left(\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})(z+z')-\mathrm{A}(p+p')\right)}{(\mathrm{P}+\mathrm{A})(p+p')+\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})(z+z')}\right]100$$

$$D=\left[\frac{A(p+p')-\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)(z+z')}{(P+A)(p+p')+\frac{e}{n}(P+A)(z+z')}\right]100$$

$$G'=\left[\frac{A(p+p')-\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)(z+z')}{2(p+z)\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)}\right]100$$

$$D'=\left[\frac{\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)(z+z')-A(p+p')}{2(p+z)\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)}\right]100.$$

Non fa di bisogno di esporre le formole nel caso di $\frac{e}{n}=0$. Noterò bensì, che *F. Luca* erra nel metodo, e nel computo nel suo quesito 24.

PROBLEMA VI. Si aggiunga per parte del secondo Mercante la merce m'' il cui prezzo in contanti p'', in baratto $p''+z''$, essendo $p+z+p'+z'+p''+z''>p+x+p'+x'+p''+x''$, e si aggiunga la condizione $Hq(p+z)=q''(p''+z'')$, essendo q'' la quantità della merce m'' si cerca l'equazione tra i prezzi, considerando anche il caso del guadagno?

Quattro essendo le equazioni

1.ª di contanti $\frac{e}{n}(P+A)Q+qp+q'p'+q''p''=PQ-g$

2.ª di baratto $\frac{e}{n}(P+A)Q+q(p+z)+q'(p'+z')+q''(p''+z'')=(P+A)Q$

di condiz. 1.ª $kq(p+z)=q'(p'+z')$
2.ª $Hq(p+z)=q''(p''+z'')$

si troveranno operando similmente che nel Probl. III

$$q=\frac{(p'+z')(p''+z'')(QA+g)}{z(p'+z')(p''+z'')+kz'(p+z)(p''+z'')+Hz''(p+z)(p'+z')}$$

$$q'=\frac{(p+z)(p''+z'')(QA+g)}{z(p'+z')(p''+z'')+kz'(p+z)(p''+z'')+Hz''(p+z)(p'+z')}$$

$$q''=\frac{(p+z)(p'+z')(QA+g)}{z(p'+z')(p''+z'')+kz'(p+z)(p''+z'')+Hz''(p+z)(p'+z')}$$

li quali valori sostituiti nella equazione di contanti daranno l'equazione di g, che fatto

$$\left(PQ-\frac{e}{n}(P+A)Q\right)\left(z(p'+z')(p''+z'')+kz'(p+z)(p''+z'')+Hz''(p+z)(p'+z')\right)=RQ$$

$$QA[p(p'+z')(p''+z'')+kp'(p+z)(p''+z'')+Hp''(p+z)(p'+z')]=SQ$$

sarà $g=\frac{(R-S)Q}{(1+k+H)(p+z)(p'+z')(p''+z'')}$

e fatto

$$(P+A)Q[p(p'+z')(p''+z'')+kp'(p+z)(p''+z'')+Hp''(p+z)(p'+z')]=TQ$$

$$\frac{e}{n}(P+A)Q[z(p'+z')(p''+z'')+kz'(p+z)(p''+z'')+Hz''(p+z)(p'+z')]=UQ$$

risulterà $PQ-g=\frac{(T+U)Q}{(1+k+H)(p+z)(p'+z')(p''+z'')}$.

Laonde $\frac{g}{\frac{e}{n}(P+A)+qp+q'p'+q''p''}=\frac{g}{PQ-g}=\frac{R-S}{T+U}$

e quinci

$$G=\left(\frac{R-S}{T+U}\right)100; \qquad D=\left(\frac{S-R}{T+U}\right)100.$$

Ma per D', G', rapportandoli a $PQ-\frac{e}{n}(P+A)Q$, si avranno

$$D'=\left(\frac{-g}{PQ-\frac{e}{n}(P+A)Q}\right)100=\left(\frac{S-R}{(1+k+H)(p+z)(p'+z')(p''+z'')\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)}\right)100$$

$$G'=\left(\frac{R-S}{(1+k+H)(p+z)(p'+z')(p''+z'')\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)}\right)100.$$

Se suppongasi $p:p+z::p':p'+z'::p'':p''+z''$ le quantità q, q', q'' si ridurranno a

$q=\frac{QA+g}{1+k+H}$; $q'=\frac{k(QA+g)p}{p'(1+k+H)}$; $q''=\frac{H(QA+g)p}{p''(1+k+H)}$ e quinci

$qp+q'p'+q''p''=\frac{(QA+g)p}{z}$; conseguentemente l'equazione in contanti $\frac{e}{n}(P+A)+\frac{(QA+g)p}{z}=PQ-g$, la stessa, che diveniva nel Problema III, essendo una sola la merce del secondo Mercante; onde anche tutte le formole derivate saranno le medesime.

Se vogliasi $q = q' = q''$ si ridurrà l'equazione prima di contanti ad $\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q}+q(p+p'+p'')=\mathrm{PQ}-g$; la seconda di baratto ad $\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q}+q(p+z+p'+z'+p''+z'')=(\mathrm{P}+\mathrm{A})\mathrm{Q}$ dalle quali si ha immantinenti $q = \frac{\mathrm{QA}+g}{z+z'+z''}$, e quinci

$$\mathrm{G} = \left(\frac{\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})(z+z'+z'')-\mathrm{A}(p+p'+p'')}{(\mathrm{P}+\mathrm{A})(p+p'+p'')+\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})(z+z'+z'')}\right)100$$

$$\mathrm{G}' = \frac{\mathrm{A}(p+p'+p'')-\left[\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\right](z+z'+z'')}{(p+z+p'+z'+p''+z'')\left[\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{A})\right]}$$

d'onde si vede quali saranno le espressioni di D, e D'.

Delle quantità, che entrano a costituire le formole generali di g, G, D, G', D', si troverà una qualunque, date le altre tutte.

Esempio. Sia M lana di $\mathrm{P}=12$ al centinajo di libbre in contanti, m pepe di $p=24$, $p+z=28$; m' cannella di $p'=45$, $p'+z'=53$, m'' garofani di $p''=34$, $p''+z''=40$. Vuole il Mercante della lana $\frac{1}{2}$ in pepe, $\frac{1}{3}$ in cannella, $\frac{1}{4}$ in garofani: che deve essere $\mathrm{P}+\mathrm{A}$, onde riesca perfetta la uguaglianza senza guadagno o discapito per parte di alcuno de' due Mercanti? Sarà primieramente $\frac{e}{n}=0$. E dovendo stare $q'(p'+z')$: $q(p'+z')::\frac{1}{3}:\frac{1}{2}::\frac{2}{3}:1$ sarà $q'(p'+z')=\frac{2}{3}q(p+z)$, cioè $k=\frac{2}{3}$; e per dover essere $q''(p''+z''):q(p+z)::\frac{1}{4}:\frac{1}{2}::\frac{1}{2}:1$, e perciò $q''(p''+z'')=\frac{1}{2}q(p+z)$, sarà $\mathrm{H}=\frac{1}{2}$. Dunque dalla formola di g, fatto $g=0$, ne verrà per essere anche $\frac{e}{n}=0$

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{P}[z(p'+z')(p''+z'')+kz'(p+z)(p''+z'')+\mathrm{H}z''(p+z)(p'+z')]}{p(p'+z')(p''+z'')+kp'(p+z)(p''+z'')+\mathrm{H}p''(p+z)(p'+z')}$$

e sostituiti i valori dati

$\mathrm{A} = 2 + \frac{1862}{27427}$, onde $\mathrm{P}+\mathrm{A} = 14 + \frac{1862}{27427}$.

E così trova *Tartaglia* nel suo quesito 35 prendendo in luogo di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ le frazioni $\frac{6}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{3}{13}$, che sono proporzionali. Piglia il prezzo di 6 quantità di pepe in contanti $= 6 . 24 = 144$, in baratto 168; l'importo della quantità di cannella dev'essere nel baratto $\frac{2}{3}$ di quello della quantità del pepe: dunque $= \frac{2}{3} . 168 = 112$; e l'importo della quantità de'garofani $= \frac{1}{2} . 168 = 84$; dunque somma $= 168 + 112 + 84 = 364$. Si cerchino i corrispondenti valori in contanti, e si avrà

$28 : 24 :: 168 : 144 \ldots\ldots 53 : 45 :: 112 : 95\frac{5}{53} \ldots\ldots 40 : 34 :: 84 : 71\frac{2}{5}$
somma $= 310\frac{131}{265}$.

Or argomentisi $310\frac{131}{265} : 364 :: 12 : 14\frac{1862}{27427} = P + A$.

F. Luca prende $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ di $P = 12$, che sono 6, 4, 3; ma $6 + 4 + 3 = 13$; dunque dicasi

$13 : 6 :: 12 : 5\frac{7}{13} \ldots\ldots 13 : 4 :: 12 : 3\frac{9}{13} \ldots\ldots 13 : 3 :: 12 : 2\frac{10}{13}$.

Argomentisi ora

$24 : 28 :: 5\frac{7}{13} : \frac{28}{24} . 5\frac{7}{13} \ldots 45 : 53 :: 3\frac{9}{13} : \frac{53}{45} . 3\frac{9}{13} \ldots 34 : 40 :: 2\frac{10}{13} : \frac{40}{34} . 2\frac{10}{13}$
sarà $P + A = \frac{28}{24} . 5\frac{7}{13} + \frac{53}{45} . 3\frac{9}{13} + \frac{40}{34} . 2\frac{10}{13} = 14 + \frac{226}{3315}$.

Lo spirito del metodo di *Tartaglia* è questo. Dovendo le tre somme di baratto, che dar deve il secondo Mercante esser tra loro in proporzione delle frazioni $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{l}$, saranno parimenti nella proporzione di 1, $\frac{f}{h}$, $\frac{f}{l}$. Dia egli in merce m la somma $q(p + z)$, saranno le somme proporzionali dovute nelle merci m', m'', $\frac{f}{h} q(p + z)$, $\frac{f}{l} q(p + z)$, e l'aggregato di tutte e tre $q(p + z) + \frac{f}{h} q(p + z) + \frac{f}{l} q(p + z)$ $= \left(1 + \frac{f}{h} + \frac{f}{l}\right)(p + z) q$. Il valore in contanti corrispondente al valore in baratto $\frac{f}{h} q(p + z)$ della merce m' si troverà dicendo

$p' + z' : p' :: \frac{f}{h} q(p + z) : \frac{f}{h} . \frac{q(p + z)p'}{p' + z'}$; e similmente con fare

$p'' + z'' : p'' :: \frac{f}{l} q(p+z) : \frac{f}{l} \cdot \frac{q(p+z)p''}{p''+z''}$ sarà questo il valore in contanti della merce m'' corrispondente al valore di baratto $\frac{f}{l} q(p+z)$. Laonde l'aggregato dei valori in contanti sarà

$qp + \frac{f}{h} \cdot \frac{q(p+z)p'}{p'+z'} + \frac{f}{l} \cdot \frac{q(p+z)p''}{p''+z''}$. Si faccia

$$qp + \frac{f}{h} \cdot \frac{q(p+z)p'}{p'+z'} + \frac{f}{l} \cdot \frac{q(p+z)p''}{p''+z''} : \left(1 + \frac{f}{h} + \frac{f}{l}\right) q(p+z) :: \mathrm{P} :$$

$$\frac{\left(1 + \frac{f}{h} + \frac{f}{l}\right)(p+z)\mathrm{P}}{p + \frac{f}{h} \cdot \frac{(p+z)p'}{p'+z'} + \frac{f}{l} \cdot \frac{(p'+z')p''}{p''+z''}} = \mathrm{P} + \mathrm{A}$$

e si troverà questa formola nel caso dell'esempio coincidere con la mia prendendo $\frac{f}{h} = k$, $\frac{f}{l} = \mathrm{H}$.

Lo spirito del metodo di *F. Luca* è il seguente. Prendasi $\frac{\mathrm{P}}{f} + \frac{\mathrm{P}}{h} + \frac{\mathrm{P}}{l}$ e facciasi

$$\frac{\mathrm{P}}{f} + \frac{\mathrm{P}}{h} + \frac{\mathrm{P}}{l} : \mathrm{P} :: \frac{\mathrm{P}}{f} : t :: \frac{\mathrm{P}}{h} : u :: \frac{\mathrm{P}}{l} : y$$

indi si argomenti

$$p : p+z :: t : \frac{t(p+z)}{p} \ldots p' : p'+z' :: u : \frac{u(p'+z')}{p'} \ldots p'' : p''+z'' :: y : \frac{y(p''+z'')}{p''}$$

sarà $\mathrm{P} + \mathrm{A} = \frac{t(p+z)}{p} + \frac{u(p'+z')}{p'} + \frac{y(p''+z'')}{p''} =$

$$\frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{h} + \frac{1}{l}} \left(\frac{p+z}{p} \cdot \frac{\mathrm{P}}{f} + \frac{p'+z'}{p'} \cdot \frac{\mathrm{P}}{h} + \frac{p''+z''}{p''} \cdot \frac{\mathrm{P}}{l} \right).$$

Non si vede a prima vista la ragione perchè sia falso questo metodo, anzi sembra ragionevole, ma l'applicazione smentisce la buona sembianza, riuscendo la frazione $\frac{226}{3315}$ più che di $\frac{7}{27427}$ maggiore della $\frac{1862}{27427}$. A scoprire il difetto paragoniamo la espressione cui conduce di $\mathrm{P} + \mathrm{A}$ con quella, che proviene dal metodo di *Tartaglia* coincidente nelle circostanze dell'esempio con la mia dedotta da' suoi veri principj . Fatto pertanto paragone si ha

$$\frac{1}{\frac{1}{f}+\frac{1}{h}+\frac{1}{l}}\left(\frac{p+z}{p}\cdot\frac{1}{f}+\frac{p'+z'}{p}\cdot\frac{1}{h}+\frac{p''+z''}{p''}\cdot\frac{1}{l}\right)=\frac{\left(1+\frac{f}{h}+\frac{f}{l}\right)(p+z)}{p+\frac{f}{h}\,\frac{(p+z)p'}{p'+z'}+\frac{f}{l}\,\frac{(p+z)p''}{p''+z''}}$$

onde

$$\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{h}+\frac{1}{l}\right)^2=\left(\frac{p+z}{p}\cdot\frac{1}{f}+\frac{p'+z'}{p'}\cdot\frac{1}{h}+\frac{p''+z''}{p''}\cdot\frac{1}{l}\right)$$

$$\left(\frac{p}{p+z}\cdot\frac{1}{f}+\frac{p'}{p'+z'}\cdot\frac{1}{h}+\frac{p''}{p''+z''}\cdot\frac{1}{l}\right)=\frac{1}{f^2}+\frac{1}{h^2}+\frac{1}{l^2}+\left(\frac{p(p'+z')}{p'(p+z)}+\frac{p'(p+z)}{p(p'+z')}\right)$$

$$\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{h}+\left(\frac{p(p''+z'')}{p''(p+z)}+\frac{p''(p+z)}{p(p''+z'')}\right)\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{l}+\left(\frac{p(p''+z'')}{p''(p'+z')}+\frac{p''(p'+z')}{p'(p''+z'')}\right)\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{l}$$

dalla qual equazione viene

$$\frac{p(p'+z')}{p'(p+z)}+\frac{p'(p+z)}{p(p'+z')}=2\,;\quad\frac{p(p''+z'')}{p''(p+z)}+\frac{p''(p+z)}{p(p''+z'')}=2\,;$$

$$\frac{p'(p''+z'')}{p''(p'+z')}+\frac{p''(p'+z')}{p'(p''+z'')}=2$$

ciascuna delle quali equazioni è della forma

$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}=2$, che importa $A^2+B^2=2AB$, $A^2-2AB+B^2=0$

$A-B=0$, $A=B$. Dunque

$$p(p'+z')=p'(p+z),\; p(p''+z'')=p''(p+z),\; p'(p''+z'')=p''(p'+z')$$

d'onde ne segue

$$p'+z'=\frac{p'}{p}(p+z),\; p''+z''=\frac{p''}{p}(p+z),\; p''+z''=\frac{p''}{p'}(p'+z')$$

vale a dire la condizione dei prezzi di baratto in proporzione di quelli a contanti. Il metodo adunque di *F. Luca* è giusto a questa condizione, ed è perciò appunto, per avere cioè qualche verità, che non si appalesa a primo colpo falso. Ma *F. Luca* lo applica fuori del caso di tale condizione: e di fatto dovrebbe nell'esempio essere

$$53=\frac{45\,.\,28}{24}=\frac{45\,.\,7}{6}=\frac{315}{6}=52\tfrac{1}{2},\text{ e } 40=\frac{34\,.\,28}{24}=\frac{17\,.\,7}{3}=\frac{119}{3}=39\tfrac{2}{3}.$$

Erra dunque *F. Luca* di un errore nato senza dubbio dall' avere trovato il metodo giusto in qualche caso compreso nella condizione, e dal non avere avvertita la differenza de' casi per difetto di non essere stato da lui con algebra generalizzato il metodo stesso, come io ho fatto.

PROBLEMA VII. Il Mercante della merce M ne alza il prezzo da P a $P+A$, e ne vuole la parte $\frac{e}{n}$ di $P+A$ in contanti; il Mercante della merce m ne alza il prezzo da p a $p+z$, e ne vuole in contanti la parte $\frac{r}{t}(p+z)$: cercare la equazione tra questi prezzi, ed il guadagno, o discapito dell' un Mercante, o dell' altro?

Le due equazioni in questo caso sono

1.ª in contanti $\frac{e}{n}(P+A)+qp=PQ+\frac{r}{t}(p+z)q-g$

2.ª di baratto $\frac{e}{n}(P+A)+q(p+z)=(P+A)Q+\frac{r}{t}(p+z)q$

sottratta la prima dalla seconda ricavasi $q=\frac{QA+g}{z}$, e rimettendo questo valore nella prima si deduce

$$g=\frac{z\left(PQ-\frac{e}{n}(P+A)Q\right)-QA\left(p-\frac{r}{t}(p+z)\right)}{\left(1-\frac{r}{t}\right)\left(p+z\right)}$$ guadagno rispetto ad $\frac{e}{n}(P+A)Q+\frac{QA+g}{z}\left(p-\frac{r}{t}(p+z)\right)$ onde si ricava

$$G=\left[\frac{z(P-\frac{e}{n}(P+A)-A\left(p-\frac{r}{t}(p+z)\right)}{(P+A)\left(p-\frac{r}{t}(p+z)\right)+\frac{e}{n}z(P+A)}\right]100$$

il corrispondente P' del primo Mercante riportato al capitale

$$PQ+\frac{r}{t}(p+z)q-\frac{e}{n}(P+A)Q=\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)Q+\frac{r}{t}(p+z)\frac{QA+g}{z}=\frac{\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right)Q+QA\cdot\frac{r}{t}}{1-\frac{r}{t}}$$

D'=

$$D' = \left[\frac{z\left(P - \frac{e}{n}(P+A)\right) - A\left(p - \frac{r}{t}(p+z)\right)}{\left(P - \frac{e}{n}(P+A) + A\frac{r}{t}\right)(p+z)} \right] 100 .$$

Dalla formola di G si ricava

$$\frac{r}{t} = \frac{\frac{G}{100}\left(p + z\frac{e}{n}\right)(P+A) + Ap - z\left(P - \frac{e}{n}(P+A)\right)}{\left(\frac{G}{100}(P+A) + A\right)(p+z)} .$$

A questa ultima formola io riferisco il quesito 30 di *Fra Luca* oscurissimo, e male in sè medesimo, e nella sua soluzione coerente, e che io interpreto così. Due Mercanti barattano panno e lana. Il primo del panno lo alza da $5 = P$ in contanti alla canna ad $8 = P + A$ in baratto, e ne vuole $\frac{e}{n}(P + A)$ in contanti; il secondo alza il centinajo di libbre di lana dal prezzo $p = 13$ in contanti al prezzo $p + z = 15$ a baratto: egli dovrebbe giusta il Problema II aver discapito, ma invece vuole guadagnare il 5 per 100 con domandare $\frac{r}{t}(p + z)$ in contanti: qual deve essere questa parte $\frac{r}{t}$? Si trova giusta la formola $\frac{r}{t} = \frac{192}{255}$.

Ecco il quesito di *Fra Luca* tal quale egli lo propone. Doi barattano lana e panno: la canna (intendi del panno) a contanti vale lire 5, ed a baratto si contò lire 8, e vole $\frac{1}{4}$ in contanti; el centinajo di libbre di lana val 13, e contosse 15; e quello della lana guadagnò 5 per cento: dimando, che parte deve all'altro Mercante chiedere a ciò il baratto sia uguale.

Problema VIII. Due Mercanti uno della merce M, l'altro della merce *m* volendo fare tra loro baratto, quello della merce M ne alza il prezzo da P in contanti e costo a $P + X$ in baratto e colla dilazione del tempo T, e quello della merce m ne alza il prezzo da p in contanti e tosto a $p+z$ in baratto, e colla dilazione del tempo t: stabilire la proporzione di $X:z$, tanto se niuno dei Mercanti richieggano in contanti parte alcuna dei prezzi, e tanto se il primo richiegga in contanti la parte $\frac{e}{n}(P+X)$, ed il secondo $\frac{h}{m}(p+z)$.

È primieramente evidente, che nel primo caso $X:z::TP:tp$; spettano a questa proporzione li quesiti 37, 38, 39, 40, 41, 42 di *F. Luca*, e li 37, 38, 39, 40 di *Tartaglia*.

F. Luca nel suo 37 usa tre modi a dimostrare essa proporzione, 1.° si faccia $P:P+X::p:\frac{p(P+X)}{P}$, si prenda $\frac{(P+X)p}{P}-p=\frac{pX}{P}$: poi si argomenti $\frac{pX}{P}:T::z:t$ d'onde $t=\frac{TPz}{pX}$. 2.° Poichè in mesi T il contante P cresce X sarà $\frac{X}{P}$ il crescimento dell'unità in esso tempo T, ed $\frac{X}{PT}$ il crescimento della unità del contante in unità del tempo, cioè in un mese, ed $\frac{X}{PT}.t$ il crescimento della unità del contante in numero di mesi t, e finalmente $\frac{X}{PT}.t.p$ il crescimento del contante p nel tempo t, il quale crescimento dev'essere $=z$; dunque $\frac{X}{PT}.t.p=z$ e quinci $t=\frac{TPz}{pX}$. 3.° Dopo avere dedotto che $\frac{X}{PT}$ è il crescimento della unità del contante P in un mese deduce essere similmente $\frac{z}{pt}$ il crescimento della unità del contante p in un mese; dunque per uguaglianza di condizione $\frac{X}{PT}=\frac{z}{pt}$ d'onde $t=\frac{TPz}{pX}$. *Tartaglia* dice che *F. Luca* conclude qui *per una via oscura:* io non so vedervi questa oscurità, essendo la stessa la unità del contante P, e del contante p.

Similmente dalla proporzione $X : z :: PT : pt$ si fa manifesto, che nel caso secondo diminuito il contante P del contante $\frac{e}{n}(P+X)$, ed il contante p di $\frac{h}{m}(p+z)$ si avrà $X : z :: T\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right) : t\left(p-\frac{h}{m}(p+z)\right)$. Su questa formola più composta versano il quesito 45, ed il 46 di *F. Luca*, ed il 42 di *Tartaglia*. È diverso il quesito 43 di *F. Luca* il quale però soggiugnerò sotto il titolo di

Problema IX. Due barattano panno, e lana. La lana costa al centinajo di libbre in contanti p, al baratto $p+z$, e di questo prezzo ne vuole il Mercante $\frac{h}{m}$ in contanti dopo mesi t; la canna del panno vale a contanti P, in baratto $P+X$: i prezzi sono in lire: si domanda la rendita di una lira al mese?

Qui come si vede non vi ha che uno de' Mercanti, che conceda tempo, siccome uno solo ve ne ha, che richiegga parte del prezzo alterato in contanti dopo uno stabilito tempo; questa parte si è $\frac{h}{m}(p+z)q$. La parte $\left(p+z-\frac{h}{m}(p+z)\right)q$ è quella da lui data tosto in baratto, ed uguagliata da $(P+X)Q$; laonde $Q=\frac{\left(p+z-\frac{h}{m}(p+z)\right)q}{P+X}$. Il contante della quantità della lana è qp, ciò che il Mercante ricava dall'altro in panno vale contanti PQ, ciò che per uguaglianza dovrebbe di più ricevere è $qp-PQ$; ma a tempo di mesi t riceve invece $\frac{h}{m}(p+z)q$; dunque in mesi t, $pq-PQ$ diventa $\frac{h}{m}(p+z)q$, per lo che una lira in mesi t diviene $\frac{\frac{h}{m}(p+z)q}{pq-PQ}$, così che la rendita viene a risultare $\frac{\frac{h}{m}(p+z)q}{pq-PQ}-1$; onde la rendita in un mese si restrigne ad $\frac{1}{t}\left(\frac{\frac{h}{m}(p+z)q}{pq-PQ}-1\right)$.

Nel quesito di *F. Luca* $p=20$, $p+z=30$, $\frac{h}{m}=\frac{1}{2}$, $t=16$, $P=8$, $P+X=10$. Quindi si ha primieramente $Q=\frac{3}{2}q$ la rendita di una lira in mesi $16=\frac{7}{8}$ ed al mese $=\frac{7}{8.16}=\frac{7}{128}$.

Problema X. Il Mercante della merce M, che vale in contanti P, ed alza al prezzo $P+X$ baratta col Mercante della merce m il cui prezzo in contanti è p, ed egli innalza al prezzo $p+z$; ma questi domanda il tempo T esibendo di dare al primo Mercante tanta parte di $(P+X)Q$ in contante, e tanto in merce m, che esso primo venga a guadagnare G per 100 sopra PQ: qual deve essere la parte di $(P+X)Q$ in contante, e quanta la quantità della merce m.

Fatta la proporzione $100 : 100+G :: PQ : PQ+GPQ$ sarà $PQ+\frac{G}{100}PQ$ ciò che col guadagno $\frac{G}{100}$ varrà la quantità Q della merce M al prezzo P di contante dopo il tempo T, e tanto si faccia conto che vaglia al tempo del baratto. Si chiami poi $\frac{e}{n}$ la parte di $(P+X)Q$ che dopo il tempo T deve sborsare in contante il secondo al primo Mercante; e si ponga $=q$ la quantità della merce m, che deve dare: si avranno, come nel Probl. II, surrogato a PQ la quantità $PQ+\frac{G}{100}PQ$ nella prima equazione le due equazioni

$$1.^a\ \frac{e}{n}(P+X)Q+qP=\left(P+\frac{G}{100}P\right)Q$$

$$2.^a\ \frac{e}{n}(P+X)Q+q(p+z)=(P+X)Q.$$

Onde sottraendo la prima dalla seconda si ricava

$$q=\frac{\left[P+X-\left(P+\frac{G}{100}P\right)\right]Q}{z}=\frac{\left(X-\frac{G}{100}P\right)Q}{z}$$

e sostituendo questo valore di q nella prima si rileverà il valore dell' altra incognita $\frac{e}{n}$ che sarà

$$\frac{e}{n}=\frac{z\left(P+\frac{G}{100}P\right)Q-p\left(X-\frac{G}{100}P\right)Q}{z(P+X)Q}$$

e lo stesso valore di $\frac{e}{n}$ si deduce dalla seconda equazione sostituitovi il valore di q.

Esempio nel quesito 44 di *F. Luca*. M è panno che alla canna vale in contanti fiorini $4=P$, a baratto $5=P+X$; m è lana che al centinajo di libbre vale fiorini $10=p$, a baratto $13=p+z$, $Q=25$ canne, e $\frac{G}{100}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. Si ha quinci $q=5$ cioè 5 centinaj di lana, ed $\frac{e}{n}=\frac{12}{25}$ di $(P+X)Q$ cioè di $5 - 25$ vale a dire 60 fiorini.

Di fatto nella 1.ª equazione $60+5\,.\,10=60+50=\left(4+\frac{10}{100}4\right)25=100+10$; nella 2.ª equazione $60+5\,.\,13=60+65=5\,.\,25=125$.

F. Luca forma le ragioni $\frac{13}{13-10}=\frac{13}{3}$, $\frac{5}{5-\left(4+\frac{10}{100}4\right)}=\frac{5}{\frac{3}{5}}=\frac{25}{3}$: indi divide la ragione prima $\frac{13}{3}$, che è minore, per la seconda, che è maggiore, ed il quoziente $=\frac{13}{25}$ si è la parte di $5\,.\,25=125$, che il secondo Mercante deve in lana, che perciò trovasi $=\frac{13}{25}\,.\,125=13\,.\,5=65$, ed $1-\frac{13}{25}=\frac{12}{25}$ di $125=12\,.\,5=60$ si è ciò che egli deve dare in danari. Trasportando dal particolare al generale le due frazioni sono $\frac{p+z}{z}$, $\frac{P+X}{P+X-\left(P+\frac{G}{100}P\right)}=\frac{P+X}{X-\frac{G}{100}P}$, e dividendo la prima per la seconda, risulta la parte $\frac{(p+z)\left(X-\frac{G}{100}P\right)}{z(P+X)}$ di $(P+X)Q=$ $\frac{(p+z)\left(X-\frac{G}{100}P\right)(P+X)Q}{z(P+X)}=\frac{(p+z)\left(X-\frac{G}{100}P\right)Q}{z}$, che fatta uguale a $q(p+z)$ dà, come io ho trovato, $\frac{\left(X-\frac{G}{100}P\right)Q}{z}=q$.

Per riguardo ad $\frac{e}{n}$ si trova $\frac{e}{n}=1-\frac{(p+z)\left(X-\frac{G}{100}P\right)}{z(P+X)}=$ $\frac{z\left(P+\frac{G}{100}P\right)-p\left(X-\frac{G}{100}P\right)}{z(P+X)}$ immediatamente coincidente col valore della mia formola. È dunque giusta la regola di *F. Luca*; ma il mio metodo ne dichiara in generale il fondamento, essendo ad un tempo più lucido, e più semplice.

Problema XI. Due barattarono merci M, ed m; la merce M valeva a contanti P, ed a baratto a termine di mesi T ne volle il Mercante il prezzo $P+X$ richiedendone la parte $\frac{e}{n}$ in contanti; la merce m valeva a contanti p ed il Mercante a baratto ne volle a termine di mesi t il prezzo $p+z$; ed il primo Mercante guadagnò 6 per 100: vi fu poi tra il prezzo P ed il prezzo $P+X$ una data ragione: si cerca qual fosse P? Egli è questo il quesito 48 di *F. Luca* in cui pone $P+X=4\sqrt{P}$, $\frac{e}{n}=\frac{1}{3}$, $T=12$, $p=24$, $p+z=29$, $t=9$, ed il $\frac{G}{100}=\frac{20}{100}$. A sciogliere il quesito egli adopera la regola della *cosa* e suppone P uguale al censo, che noi significaremo per y^2, e continuando a trasportare il particolare numerico al general letterale avremo $P+X=4y$, $P-\frac{e}{n}(P+X)=$ $y^2-\frac{e}{n}.4y$, $P+X-\frac{e}{n}(P+X)=4y-\frac{e}{n}.4y$, $P+X-\frac{e}{n}(P+X)-$

$\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)=X=4y-y^2$ accrescimento di $y^2-\frac{e}{n}\cdot 4y$ per il tempo T; dunque $\frac{t}{T}(4y-y^2)$ accrescimento per il tempo t. Ma il primo Mercante guadagnò G per 100 sul suo capitale $y^2-\frac{e}{n}\cdot 4y$; dunque questo divenne al fine del tempo T, $y^2-\frac{e}{n}\cdot 4y+\frac{G}{100}\left(y^2-\frac{e}{n}\cdot 4y\right)$, e tanto fa conto che valesse la merce M a contanti. Prendi poscia $\frac{t}{T}(4y-y^2)-\frac{G}{100}\left(y^2-\frac{e}{n}\cdot 4y\right)$. Finalmente instituisci la proporzione $y^2-\frac{e}{n}\cdot 4y+\frac{G}{100}\left(y^2-\frac{e}{n}\cdot 4y\right):\frac{t}{T}(4y-y^2)-\frac{G}{100}\left(y^2-\frac{e}{n}\cdot 4y\right):$ $p:z$ o sia

$$\left(1+\frac{G}{100}\right)y-\left(1+\frac{G}{100}\right)\frac{e}{n}\cdot 4:\left(\frac{t}{T}+\frac{e}{n}\cdot\frac{G}{100}\right)4-\left(\frac{t}{T}+\frac{G}{100}\right)y:p:z$$

d' onde

$$y=\frac{p\left(\frac{t}{T}+\frac{e}{n}\cdot\frac{G}{100}\right)4+z\left(1+\frac{G}{100}\right)\frac{e}{n}\cdot 4}{z\left(1+\frac{G}{100}\right)+p\left(\frac{t}{T}+\frac{G}{100}\right)},\ \text{e}\ P=y^2.$$

Ne' dati particolari di *F. Luca* risulta $y=3, y^2=P=9$. Ma nella regola di *F. Luca* non è spiegata la ragione della proporzione, che prescrive d' istituire. A vederla fa di mestieri ricorrere a queste due mie equazioni

1.ª a contanti $pq=\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q+\frac{G}{100}\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q$

2.ª di baratto $(p+z)q=\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q+\frac{t}{T}\times\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q$.

Sottraendo la prima dalla seconda si trova

$$q=\frac{\left(\frac{t}{T}-\frac{G}{100}\right)\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q}{z},$$

il qual valore sostituito nella prima, porge

$$\frac{p}{z}\left[\frac{t}{T}\times Q-\frac{G}{100}\left(P-\frac{e}{n}(P+X)Q\right)\right]=\frac{p}{z}\left(\frac{t}{T}-\frac{G}{100}\right)\times$$
$$\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q+\frac{G}{100}\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q.$$

La qual equazione concorda con la proporzione prescritta da *F. Luca* sostituiti a P ed X i valori da lui attribuiti loro.

Del resto *F. Luca* nota, che correva il proverbio di chiamare *imbratti* li baratti, perchè spesso una delle parti resta dall' altra più astuta imbrattata; e che quando il sensaro mostrava saggio di alcuna merce, se gli domandava, se la dotava, e quanto? alludendo ai matrimonj, che il più delle volte male per avarizia oggi si fanno.

E *Tartaglia* riferendo il quesito 37 di *F. Luca* osserva, che tali quesiti con dilazione di tempo per l' una parte e per l' altra non possono intendersi per veri baratti, non dandosi attualmente nè dall' una parte, nè dall' altra soldo veruno, e che in luogo di baratti si dovrebbero intitolar quesiti di vendite, o sia di vendita, e contro-vendita con consegna di merci, e pagamenti poi con profitto dei danari proporzionato alle dilazioni.

SOPRA LA MISURA DELLE ALTEZZE DEL BAROMETRO

APPENDICE

Alla Memoria inserita nel volume XIII

Del Sig. G. Racagni

Ricevuta li 28 Febbrajo 1812.

Se della grandezza e della importanza non solo, ma ancora della amenità di un filosofico argomento giudicare si può dal numero, e dalla eccellenza degli Autori, che presero ad illustrarlo, sicuramente tra i più grandi, ed importanti, ed ameni dovrà annoverarsi quello della misura delle altezze derivata dalle osservazioni barometriche, sopra di cui hanno scritto tanti, e così illustri Fisici, quanti nella Memoria indicata furono citati da me, che pure ne ho tralasciato alcuno, che già conosceva, e altri ne ignorava forse non pochi. E bene doveva parere, che da tanto moltiplicati travagli, e singolarmente da quelli di *Ramond*, e di *La Place* fosse quel soggetto ridotto alla sua perfezione; nè io aveva preso già a trattarne sulla lusinga di migliorarlo, o di accrescerlo, ma soltanto di mettere in chiaro, e debitamente valutare quello, che scritto ne aveva il *Rohde* massimamente criticando quest' ultimo celebre Matematico, che da tutt' altri aveva riscosso l' applauso più deciso. Ma dopo quella mia Memoria quante opere, e di quanto insigni Fisici mi sono sotto gli occhi venute, che per lo scopo loro primario, o per incidenza a quel soggetto appartengono? E molte si troveranno indicate in questa Appendice, poichè da principio io aveva pensato di stenderla solamente per compiere la promessa data (31, e 37) di ritornare sopra qualche luogo di quella Memoria, che lasciato aveva incompleto per non renderla lunga soverchiamente, o perchè mi mancavano le notizie opportune; ma in seguito mi parve di dovere aggiugnervi altre cose, che ho trovate in quelle opere, o leggendole mi sono sovvenute, e che mi sono sembrate meritare l'attenzione altrui. Dovendo però questa Appendice servire al compimento di quella Memoria io ne seguirò l'ordine dei numeri, e premetterò le denominazioni, e le relazioni principali delle quantità, che in quella si trovano, al fine di schivare la fatica di andare a cercarle.

40. Supposta pertanto la terra sferoidica (4) generata dalla rivoluzione d'una ellisse intorno all'asse minore, e in questa, che ne sarà un meridiano, chiamando

a il semiasse maggiore;

πa il minore;

y l'ascissa presa su quell'asse, cominciando dal centro;

x l'altra coordinata ad un punto qualunque;

z il semidiametro, che da questo punto va al centro;

α l'angolo, che questo semidiametro forma con l'asse maggiore;

β l'angolo, che la verticale di quel punto forma con questo semidiametro;

ψ l'angolo, che la verticale stessa prolungata forma con l'asse maggiore, e che misura la latitudine di quel punto;

v (5) una lunghezza presa salendo, o discendendo dall'ellisse sopra quella verticale;

b la retta, che dall'estremità di quella lunghezza sia condotta al centro;

z' un altro semidiametro, che cade sopra questa lunghezza;

γ l'angolo, che resta compreso tra i due semidiametri z, e z';

ω l'angolo, che il semidiametro z' forma con l'asse maggiore;

g, g', g'' (6) le gravità acceleratrici alla estremità del semidiametro z, all'altra estremità di v, e a quella del semidiametro z';

s costante da determinarsi per la legge delle gravità acceleratrici g, g' secondo le distanze dal centro;

p, p' (7) le pressioni dell'aria alla estremità del semidiametro z, e all'altra estremità di v;

δ, δ' le di lei densità alle estremità stesse;

c, c' i di lei gradi di calore a quelle estremità computati sul termometro centigrado partendo dallo zero assoluto, e non dall'arbitrario;

t, t' i gradi stessi computati dallo zero arbitrario;

q (19) grado di calore, che su quel termometro corrisponde allo zero arbitrario;

h, h' (20) le altezze del mercurio nel barometro a quelle due estremità;

V, V' i di lui gradi di calore presi sopra quel termometro dallo zero arbitrario;

H, H' (29) le altezze h, h' corrette dipendentemente dai gradi del calore;

Δ (33) la densità del mercurio al grado di calore c;

i (16) costante da determinarsi con le osservazioni del termometro;

V, V' (8), V'' (30), M (36) lettere ausiliarie;

m (3) altra lettera ausiliaria $= 1 - n$.

41. Posto L il segno del logaritmo tabulare, e il logaritmo iperbolico di 10, le relazioni tra le quantità corrispondenti a quelle lettere si sono trovate

$$(4)\ y^2 = n^2 (a^2 - x^2);\ z^2 = x^2 + y^2;$$

$$\text{tang.}\ \psi = \frac{y}{n^2 x};\ \text{tang.}\ \alpha = \frac{y}{x};\ \beta = \psi - \alpha$$

$$(5)\ \text{tang.}\ \gamma = \frac{v\ .\ \text{sen.}\ \beta}{z + v\ .\ \cos.\beta};\ \omega = \alpha + \gamma;$$

$$z' = a(1 - m\ .\ \text{sen.}^2\omega - 3m^2\ .\ \text{sen.}^2\omega\ .\ \cos.^2\omega);$$

$$(6)\ g = g'';\ (7)\ \delta' g' \delta v = -\delta p';$$

$$(11)\ \frac{\delta p'}{c'} = \frac{\delta' p}{c};\ (19)\ \frac{c \delta g' \delta v}{c' p} = -\frac{\delta p'}{p'};$$

$$(16)\ c' = \sqrt{(c^2 - iv)};\ (19)\ e = 2,302585;$$

$$c = q \pm t;\ c' = q \pm t'\ (31)\ \frac{H}{H'} = \frac{hf(q+v)}{h'f(q+v')};$$

$$(19)\ v = \frac{epq}{cbg}\left(1 + \frac{t+t'}{2}\right)(Lp - Lp');$$

$$(36)\ M = 18336\left(1 + \frac{m.\cos.2\psi}{2} - \frac{m^2}{4}\left(\tfrac{1}{2} - \cos.2\psi + \tfrac{5}{4}.\cos.4\psi\right)\right);$$

42. Se il calore per tutta la lunghezza v della colonna d'aria, e la gravità g suppongansi costanti, sarà $c = c'$, $g = g'$, l'equazione (11) diverrà $\delta p' = \delta' p$, e la (7) sostituendo il valore di δ', e integrando come al num. 19 darà $v = \frac{ep}{\delta g}(Lp - Lp')$; ed essendo (20, e 33) $p = \Delta hgc$, $p' = \Delta h'gc$, per ragione della gravità, e del calore costanti resterà $v = \frac{e\Delta ch}{\delta}(Lh - Lh')$, che è l'espressione con l'analisi infinitesimale derivata della teorica anticamente dimostrata dall'*Hallejo* per mezzo delle proprietà dell'Iperbola tra gli assintoti, di cui già *Newton* (*Princ. L. II, prop. XXII*) avvertì, che valeva soltanto posta costante la gravità, e aggiunger doveva ancora posto costante il calore. E questa è poi la formola, che in queste supposizioni si deve riguardare come fondamentale, poichè dopo l'*Hallejo* pressochè tutti gli altri fisici non hanno fatto altro che introdurre alcuni cambiamenti nel di lei coefficiente $\frac{\Delta ch}{\delta}$, ovvero nel fattore logaritmico $Lh - Lh'$.

43. Se alla lunghezza v aggiungasi un'altra lunghezza v', alla cui estremità siano p'', δ'', h'' le grandezze analoghe alle p, δ, h, per la legge di *Mariotte* (8) essendo $\frac{p}{\delta} = \frac{\Delta hgc}{\delta} = \frac{p''}{\delta''} = \frac{\Delta h'' gc}{\delta}$ si avrà $v' = \frac{e\Delta ch''}{\delta''}(Lh' - Lh'')$, e posta $v = v'$ resterà $Lh - Lh' = Lh' - Lh''$, e perciò ancora $Lp - Lp' = Lp' - Lp''$ cioè pigliando le lunghezze uguali v, v', o le distanze dall'ellisse crescenti in progressione aritmetica le pressioni, o le densità dell'aria, o le altezze barometriche corrispon-

denti saranno in progressione geometrica, che è la legge stabilita pure dall' *Hallejo*.

44. Il coefficiente $\frac{\Delta hc}{\delta}$ secondo la legge del *Mariotte*, tenendo costanti il calore, e la gravità, è pure costante, e rappresenta l'altezza, che avrebbe l'atmosfera partendo dal luogo, dove si fossero trovate l'altezza barometrica h con la densità δ sotto al calore c fino alla sommità, se tutta la colonna dell'aria superiore a quel luogo insieme a questo calore avesse costante ancora quella densità. Quel coefficiente, o questa altezza dell'atmosfera si può chiamare il modulo dei logaritmi atmosferici, perchè in questi si riducono i tabulari moltiplicati per quello; infine quel coefficiente rappresenta la sottangente di una logaritmica, nella quale, le ascisse esprimendo le altezze, le ordinate esprimerebbero le pressioni, o le altezze barometriche.

45. Ora riducendo il calcolo d' *Hallejo* alle misure francesi. Egli sotto all'altezza barometrica h di pollici 28 aveva trovato $\frac{\Delta}{\delta} = 10891$, e perciò $\frac{e\Delta h}{\delta} = 2{,}302585 \,.\, 10891 \,.\, 28^{pol.} = 9741^{tes.}$, e posto $c = 1$, $v = 9741\,(\mathrm{L}h - \mathrm{L}h')^{tes.}$. Ma le misure derivate da questa formola erano tanto lontane da quelle prese coi metodi geodetici, che i Fisici non potendo in questi supporre errori tanto gravi avevano generalmente deposta la speranza di potere alcun vantaggio conseguire dalle osservazioni barometriche per la misura delle altezze. In seguito però l'attenzione loro a questo argomento ancora rivolsero *Maraldi* (*Mem. de Paris* 1703), *De la Hire* (*ivi* 1709), *Scheuchzero* (*Trans. Philos. Lond. N.* 405), *Cassini* (*Mem. de Paris* 1705, *e* 1733), *Daniele Bernoulli* (*Hydrod. sect. x*), *Cassini de Thuri* (*Mem. de Paris* 1740), e *Horrebovio* (*Elem. Phys. cap. VIII, e Nouv. Bibl. Germ. d'Octob., Nov., e Decemb.* 1750), dei quali mi basta di averli indicati, perchè i lavori loro si possono vedere esposti esattamente, e giudicati da *De Luc* (*Recher.* 1, *Part. Chap. IV*).

46. Ma debbo alcun poco trattenermi intorno a *Bouguer*, che veramente si distinse sopra tutti quelli, che di questo argomento trattarono prima di *De Luc*. Egli (*Mem. Paris* 1753) diede una regola non molto diversa da quella d'*Hallejo*, ma derivata da un grande numero d'esperienze, in cui stabilisce, che se prendasi la differenza dei logaritmi delle due altezze barometriche espresse in linee francesi ritenendone le sole prime quattro cifre dopo la caratteristica, basterà sottrarne la parte trentesima per avere espressa in tese l'altezza della stazione superiore sopra l'inferiore, ossia la distanza verticale delle due stazioni, nelle quali le due altezze barometriche saranno state osservate; laonde usando le tavole logaritmiche a sette decimali la formola Hallejana si convertiva in quest'altra

$$v = 10000(\mathrm{L}h - \mathrm{L}h')\left(1 - \frac{1}{30}\right) = 10000(\mathrm{L}h - \mathrm{L}h').\frac{29}{30} = 9667(\mathrm{L}h - \mathrm{L}h');$$

e questa infatti serve a determinare le altezze di *Pitchincha*, e di *Choussai*, che non discordano più di una tesa dalla misura geodetica, e aggiunge *Bouguer*, che avrebbe potuto giustificarla con più di altri trenta esempi.

47. Egli stesso però avvertì, che quella sua regola non riusciva nella parte inferiore delle Cordilliere, nè sulle montagne della Zona torrida, nè sopra quelle d'Europa, e volendo pure procurare di dare la cagione di quella diversità, che degna era di rimarco, Egli da principio ricorda, che alcuni Fisici sembravano stabilirla nel calore, che si prova presso alla superficie della terra in proporzione maggiore che in alto, parendo loro, che quello dovesse turbare la proporzione geometrica nelle pressioni, o densità dell'aria, o nelle altezze barometriche corrispondenti a diverse elevazioni prese in progressione aritmetica, che è la base del calcolo Hallejano (43), da cui è ancora derivata la formola antecedente; e confessa egli in seguito, che la considerazione del calore è veramente importantissima, e serve qualche volta a risolvere la difficoltà, ma secondo lui il più delle volte non fa

che accrescerla, poichè il calore è più forte abbasso che ad una certa altezza; e nondimeno crede egli, che l'aria abbasso sia sempre quasi più condensata a proporzione, che non lo comporta la regola dei pesi comprimenti detta di *Mariotte* (8), perchè cercando l'altezza delle montagne di 300 a 400 tese, e paragonandole con altre più basse l'errore risultante è sempre in difetto; onde a lui pareva chiaro, che l'aria inferiore occupasse in proporzione meno spazio; o avesse minore elasticità, non ostante che il calore tendesse a renderla maggiore.

48. Così credendo di aver confutata l'altrui spiegazione di quella differenza *Bouguer* per darne una, che gli sembrava migliore, premette quelle stesse idee, che poi con maggiore precisione sciolte hanno dato luogo alla distinzione della elasticità assoluta, o dello sforzo assoluto, che fa un corpo compresso per ritornare allo stato primiero, e della elasticità specifica, o dello sforzo, che il corpo compresso fa, in proporzione della propria densità; laonde in ciascun pezzo d'acciajo l'elasticità assoluta è lo sforzo, che oppone ad una data forza comprimente; e in diversi pezzi d'acciajo l'elasticità specifica è lo sforzo corrispondente al grado diverso di compressione, che soffrono per una medesima forza comprimente, che è l'esempio addotto da *Bouguer*, e io vi aggiugnerò l'altro dei diversi gas, ciascun dei quali ha la propria elasticità assoluta, con cui resiste ad una data forza comprimente, e una diversa elasticità specifica, perchè da una data forza soffre una diversa compressione, o si lascia ridurre ad una diversa densità; laonde nello stato di quiete l'elasticità assoluta è sempre eguale alla forza comprimente, e la specifica è in ragione diretta di questa forza, e reciproca della densità, a cui il corpo per questa si lascia ridurre.

49. Poste pertanto queste nozioni *Bouguer* primamente immaginò, che le parti dell'aria non avessero tutte la stessa elasticità specifica ma diversa in modo, che tutte si lasciassero comprimere secondo la legge di *Mariotte* in propor-

zione dei pesi comprimenti, ma fatta ancora astrazione dal calore non tutte dallo stesso peso si lasciassero comprimere egualmente, ma altre più, e altre meno; e come vedeva i liquori meno gravi portarsi sopra i più gravi, così immaginò in secondo luogo, che ancora nell'atmosfera più in alto dovessero portarsi le parti specificamente più elastiche, o che sotto ad un dato peso si lasciano comprimere di meno, e più abbasso successivamente dovessero restare le parti specificamente meno elastiche, o che sotto ad un dato peso si lasciano comprimere di più, laonde sebbene in ciascuna sorte dovesse valere la legge di *Mariotte*, non potesse però in tutte valere l'altra di *Hallejo* (43), che ad altezze crescenti in progressione aritmetica le densità corrispondenti scemino in progressione geometrica. Nè *Bouguer* fu il solo a sospettare l'aria atmosferica essere un composto di fluidi forniti di proprietà diverse, poichè il *P. de Beze* (10) pensò pure a quel modo, e similmente pensarono quelli, che credendosi di avere osservate le rifrazioni del lume nella zona torrida diverse da quelle delle zone temperate posero l'aria tra i Tropici dotata di una forza refringente maggiore che fuori di essi, come riferisce *Humboldt* (*Essai sur les refrac. astron. Voyag.* 4, *P. V. I*), che li confuta; e in fine il Generale *Roy* sospettò, che le parti dell'atmosfera siano specificamente meno pesanti all'equatore che verso i poli, laonde i venti sud, e sudovest nelle medie latitudini recandovi l'aria meno pesante dall'equatore facciano discendere il barometro, e i venti Nord recandovi l'aria più pesante dai poli lo facciano alzare dentro un'oscillazione, che nei paralelli medii d'Europa giugne fino a due pollici.

50. Ma questo bel discorso di *Bouguer* non serve al fine proposto. *De Luc* (*Recher. Vol. I, pag.* 181) cominciò ad opporgli, che conveniva supporre una differenza di specifica elasticità molto grande, perchè altrimenti la sola resistenza, che oppone l'aria alla disunione delle sue parti, bastava come nella differenza del peso specifico a contenere quelle, che ten-

tendono a discendere, o a salire; e aggiunse poi, che la sola azione dei venti doveva impedire la disposizione delli strati atmosferici secondo i gradi della loro specifica elasticità; e finalmente osservò, che gli esperimenti dei pendoli instituiti da *Bouguer* potevano bene mostrargli, che le densità dell' atmosfera non erano secondo la legge d'*Hallejo*, ma non scoprirgli la cagione della differenza. Lasciate però queste ragioni del *De Luc*; io dirò, che le osservazioni più esatte ci hanno mostrate con la maggiore evidenza le cagioni, che influiscono sulla misura delle altezze col barometro, e che bastano a spiegare, e anche a togliere tutte le anomalie, che vi si sono trovate, senza aver bisogno di alcuna differenza intrinseca, e indipendente dal calore tra le parti dell' aria; e quando bene questa si volesse concedere, non appare però la ragione, per cui le più elastiche si dovessero collocare di sopra, e le meno elastiche di sotto, come accade per la gravità, perchè in questa si vede una cagione atta a produrre quella disposizione, e non così nella elasticità; e inoltre *Dalton* (10) ha dimostrato, che i fluidi gassosi diversi ancora per la specifica gravità si mantengono diffusi insieme nello stesso spazio senza quasi agire uno sull' altro come fanno i liquidi.

51. Dopo queste premesse chi crederebbe di potere difendere *Bouguer*, e sostenere la di lui opinione per la ragione, che l'elasticità dell' aria è diversa almeno secondo la temperatura locale diversa, quando egli stesso ha espressamente esclusa la considerazione di ogni circostanza relativa al calore? Nondimeno l'*Horsley* (*Trans. Phil. Vol.* LXIV) non pretende quello solamente, ma dice, che egli si crederebbe colpevole di empietà verso le ceneri di un uomo, la di cui memoria sarà sempre cara alla scienza, se non pigliasse l'occasione, che aveva di lavarlo da un rimprovero, che gli era stato fatto in termini generalissimi, e con poca amenità sull' oggetto in questione, e che non era fondato che in parte; quasichè quelli, che hanno fatto quel rimprovero a *Bouguer*, non sa-

pessero, che l'elasticità dell'aria è diversa secondo la diversa temperatura; ovvero indicando una svista di questo celebre Autore avessero voluto diminuire la stima, di cui gode meritamente; ovvero in fine la memoria di lui dovesse essere meno cara alla scienza, perchè in qualche pensamento ha pagato il suo tributo all'umanità.

52. Io non ho prima d'ora parlato di quella Memoria d'*Horsley*, che conosceva già da molto tempo non solo perchè l'oggetto suo di ridurre alle misure inglesi i risultamenti delle osservazioni espressi da altri in misure francesi era per noi poco interessante, ma molto più perchè mi parve, che egli non avesse bene compreso lo spirito dell'opinione di sopra riportata di *Bouguer*, nè della critica, che a questi fu fatta da molti, nè del metodo di *De Luc* per trovare la misura delle altezze col barometro. E quanto a questo metodo io mi sono compiacciuto trovandomi d'accordo coll'estensore della Biblioteca britannica (*an.* 1810, *N.* 340, 4, 6, *e* 7), che in quattro eccellenti articoli ha raccolto tutto il migliore, che prima di quell'anno era stato sopra quella misura insegnato; ma vedendo che quest'uomo celebre in un'opera tanto sparsa ampiamente, e stimata con ragione riporta con segni di approvazione le riflessioni, e le censure, che prima giacevano nella Memoria ben poco conosciuta di *Horsley*, non ho potuto non risolvermi a tentare di scolparne me, e gli altri, contro ai quali quelle furono dirette. E egli è per lo stesso motivo, che io mi tratterrò ancora qualche poco sopra il primo di quei articoli, in cui mi sembra, che sia attribuito all'*Horsley* quello, che non gli compete, e che siano approvate alcune di lui idee analoghe al presente soggetto, che a giudizio mio sono ben poco felici.

53. La formola [41 (7)] $\delta' g' \delta v = -\delta p'$ si può integrare in molte supposizioni oltre a quella del num. 19, che riguarda il solo metodo di *La Place*; infatti suppongasi δ' proporzionale a $p'\pi$, e g' proporzionale a $\delta \frac{1}{(r+v)'}$, quella equa-

zione diverrà $\frac{\delta v}{(r+v)^s} = -\frac{\delta p'}{p'^{\pi}}$, ed integrando si avrà $\frac{(r+v)^{1-s}}{1-s} = -\frac{p'^{\,1-\pi}}{1-\pi} + c$; e poichè posta $v = 0$ e $p = p'$ sarà $\frac{r^{1+s}}{1-s} = -\frac{p'^{\,1-\pi}}{1-\pi} + c$, onde si avrà la formola $\frac{(r+v)^{1-s} - r^{1-s}}{1-n} = \frac{p^{1-\pi} - p'^{\,1-\pi}}{1-\pi}$, la quale si applica a tutte le ipotesi della gravità (6), e delle pressioni, o densità ponendo i corrispondenti valori di s, e π, fuori dei casi della gravità, o della pressione, che decresca nella ragione, in cui crescano le distanze semplici, poichè allora ponendo $s = 1$, o $\pi = 1$, uno, o l'altro, o ambedue i membri della formola divengono $\frac{0}{0}$; ma in questi casi la prima formola s'integra o tutta o in parte coi logaritmi essendo $\int \frac{\delta v}{r+v} = e\mathrm{L}(r+v) + c = e\mathrm{L}\frac{r+v}{r}$; e $\int -\frac{\delta p'}{p'} = -e\mathrm{L}p' + c = e\mathrm{L}\frac{p}{p'}$, onde nel caso di $s = 1 = \pi$ si avrebbe $\frac{r+v}{r} = \frac{p}{p'}$.

54. Analizzando le trovate formole ritengasi $\pi > 0$, e suppongasi $v = \infty$ per avere la pressione alla distanza infinita; e poichè $\frac{1}{\infty}$ sollevato ad una potenza positiva è zero, sarà $\frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{\infty^{s-1}} - \frac{1}{r^{s-1}}\right) = \frac{p^{1-\pi} - p'^{\,1-\pi}}{1-\pi}$; laonde se sia $n > 1$, e perciò $\frac{1}{\infty^{s-1}} = 0$, rimarrà $\frac{1}{(s-1)r^{s-1}} = \frac{p^{1-\pi} - p'^{\,1-\pi}}{1-\pi}$, e quindi $p' = \left(p^{1-\pi} + \frac{\pi-1}{(s-1)r^{s-1}}\right)^{\frac{1}{1-\pi}}$, cioè a dire la pressione p' alla distanza v infinita dalla terra sarebbe finita; e diverrebbe indeterminata, o infinita nelle altre supposizioni di $n = 1$, ovvero $n < 1$.

55. Suppongasi poi $v = -r$, e $v + r = 0$ per avere la pressione p' alla distanza zero dal centro; la formola (33) di-

verrà $\frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{0^{s-1}}-\frac{1}{r^{s-1}}\right)=\frac{p^{1-\pi}-p'^{\,1-\pi}}{1-\pi}$, e posta $s>1$ essendo $\frac{1}{0^{s-1}}=\infty$ la pressione al centro in questa supposizione diverrà $p'=\infty^{\frac{1}{1-\pi}}$, cioè infinita. Se poi nella formola (53) $\frac{(r+v)^{1-s}}{1-s}=-\frac{p'^{\,1-\pi}}{1-\pi}$ per determinare la costante c suppongasi, che posta $v=\infty$ divenga $p'=0$, sarà $c=\frac{\infty^{1-s}}{1-s}$, e quindi si avrà $\frac{(r+v)^{1-s}}{1-s}=-\frac{p'^{\,1-\pi}}{1-\pi}+\frac{\infty^{1-s}}{1-s}$; e posta $v=-r$ sarà $\frac{v^{1-s}}{1-s}=-\frac{p'^{\,1-\pi}}{1-\pi}+\frac{\infty^{1-s}}{1-s}$, e posta $s>1$ seguirà $p'=\left[\left(\frac{1-s}{\pi-1}\right)\times 0^{s-1}\right]^{\frac{1}{\pi-1}}$, ossia la pressione al centro nulla. Nè seguirà altrimenti posta $s=1$, e solamente quella pressione sarà finita nel caso della prima formola posta $s<1$.

56. Questi risultamenti, che si possono trovare variando il valore di m, e che possono sembrare assurdi, e paradossi furono con qualche differenza di metodo, e senzachè uno sapesse dell'altro quasi al tempo stesso dimostrati da *Taylor* (*Meth. increm. Schol. prop.* 26), e dal *Varignon* (*Mem. Paris* 1716); e poichè lo stesso *Horsley* cita *Taylor*, non si può bene comprendere, perchè l'Estensore della Biblioteca britannica a lui gli attribuisca quasi gli avesse egli avvertiti pel primo; e fa poi meraviglia, come l'*Horsley*, e questo Estensore non abbiano prodotta la riflessione, che quei paradossi non seguono generalmente ma solo fatte certe supposizioni del valore di s, ossia della legge, secondo la quale la gravità si cambia in proporzione delle distanze, e risultano poi solamente dalla contradizione, che si mette nelle condizioni, che si stabiliscono per determinare la costante nell'integrazione; poichè infatti la condizione della densità infinita al centro ripugna alle altre due, cioè che essa alla distanza finita r sia

eguale a p finita, e che sempre corrisponda in qualche ragione diretta al peso comprimente, perchè allora seguirebbe, che la pressione finita p insieme con l'altra parimenti finita, che può risultare dal peso finito dell'aria contenuta nella colonna dell'altezza r, facesse una pressione infinita. Quando poi si considera la distanza infinita dal centro, o la densità ivi sia finita, ovvero nulla, chiaro è, che il peso dell'aria contenuta in una colonna infinita deve rendere al centro, e alla distanza r dal centro infinita la densità, prescindendo dalla supposizione particolare, che questa si accostasse alla distanza infinita diminuendosi con qualche legge assintotica.

57. Ma tutte quelle conseguenze provano soltanto, che la legge della densità, che mantenga una proporzione costante coi pesi comprimenti, non può valere come nei casi dell' estrema rarefazione, o condensazione (9), così in quelli della lunghezza infinita, o nulla della colonna dell'aria premente. Nè quelli sono i soli casi, nei quali applicando l'Algebra alle leggi fisiche tratte dalle osservazioni, o dalle esperienze ci incontriamo in paradossi, poichè ne vedremo qualche altro in questa Memoria; ma tutti sembrano provenire da uno stesso principio, che la natura non ammette i casi delle quantità grandi, o piccole infinitamente, che si considerano dai matematici, e che sole conducono ad altri risultamenti di quantità grandi, o piccole infinitamente, che nella fisica ripugnano; quindi pare, che l'Estensore della Biblioteca britannica non dovesse mostrare quasi di approvare il sogno d'*Horsley*, che appoggiato a quelle conseguenze vorrebbe stabilire infinita l'atmosfera della terra, e degli altri corpi mondani, perciocchè le osservazioni mostrano, che l'atmosfera della terra, della luna, e del sole capace di riflettere, o di rifrangere il lume è assai limitata; e secondo la teorica quella non può estendersi oltre al limite di distanza, in cui la forza risultante dalla forza centrifuga nata dalla rivoluzione intorno all'asse combinata con le attrazioni vicendevoli dei corpi mondani, per cui le parti atmosferiche ten-

dono ad allontanarsi dal corpo centrale, riuscirebbe maggiore di quella, con cui tendono ad accostarvisi, come può vedersi presso *Frisio* (*Op. Vol. III, pag.* 116, *e seg.*). Nè con verità afferma *Horsley*, che a lui consenta *Newton* (*Opusc. de Mundi sistem.*), perchè questi calcola la rarità, a cui si ridurrebbe l'aria, supposta la legge di *Mariotte* ad una certa altezza dell'atmosfera solamente per addurre un esempio atto a far comprendere la rarità, che aver possono i vapori, che sortono dalle comete; ma in quel luogo non stabilisce egli cosa alcuna per riguardo all'estensione della nostra atmosfera, che egli per le ragioni già addotte non avrebbe mai supposta infinita.

58. Ma ecco un altro paradosso avvertito dall' *Horsley*, il quale sembra, che molto se ne dilettasse. Sia dall'unità espressa l'elasticità dell'aria per un dato grado di calore, e suppongasi, che cambiandosi questo per gradi eguali ancora quella si cambj per una costante quantità k, come credono di avere osservato alcuni (12), onde al grado n esimo sopra, o sotto quel grado di calore debba essere $1 \pm nk$. Dunque salendo nell'atmosfera dovrebbe esservi un limite, dove essendo $1 - nk = v$ l'elasticità divenisse nulla, e oltre a quello divenendo $1 < nk$ la elasticità diverrebbe negativa; così secondo le osservazioni di *De Luc* per esempio supponendo 1 l'elasticità, o il volume dell'aria a gradi $16\frac{3}{4}$ Reaumuriani, poichè essa cambia il volume per $\frac{1 . mo}{215}$ ad ogni grado, l'elasticità a $16\frac{3}{4} - n$ sarebbe $1 - \frac{n}{215}$, e diverrebbe nulla a gradi $n = 215$, e negativa a gradi $n > 215$. Ma chi può intendere in che consista questa elasticità nulla, o negativa, per cui l'aria dovrebbe tendere non a comprimersi diminuendo il calore, ma a dilatarsi?

59. L'*Horsley* avrebbe potuto accrescere il numero dei paradossi aggiugnendovi quello del mercurio, e di ogni altro corpo, che mostri i cambiamenti di volume eguali in corri-

spondenza ai cambiamenti eguali di calore, perchè se ancora nel mercurio la densità al zero del termometro centigrado sia espressa dall'unità, siccome secondo *La Place* per ogni grado esso si cambia per $\frac{1.mo}{5412}$, così al grado n . *mo* la sua elasticità diverrebbe $1 \pm \frac{n}{5412}$, e il mercurio dovrebbe cessare di ristringersi al freddo di 5412°, e crescendo questo ancora di più per l'elasticità negativa dovrebbe tendere a dilatarsi; il che è impossibile. Ma non è da fare caso alcuno di questi assurdi, o paradossi, che in natura non hanno mai luogo, e servono solo a provare, che niun corpo può cambiare sempre il volume in una proporzione costante col calore; e quelli che tengono questa supposizione, riguardano il cambiamento del volume non già vicino ai gradi estremi del calore, dove l'assurdità si manifesta, mai nei gradi medj, dove l'ineguaglianza della proporzione tra i cambiamenti del calore, e del volume non è così grande, che non possa trascurarsi senza errore sensibile.

60. Ancora la formola [41 (7)] si può integrare con ipotesi diverse da quelle del *La Place* (16); poichè suppongasi $c' = c^{\mu}(c^n \pm iv)^k$, quella diverrà $\frac{c^{1-\mu}\delta g'}{p}(c^n \pm iv)^k\,\delta v = -\frac{\delta p'}{p'}$; e integrando $\pm\frac{c^{1-\mu}\delta g'}{ip(1-k)}(c^n \pm iv)^{1-k} = -e\mathrm{L}p' + c$; e poichè posta $v = 0$ diviene $p' = p$, sarà $\pm c^{1-\mu}\delta g' c^{n-nk} = -e\mathrm{L}p + c$; laonde si avrà la formola $\pm\frac{c^{1-\mu}\delta g'}{ip(1-k)} \times [(c^n \pm iv)^{1-k} - c^{n-nk}] = e(\mathrm{L}p - \mathrm{L}p')$, che vale sempre fuori del caso di $k = 1$, nel quale la formola prima diviene $\frac{c^{1-\mu}\delta g'}{p}(c^n \pm iv)^{-1}\,\delta v = -\frac{\delta p'}{p'}$, e integrando si ha $\pm\frac{c^{1-\mu}\delta g'}{ip}\mathrm{L}(c^n \pm iv) = -\mathrm{L}p' + c$, e poichè posta $v = 0$ diviene $p' = p$, sarà la formola finale $\pm\frac{c^{1-\mu}\delta g'}{ip}[\mathrm{L}(c^n \pm iv)] - \mathrm{L}c^n = \mathrm{L}p - \mathrm{L}p'$;

e come questa esprimerà l'ipotesi di *Lagrange* del calore (16), che salendo decresce nella ragione aritmetica con le altezze v ponendo $n = k = -i = 1$, e $\mu = 0$, così quella esprimerà l'ipotesi di *La Place* ponendo $n = 2$, $k = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$, $i = -1$; d'*Eulero* ponendo $n = 0$, $k = -1$, $\mu = 1$; e di quelli, che tengono il calore costante eguale al medio aritmetico tra i due gradi, c, e c' ponendo $k = 0$, e $c^{\mu} = \frac{c + c'}{2}$.

61. Quale però tra queste ipotesi debbasi scieglierе, è ancora così incerto, come quando io pubblicai la mia Memoria, e forse lo sarà ancora per lungo tempo; perciocchè tra le cagioni, che riscaldano l'atmosfera, le principali sono l'estinzione del lume solare, che l'attraversa, l'estinzione del calorico radiante riflesso dalla terra, e le correnti, che ascendono; lasciando la comunicazione del calore da una molecola all'altra dell'aria, che è stata contradetta da *Rumford*, e i cambiamenti di temperatura, che possono provenire dai cambiamenti di stato, che accadono nelle parti stesse dell'aria, o nei vapori, e in altre sostanze, che vi sono framischiate. Ora pare, che l'estinzione del lume debba essere in ragione diretta della densità dell'aria, e del lume stesso; quindi il massimo di quella del lume riflesso sembra dover essere in molta vicinanza della terra, dove e l'aria, e il lume hanno maggiore la densità; laddove il massimo di quella del lume diretto pare dover essere ad una certa distanza dalla terra, perchè la densità di questo lume è maggiore in alto, dove è minore la densità dell'aria: ma finora non si è scoperto alcun dato per conoscere i luoghi di quei due massimi, o del loro medio, nè la legge, con cui il calore allontanandosi da quei luoghi si cambia; le correnti poi, che ascendono per l'atmosfera, sono assai più lente sopra del mare, o delle campagne coperte di neve, che sopra i deserti, e altri strati nudi, o lisci; e sono assai diverse sulle montagne formate a' piani con una certa gradazione elevati, che sul pendìo delle montagne piramidali; e infine sono interrotte, e

spesso

spesso cambiate per ragione delle correnti di altre direzioni; quindi sono generalmente tanto irregolari, che non è da sperare di conoscerne gli effetti con qualche legge costante.

62. E come poco ci istruisce la Teorica, così accade delle osservazioni. Veramente *Humboldt*, che ha avuto occasione di osservare i gradi del calore dal livello del mare fino alla cima dei più alti monti delle Cordilliere, e gli ha paragonati con le osservazioni di altri paesi (*Voyage... Vol. I, Sur la limite inferieure des neiges perpetuelles. Mem. lue à la prem. Clas. de l'Instit. nation. Nivose an. XIII*, e *Journ. des Min. Vol.* LXXIV) in mezzo alle perturbazioni prodotte da tante cagioni accidentali pare, che giunto sia a determinare 1.° che poichè salendo nell'atmosfera ad una distanza non grande dalla terra si arriva ad una temperatura fredda quasi costante, e questa alla superficie della terra è molto varia secondo le diverse ore del giorno, o stagioni dell'anno, ancora l'altezza, a cui si deve salire, perchè il termometro si abbassi di un grado, deve essere una funzione inversa della temperatura della superficie, cioè maggiore, o minore, secondochè questa è minore, o maggiore; ma la differenza non oltrepassa certi limiti, perchè nel freddo più grande arriva ai 244 metri, e non scema, che di un quinto circa dai 29° fino ai 25°. 2.° Che i risultamenti medj delle misure di quell'altezza prese in diversi tempi dell'anno fino ad una certa distanza dalla terra sono funzioni della temperatura media delle diverse latitudini; ma oltre a quella distanza di metri 470 circa il calore sembra distribuirsi nell'atmosfera con una certa uniformità, onde l'altezza corrispondente al decremento medio di un grado è a un dipresso la medesima dentro, e fuori dei Tropici; e infatti *Matthieu* da due osservazioni di *Swanbergh*, e da una formula di *La Place* ha dedotta quell'altezza di metri 243, 8, e di metri 243, sebbene il calore nella prima fosse — 13°, e nella seconda — 29°; e le osservazioni di *Humboldt* sopra Chimboraço gli hanno data di metri 196, ossia di tese 98 quell'altezza, che le tempe-

rature medie fissano a 100 partendo dal livello del mare; e *Say Lussac*, essendo il termometro inferiore a 27°, 7 lo trovò ad 8°, 5 all'altezza di 3700 metri; e a — 9° all'altezza di 6980 metri, onde nella prima colonna il decremento di un grado era all'altezza di metri 193, e per l'altra, che sta tra le altezze di metri 3704, e 5876 di Teneriffa, e di Chimboraço, era all'altezza di metri 183; e sarebbe di metri 187 all'altezza di tutta la colonna, che era di metri 7000. Siccome però nel tempo dell'ascensione il caldo a Parigi crebbe di tre gradi, supponendo contro ogni probabilità, che quel cambiamento si fosse propagato ancora a quella altezza, a cui era *Say Lussac*, l'altra corrispondente al decremento di un grado sarebbe di soli metri 173, che assai più dei 193 distano dai 191 risultanti dalle osservazioni di *Humboldt*.

63. Nelle osservazioni di *Say Lussac* non si sa bene comprendere, come alle altezze di 1333, e di 2000 tese la differenza del calore sopra quello della terra non passasse i gradi tre, e i gradi cinque e mezzo circa, quando fu da altri trovata molto maggiore. Ma forse al termine della di lui salita il termometro fu sempre a — 9°, e sulla terra essendosi cambiato per circa 3°, deve in quella computarsi non il massimo di 27°, ma il medio di 25°, onde quella differenza diverrebbe maggiore. Quello poi, che ragionando non si avrebbe potuto indovinare, anzi di cui forse sarebbesi argomentato il contrario, e che risulta dalle osservazioni di *Humboldt*, e di *Say Lussac*, si è, che il calore decresce più rapidamente nelle regioni superiori fino ad una certa altezza, che nelle inferiori. Li risultamenti delle osservazioni di *Humboldt* si vedono nella tavola seguente da lui stesso disposti.

Altezze sopra il livello del mare	Temperatura in gradi centesimali	Differenze
0	25, 3°	
500	24, 0	1, 3°
1000	22, 6	1, 4
1500	21, 2	1, 4
2000	20, 0	1, 2
2500	18, 7	1, 3
3000	14, 4	4, 3
3500	9, 0	5, 4
4000	6, 4	2, 6
4500	3, 7	2, 7
5000	0, 4	3, 3
5500	— 3, 0	— 3, 6
6000	— 6, 0	— 3, 0
6500	— 10, 0	— 4, 0
7000	— 13, 0	— 3, 0
7500	— 16, 0	— 3, 0

Da cui si vede, che il decremento del calore è più rapido circa nella ragione di 5 : 3 di sopra ai 3500 metri, che dal livello del mare ai 2500; e che lo strato d'aria, dove il raffreddamento è più pronto almeno sotto all'equatore è compreso tra i 2500, e i 3500 metri, ossia tra le altezze del S. Gottardo, e dell'Etna.

64. Se poi riflettasi, che calcolando sopra diverse osservazioni delli stessi *Humboldt*, e *Say Lussac* l'altezza sopra il livello del mare, in cui il calore scema di un grado, riesce diversa, e che *Saussure* la stabilì a metri 160, come pure d' *Aubuisson* (*Suite du Mem. sur la mes.... Jour. de Phys.... Juillet* 1810), si vedrà, che ancora dentro un certo limite quell'altezza non è accertata appunto perchè le diverse temperature dello strato inferiore dell'aria, e massime le diver-

se influenze delle circostanze locali sopra l'estinzione del calore riflesso dalla terra (61) dovevano produrre differenze notabili nelle osservazioni, dalle quali quell'altezza è stata derivata. In generale i risultamenti ottenuti da quelli, che si occuparono di questo soggetto, debbono considerarsi come dipendenti dalle temperature, che si provavano al luogo della terra, sopra cui il decremento è stato osservato; ma non si ha finora un così grande numero d'osservazioni, dalle quali si possa una sicura conseguenza dedurre; poichè le migliori sarebbero quelle, nelle quali le temperature sulla terra fossero molto basse, e in aria avessero potuto replicarsi assai volte; ma quelle sono nel minor numero, perchè in Europa non possono procurarsi che coi viaggi atmosferici, che non sogliono intraprendersi in temperature fredde, e in America, dove sopra le Cordilliere si trovano dei Villaggi di 400 metri più alti della cima di Teneriffe, dove un Fisico potrebbe farvi un soggiorno poco penoso, e interessantissimo non solo per l'oggetto presente, ma per tutta la metereologia, sono rarissimi i viaggiatori.

65. L'incertezza diviene ancora maggiore per riguardo alla legge, con cui il calore salendo decresce, poichè questa dipende da quell'altezza, nella quale questo comincia a scemare di un grado, e la differenza delle circostanze tra le parti inferiori, e le superiori dell'atmosfera è sempre più notabile, quanto la distanza è più grande. E io so bene, che *Offmann* (*Voyage d' Humboldt quatt. partie Astron., et Magnet. Vol.* 1) calcolando con la formola di *La Place* ha trovate sei osservazioni di *Humboldt* conformi alla legge di *Eulero*; ma tra le leggi dei diversi Autori qual è, a cui non si trovino conformi alcune osservazioni, quando tra le molte si faccia la scielta opportuna, imperciochè fino *Bernoulli* ne riporta quattro, dalle quali ricavò la strana sua opinione del calore crescente a misura, che si sale nell'atmosfera. Ma ancora qual è tra quelle leggi, a cui non si possano trovare le osservazioni in grande numero contrarie, quando si prenda-

no in circostanze molto diverse per le temperature sulla terrestre superficie? Ad ogni modo tra quelle incertezze si può ritenere il principio di *La Place* (16) che la legge del decremento del calore salendo per l'atmosfera sia compresa tra i limiti delle due progressioni aritmetica, e geometrica; nè si scosterà molto dalle osservazioni usando quella verso la temperatura di 25° centesimali, e questa sopra, o sotto i 25°.

66. Siccome poi le leggi principali proposte da diversi Autori non differiscono molto da quelle progressioni (17) così non deve farci meraviglia, se quasi tutte convengono a un di presso nel medesimo risultamento. E già si è veduto questo (17) per riguardo a *De Luc*, *Schuckburgh*, *Eulero*, *Lagrange*, e *La Place*, ai quali mi piace aggiugnere in questo luogo il *Venini*, il quale (*Instit. Nazion. Ital. T. I, P. I; e T. II, P. I*) ha già pubblicate tre parti di una Memoria sulle livellazioni barometriche, e ne promette una quarta pel volume terzo. Egli tiene la progressione aritmetica, e arriva ad una formola veramente semplicissima; poichè nella seconda formola (60) pongasi $n = 1 = g$, e $\frac{p}{\delta} = \mathrm{B}$, rimarrà $\mathrm{L}(c - iv) = \mathrm{L}c - i\mathrm{BL}\frac{p}{p'}$: e passando dai logaritmi ai numeri si avrà $c - iv = c\left(\frac{p}{p'}\right)^{-i\mathrm{B}} = \frac{cp'^{\,i\mathrm{B}}}{p^{i\mathrm{B}}}$, e quindi $v = \frac{c}{i}\left[1 - \left(\frac{p'}{p}\right)^{i\mathrm{B}}\right] = \frac{c}{i}\left(\frac{p^{i\mathrm{B}} - p'^{\,i\mathrm{B}}}{p^{i\mathrm{B}}}\right)$. Ma da tre osservazioni sue, e due del Generale *Roy* per un valore medio egli trova $\mathrm{B}\,.\,\mathrm{L}10 = \frac{p}{\delta \mathrm{L}10} = 9240,7$; e $\mathrm{B} = \frac{9240,7}{\mathrm{L}10} = 4013,2$; ed $i = 0,00005$; e perciò $i\mathrm{B} = 0,00066$, e $v = \frac{100000}{5}\,.\,c\left[1 - \left(\frac{p'}{p}\right)^{0,00066}\right] = 20000\,.\,c\,.\left[1 - \left(\frac{p'}{p}\right)^{0,00066}\right]$; e inoltre egli assume, che li 0,00066 dell'esponente si possono senza notabile errore tralasciare, e che i valori di c presi da una tavola delle dilatazioni dell'aria da lui calcolata erano espressi da dieci millesimi; quindi conchiude, che se que-

sti intendansi per intieri resterà il valore di $v = 2c\left(\frac{p^{\frac{1}{s}} - p'^{\frac{1}{s}}}{p^{\frac{1}{s}}}\right)$, che coi logaritmi si calcola facilissimamente.

67. Mentre ammirava la semplicità di questa formola, mi venne un dubbio, se li 0,00066 si possano con ogni sicurezza trascurare essendo nell'esponente, come quando sono il moltiplicatore di un numero; perchè nell'esempio stesso del *Venini*, che è l'altezza del campanile di Domaso, invece delle p, p' sostituendo le h, h' era $h = 333,25$; $h' = 332,175$; $L\frac{h}{s} = 0,5045540$; $L\frac{h'}{s} = 0,5042734$; $h^{\frac{1}{s}} = 3,19561$; $h^{\frac{1}{s}} = 3,19351$; $\frac{h^{\frac{1}{s}} - h'^{\frac{1}{s}}}{h^{\frac{1}{s}}} = \frac{206}{319561}$; e quindi $v = 13,2872^{tes.}$. Ma se Lh, e Lh' non si avessero a dividere per s, ossia a moltiplicare per 0,20000, ma per 0,20066, si avrebbe $0,20066 \times Lh = 0,5062191$; $0,20066\, Lh' = 0,5059375$; $h^{0,20066} = 3,207887$; $h'^{0,20066} = 3,205808$; $\frac{h^{0,20066} - h'^{0,20066}}{h^{0,20066}} = \frac{2079}{3207887}$; e poichè è $L\frac{2079}{3207887} = 6,8116354$; $L\,10306 = 4,0130901$; $L2 = 0,3010300$, sarebbe $Lv = 1,1257555$, che porterebbe il valore di v a 13,35843 tese, e si avrebbe una differenza di circa un mezzo per cento per le sole quantità trascurate nel calcolo, che veramente pare un po grande almeno per certi casi.

68. Dalle esposte dottrine si può inferire, che per la legge del decremento del calore per l'atmosfera debbono rifiutarsi quelle, che molto si scostano dalle medie tra l'aritmetica, e la geometrica singolarmente quando importassero un calcolo molto lungo, ed imbarazzato. E tale in primo luogo mi pare quella del *Lindenau* (*Tables barometriques pour faciliter le calcul des Nivéllements, et des mesures des hauteurs*

par le barometre. Gotha 1809), che per esprimere la correzione dipendente dal calore dell'aria nel coefficiente M (36) invece di uno introduce i due termini $0{,}002\,(t+t') - 0{,}000004\,(t-t')^2$; e invero non havvi alcuna positiva ragione, che richieda questo secondo termine, che allunga, e imbarazza il calcolo senza renderlo notabilmente più esatto, perchè nelle altezze non estremamente grandi non porta una differenza maggiore di quella, che può supporsi nelle osservazioni.

69. Ma molto più in quel caso è l'altra di *Kirwan* (*Bibl. Britan. Vol. XXI, pag.* 322). Egli veramente si propone soltanto di mostrare, come si possano correggere le regole di *Saussure*, che tra le latitudini medie di 45°, e 47°, e nei mesi d'estate il calor medio salendo scemi di un grado Reaumuriano per ogni 100 tese, avendo riguardo alle differenze del calore nelle diverse latitudini; ma la correzione stessa si potrebbe a qualunque altra regola applicare; poichè a quel fine egli osserva, che *Bouguer* (*Mem. Par.* 1744, *e* 1749) aveva stabiliti ad altezze diverse secondo le diverse latitudini nell'atmosfera due punti da lui chiamati uno inferiore, e l'altro superiore della congelazione, dei quali il primo meno alto è quello, dove ancora d'estate gela tutte le notti, e di giorno la temperatura s'alza assai poco sopra la congelazione; e il secondo più alto è quello, sopra cui non s'alza alcun vapore sensibile, laonde egli crede, che in ambedue si possa stabilire la temperatura costante di $32^{\circ F}$, ovvero $0^{\circ R}$. Appresso egli scieglie questo secondo, che sembra il meno mobile, e coi dati presi da *Bouguer*, e da *Saussure* forma una tavola, che è riportata ancora dal *Venini* (*L.* 1. 66, *v.* 11), e che presenta la di lui altezza sopra il livello del mare, la quale si verifica nei mesi di Maggio, Giugno, Luglio, ed Agosto, nei quali i due punti di congelazione sembrano a lui dovere coincidere; e insegna poi a determinare per mezzo della indicata tavola i gradi, che avrà il termometro a diverse altezze, e a diverse latitudini, quando sia dato il grado di lui a qualunque stazione inferiore, col calcolo seguente.

70. Sia λ una latitudine, in cui il grado termometrico t sia stato osservato al livello del mare, il quale dal termine superiore della congelazione abbia la distanza D, che si prenderà dalla tavola indicata di sopra, e la differenza di temperatura, che le corrisponderà, sarà $t - 32^{\circ F}$. Ma si è supposto (60), che dove la differenza della distanza era v, fosse $c' = c^{\mu} (c^n \pm iv)^k$, e quindi che pel calore $c = t$ fosse $c' = t^{\mu} (t^n \pm iv)^k$; dunque per conseguenza delle premesse nella distanza D essendo $c' = t - 32^{\circ}$, e $v = \mathrm{D}$, sarà $t - 32^{\circ F} = t^{\mu} (t^n \pm i\mathrm{D})^k$; e dividendo quella per questa equazione si avrà $c' = (t - 32^{\circ F}) \left(\frac{t^n \pm iv}{t^n \pm i\mathrm{D}}\right)^k$. Se poi il luogo del calore t sia alla distanza γ sopra il livello del mare, la sua distanza dal termine superiore della congelazione sarebbe $\mathrm{D} - \gamma$, a cui corrisponderà la differenza $t - 32^{\circ F}$; laonde ritenendo la supposizione, a cui tutto questo calcolo è appoggiato, che il calore sia sempre una funzione simile della distanza, nella penultima equazione a D sostituendo $\mathrm{D} - \gamma$ si avrà $t - 32^{\circ F} = t^{\mu} [t^n \pm i(\mathrm{D} - \gamma)]^k$; onde pare, che alla distanza v il calore debba essere $c' = (t - 32^{\circ F}) \left(\frac{t^n \pm iv}{t^n \pm i(\mathrm{D} - \gamma)}\right)^k$, e non $c' = (t - 32^{\circ F}) \left(\frac{t^n \pm iv}{t^n \pm i\mathrm{D}}\right)^k$, come sembra supposto da *Kirwan*, il quale prende sempre la distanza del termine superiore della congelazione dal livello del mare, quando pare, che debba pigliarsi dal luogo, dove è stato osservato il calore t. Con questa regola ben si vede, come si possa trovare il calore della regione superiore, quando sia dato l'altro della inferiore; ma a che pro entrare in così grande lavoro di calcolo, quando la regola non serve che per quattro mesi dell'estate più calda, e pei luoghi, dei quali sia nota l'altezza sopra il livello del mare; e quantunque applicata agli esempi alcune volte presenti una bastevole approssimazione, in altre però manca assolutamente?

71. L'effetto del calore sull'aria non è ancora conosciu-

to

to altrimenti che dentro i limiti dell'incertezza, che furono notati nella Memoria (24, 25); ad ogni modo pare, che i Fisici ad imitazione di *La Place* seguano generalmente *Say Lussac*, che ha trovato il cambiamento di un $0,00375^{mo}$ del volume per ogni grado centesimale; e io stesso mi tengo a questa opinione per l'autorità di *Majer*, sulla quale voleva portarlo a 0,00380 (29). Allora io non conosceva il di lui esperimento, ma inseguito ho trovato presso *Gilbert* (*Annalen.* 1807 *Stück*, 4. *pag.* 395), che l'esperimento qui indicato sembra essere non di *Tobia Majer*, ma del di lui figlio pubblicato nella Dissertazione (*Phys. Mathem. Abhandlung über dos avsmenen der wärme ... Frankf.* 1785, §. 75), e instituito ai 25 Gennajo 1780 con un termometro ad aria di *Amontons*, che era stato esattamente calibrato, e nella sfera poteva contenere 3072 grani di mercurio a 0^{oR}, e aveva una massa d'aria, che sotto l'altezza di $3^{pol.}\ 11,1^{lin.\ par.}$, a quella temperatura, e sotto la pressione di $27^{pol.}\ 1^{lin.}$ occupava il volume di 2443,3 grani. Ora quando l'istromento fu posto nell' acqua bollente il volume dell'aria della sfera sotto la pressione di $27^{pol.}\ 1^{lin.} + 14^{pol.}\ 9,6^{lin.}$ di altezza di mercurio occupò il volume di 2512,2 grani di questo metallo; ma lo stesso *Majer* ha accresciute ambedue le altezze di pressione di $3^{lin.}$ per ragione della capillarità; quindi poichè il volume dell'aria sotto eguale pressione è proporzionale al volume osservato, e alla pressione, sotto a cui questo si mantiene, secondo quell'esperimento il volume dell'aria a 0^{oR} al di lei volume sotto il 80^{oR} con la pressione di $27^{pol.}\ 1^{lin.}$ di altezza barometrica sta come $2443,3 : 2512,2 + 376^{pol.}\ 6^{lin.} : 506^{pol.}\ 1^{lin.}$, cioè come $1 : 1,382$.

72. Ma pare, che *Majer* abbia non bene calcolate, o trascurate le dilatazioni del mercurio, o del vetro; e della prima è chiaro, che ingrandisce il volume dell'aria contenuta nella sfera, il quale si calcolava soltanto, quando il mercurio era ridotto alla quiete, e perciò dava pure una pressione manifestamente più grande di quella, che corrispondeva

alla colonna del mercurio divenuto meno grave specificamente. Ora *Majer* suppone, che questo metallo da $0^{\circ R}$ ad $80^{\circ R}$ si dilati per 0,0156 del suo volume, onde calcola il volume dell'aria corretto per la dilatazione del mercurio $= 1,370$ nel calore dell'acqua bollente. Ma secondo *Lavoisier*, e *La Place* questa dilatazione arriva a 0,0189, e perciò i due ultimi termini dell'antecedente proporzione dovrebbero divenire 2500,8, e 503. La dilatazione poi del vetro accresce la capacità della sfera, e del tubo del termometro d'aria, che a 0° eguagliava il volume di 3170 grani di mercurio, calcolando il tubo fino al segno, in cui vi si trovava il mercurio agli $80^{\circ R}$, e perciò diminuiva la dilatazione dell'aria. Dal *Soldner* (*Gilbert Annal. l. c.* 71) si ricava, che questa nel dato caso valerebbe tanto quanto il volume di $3170 . 3 . 0,00083 = 11,7$ grani di mercurio; laonde i 2500,8 divengono 2512,5, e perciò il volume dell'aria corretto per la dilatazione del mercurio insieme, e del vetro nel calare dell'acqua bollente diviene $= \frac{25125}{24433} . \frac{5030}{3766} = 1,373$. Ma siccome l'esperimento è stato instituito sotto all'altezza barometrica di $28^{pol.}\ 1^{lin.}$, il calore dell'acqua bollente non poteva giugnere agli $80^{\circ R}$; ma solo ai 79° 34 secondo le formole del citato *Soldner* (*Gilbert Annalen.... 1804 Stuck*), così la già calcolata dilatazione apparterrà a questa temperatura, e alli $80^{\circ R}$ il volume d'aria 1 diviene $1,373 + 0,373 . \frac{0,66}{80} = 1,376$, che è molto più vicino al risultamento ottenuto da *Say Lussac*, secondo il quale quel volume diviene 1,375. Ma meritano di essere lette le riflessioni sopra questo esperimento, che sono esposte negli Annali citati.

73. Ma questo accrescimento conviene all'aria nello stato di siccità; e egli è noto, che questa nel suo stato ordinario è sempre mischiata con una più o meno grande quantità di vapore acqueo, che a forza elastica eguale essendo meno pesante scema la di lei densità, e quindi la colonna *v*

dovrà essere accresciuta in proporzione al decremento di densità per modo che se questo si esprima per x', si dovrebbe nel valore di v (36) introdurre un altro fattore $1 + x'$; e il *La Place* (*Mech. cel. vol. IV, pag.* 272) seguito da *d'Aubuisson* (*Journ. de Phys. Juil.* 1810) insegna, come dallo stato del termometro, e dell'igrometro si possa trovare il valore di x' col seguente metodo.

74. Sia φ' la forza elastica del vapore di un fluido qualunque a diversa temperatura in uno spazio, che ne sia ripieno; i la temperatura sopra il 0°, sotto alla quale il fluido bolle sotto alla pressione di 0,76 metri; t la temperatura sopra il 0° al tempo dell'osservazione. Con questi dati *La Place* ha rappresentate molto esattamente le esperienze di *Dalton* sopra la forza elastica dei vapori con l'equazione $\varphi' = 0,76^{met.} \times 10^{i \times 0,015454 - i^2 \times 0,000062583}$, la quale usando il termometro centigrado, applicata all'acqua, che bollendo a 100° rende $i = t - 100$, dà l'altra $\varphi' = 0,005123 \times 10^{t \times 0,027971 - t^2 \times 0,000062583}$, laonde si avrà il logaritmo tabulare della forza elastica φ' del vapore, ossia della pressione, che eserciterebbe, o dell'altezza, a cui si terrebbe il mercurio nel barometro in uno spazio unicamente occupato da quel vapore, se al logaritmo di 0,76 si aggiunga la quantità $i \times 0,015454 - i^2 \times 0,000062583$, ovvero al logaritmo di 0,005123 si aggiunga la quantità $t \times 0,027971 - t^2 \times 0,000062583$.

75. Esaminando la tavola data da *Saussure* (*Essais sur l'Hygrometrie* §. 176) della quantità del vapore acqueo contenuta in uno spazio limitato a gradi diversi dell'igrometro, ma sotto una stessa temperatura si trova, che quella, se al punto della saturazione si esprima coll' 1, diminuisce di 0,015 per grado dell'igrometro dal 100^{mo}, o piuttosto dal 90^{mo} fino al 60^{mo}, e ancora al 50^{mo}, che è il grado, sotto al quale quello stromento discende assai rare volte nelle basse regioni dell'atmosfera. Ma la forza elastica deve seguitare quello stesso rapporto. Se dunque si chiami φ questa forza a t° del

termometro, o u° dell' igrometro si avrà $\varphi=\varphi'[1-0,015(98-u)]$ $=\varphi'(0,015u-0,47)$. Al di sotto però di 50° s' impiegherà direttamente la tavola di *Saussure*; e ponendo, che il numero di questa, che corrisponde all' u dell' igrometro, sia m, e che la quantità, o la forza al punto di saturazione sia 11,069, si avrà $\varphi=\varphi'\cdot\frac{m}{11,069}$.

76. Ma secondo *Saussure* (§. 288) a forza elastica, e temperatura eguali il peso del vapore acqueo sta a quello dell' aria secca come 10 : 14, e un metro cubo d' aria secca a 0°, e sotto 0, 76 metri di pressione pesa grani 1300; e questo peso scema di 0, 00375 di grano per grado d' innalzamento del termometro, e inoltre è proporzionale alla pressione, o forza elastica. Dunque a t° di temperatura, e a φ di forza il peso di un metro cubo di aria secca sarà $\frac{1300}{1+0,00375t}\cdot\frac{\varphi}{0,76}$; e un metro cubo di vapore acqueo nelle circostanze medesime peserà $\frac{1300}{1+0,00375t}\cdot\frac{\varphi}{0,76}\cdot\frac{10}{14}$ grani; onde se sia

P il peso del vapore acqueo rinchiuso in uno spazio vòto, o pieno d' aria;

a lo spazio stesso espresso in metri;

t l' indicazione dell' igrometro nello spazio stesso di sopra ai 50°, ovvero 60° dell' igrometro si avrà

$$P = 6,259 \text{ grani } \frac{a(0,015u-0,47)10^{t}\times 0,027971-t^2\times 0,000062583}{1+0,00375t};$$

e di sotto dai 60°, ovvero 50° dell' igrometro pigliando m dalla sopraindicata tavola di Saussure sarà

$$P=0,5655 \text{ grani } \frac{a.m.10^{t}\times 0,027971-t^2\times 0,000062583}{1+0,00375t}.$$

77. Quando l' aria, e il vapore acqueo sono misti insieme, le forze dei due fluidi si uniscono per fare equilibrio alla pressione dell' atmosfera; laonde se questa sia espressa da h, essendo φ la forza elastica del vapore, quella dell' aria contenuta nella mischianza sarà espressa da $h-\varphi$. Ora sup-

pongasi, che nella unità del volume, per es. nel metro cubo i due fluidi siano separati uno dall' altro, e contenuti in due spazi distinti in maniera, che le loro forze elastiche si facciano equilibrio; lo spazio occupato dall' aria secca a quello occupato dal vapore sarà come $h - \phi : \phi$; e se parimenti il peso del metro cubo dell' aria secca sia 1, quello dell' aria, che secondo la fatta supposizione è rinchiusa nell' unità di volume, sarà $\frac{h-\phi}{h}$, e quello del vapore sarà $\frac{10\phi}{14h}$; e perciò la differenza tra il peso d' un metro cubo d' aria secca, e quello d' un eguale volume della mischianza d' aria, e di vapore, ossia dell' aria umida sarà $1 - \left(\frac{h-\phi}{h} + \frac{10\phi}{14h}\right) = \frac{2\phi}{7h}$. Ma i pesi sotto l' unità di volume danno le densità; dunque questa sarà $\frac{2\phi}{7h}$.

78. È chiaro questo essere il valore di x'. Ma l' esposto metodo, che serve a trovare il decremento di densità cagionata dai vapori in una piccola massa d' aria, non si può con sicurezza applicare ad una lunga colonna atmosferica, nella quale il decremento di densità dovuto alla presenza del vapore succede ancora più irregolarmente dell' altro dovuto alla temperatura; quindi manca ancora un metodo di calcolo semplice, ed esatto, con cui si possa nella ricerca delle altezze col barometro eseguire la correzione igrometrica, e conviene contentarci di una media, che valga almeno nel clima, dove si opera; e per riguardo al nostro, e ai finitimi basterà osservare, che nella regione inferiore dell' aria la diminuzione di densità per ragione dei vapori acquei assai di raro oltrepassa i 0,006, ovvero i 0,007; e discende sotto al 0,002 fuori dei tempi, nei quali il termometro è a $0^{\circ\mathrm{R}}$, ovvero al di sotto; epoca, in cui non sogliono ricercarsi le altezze col barometro. Pertanto la diminuzione media sarebbe 0,004, la quale suole trovarsi, quando il termometro è 17°, e l' igrometro ad 80°, che sono li stati medj di questi stro-

menti nella stagione di quelle ricerche, cioè dall'Aprile all'Ottobre. Ma nelle alte regioni la quantità dei vapori è ben minore, e più piccola la diminuzione di densità; la quale secondo le osservazioni di *Saussure*, e d'*Humboldt* nelle nostre latitudini non pare cambiarsi che da 0,002 fino a 0,003 per le altezze di 2000 metri; e quindi per le altre dai 500 fino ai 1500 metri si potrà fissarla ai 0,0035, che sarebbe il valore di x'.

79. Ma questo essendo costante, e tenue assai, non torna conto l'introdurlo nella formula (36) del valore di v; quindi *La Place* (*Mech. cel. Vol. IV*), e ad imitazione di lui *Biot*, e *Arrago* (*Mem. de l'Instit.* 1806, e *Phys. Mech.*, *pag.* 219) avendo osservato, che l'atmosfera contiene più vapori nella calda stagione, hanno creduto, che per calcolare gli effetti dell'umidità dell'aria si potesse fare qualche accrescimento al fattore dipendente dalla temperatura; laonde il *La Place* invece del fattore $1 + \frac{t+t'}{2.213}$, che risultava dalle sue osservazioni ha preso l'altro $1 + \frac{t+t'}{2.200}$ (37), e gli altri due invece del fattore $1 + 0{,}00375\,\frac{t+t'}{2}$ hanno preso l'altro $1 + 0{,}004 \cdot \frac{t+t'}{2} = 1 + 0{,}002\,.(t+t')$. Ma questo fattore è sembrato troppo grande a *d'Aubuisson* (*l. c.* (73) *Juin* 1810) per la ragione che essendo il termometro a 17° darebbe $x' = 0{,}006$, quando allora non è a un dipresso che 0,004. Egli pertanto pare che da principio inclinasse a combinare la correzione igrometrica col fattore numerico di M (36), che egli da principio aveva posto 18317 secondo *Biot*, e *Arrago*, e per questa correzione sarebbe divenuto 18381; ma in seguito convenne con questi nella scielta del fattore per la temperatura $1 + 0{,}002\,(t+t')$ insieme col fattore 18317 numerico di M.

80. Tra questi metodi niuno corregge intieramente gli errori, che possono provenire dalla umidità dell'aria, con

tutta l'esattezza; poichè in tutti si trascura la differenza del peso tra l'aria umida, e la secca, che dipende dalla varietà della temperatura, e della pressione dell'aria. Ma chi può dubitare della prima massime se l'umidità sia molto grande, quando egli è certo, che la densità del vapore cresce con la temperatura, e ancora molto più presto di questa. Gli esperimenti poi, sui quali il peso dell'aria umida, e secca è stato determinato, sono tutti stati fatti sotto la pressione a un dipresso di pollici 28, nè alcuno ha ancora tentato di superare le difficoltà, che si avrebbero per pesare quelle arie sulle montagne per averne il peso sotto pressioni minori, o di ricavarlo dagli esperimenti di *Dalton* per introdurlo in questi calcoli. Finalmente non abbiamo alcun mezzo, col quale si possa distinguere l'umidità propria dell'aria, che influisce sulla colonna barometrica, che serve a determinare le altezze dei luoghi, dalla umidità accidentale proveniente da qualche fiume, o da qualche palude. Nondimeno non è da temere, che da queste omissioni nascano errori gravi, poichè gli effetti prodotti dalla umidità sono sempre assai tenui.

81. Ma intorno al metodo, con cui s'introduce la correzione per la diversa temperatura dell'aria, *Tardy de Brossy* (*Bibl. Britan. an.* 1810 *P. III, pag.* 307) promove una difficoltà, che già era stata indicata da *Chiminello* (*Journ. de Phys. Juin* 1779); poichè, dice egli, ogni azione, che dilata, se venga esercitata nelle parti inferiori di un fluido elastico, deve riguardarsi come una forza d'impulsione, che tende a cambiare di luogo, e ad innalzare ciascuno delli strati superiori fino all' ultima sommità in ragione inversa delle loro densità rispettive. Quindi se il barometro sia al livello del mare, esso soffrirà ancora la pressione medesima, perchè tutta sostiene la colonna d'aria prima, e dopo la dilatazione, e l'allungamento; ma se quello sia ad una certa altezza, e la dilatazione segua al di sotto, egli è chiaro, che la massa d'aria corrispondente all' allungamento della colonna sottoposta al barometro passerà sopra di lui, e aumenterà in

proporzione la pressione, che esso deve sostenere. Nè accaderà altrimenti ancora in un barometro posto ad una stazione superiore, poichè l'azione dilatante della colonna sottoposta al primo si estende ancora all'aria sovrapposta al secondo.

82. Se dunque il barometro inferiore sia al livello del mare, il riscaldamento di una parte della colonna ad esso sovrapposta non produrrà alcuna irregolarità; ma in altre circostanze la massa d'aria corrispondente alla dilatazione della colonna sottoposta ai due barometri passerà ad agire col proprio peso sopra ambidue, e accrescendo di una quantità medesima la pressione, che soffrono, toglierà la proporzione geometrica, che avrebbero senza l'effetto del calore, e che è necessaria, perchè si possa loro applicare il metodo logaritmico dell'*Hallejo* (19). Pare pertanto a *Tardy*, che ottimamente operassero i Fisici da principio, quando per avere le altezze dei luoghi riportavano tutte le osservazioni al livello del mare; e non così *Bouguet*, e tutti quelli venuti dopo di lui, che lo seguitarono pretendendo di potere usare, di quel metodo in generale, e applicarlo ad ogni stazione; poichè nelle stazioni elevate sopra quel livello la proporzione geometrica richiesta per l'uso della regola Hallejana viene alterata per l'azione dilatante dell'aria a quelle sottoposta, e non è restituita con avere riguardo alla differenza della temperatura delle due stazioni, o alla temperatura media della colonna frapposta ad ambedue, come si usa generalmente. E poste queste nozioni prosegue *Tardy* a dimostrare, come per quei luoghi, dei quali si conosce l'altezza sopra il livello del mare, o la media altezza del barometro ricavata da quotidiane osservazioni si possa trovare quella quantità di massa d'aria innalzata, che turba la proporzione geometrica delle altezze barometriche osservate, a fine di toglierla, onde queste alla richiesta proporzione ritornino.

83. A questa obbiezione del *Tardy* ha cercato di soddisfare *F. de La Roche* (*Bibl. Britan. Mars* 1811) il quale primamente osserva, che quella non può valere, se non si sup-

pone, che l'aria tra le due stazioni sia come un fluido incompressibile, onde per l'azione dilatante della colonna sottoposta alla stazione inferiore debba tutta insieme sollevarsi, e portare sopra ambidue i barometri un accrescimento di pressione eguale alla massa d'aria innalzatasi per la dilatazione. Ma egli è chiaro, che altrimenti dovrà accadere essendo l'aria compressibile, perchè deve acquistare una densità maggiore nelli strati frapposti alle due stazioni per ragione della massa, che sarà stata innalzata oltre alla stazione superiore; e per questa ragione cerca egli di mostrare, che il cambiamento di temperatura sulla colonna d'aria sottoposta alle due stazioni non toglierà la proporzione geometrica tra le pressioni, che in queste si esercitano; perchè siano esse A, e B, e la colonna d'aria AB ascendendo dividasi in tanti strati A*a*, *ab*, *b*1 ... piccolissimi, perchè ciascuno possa riguardarsi come di uniforme densità, la quale vada crescendo dall'uno all'altro discendendo. Sia h la pressione in A, e δ quella dello strato Aa, onde in a sia $h - \delta$; segua poi una dilatazione al di sotto di A, che non operi che sopra AB, e portando una massa d'aria sopra di A accresca in A la pressione per la grandezza r, onde divenga $h + r$; per questo aumento di pressione ancora la densità di Aa crescerà in proporzione per modo, che se il suo peso si chiami x, la pressione in a sarà $h + r - x$, e la densità dell'aria essendo proporzionale alla pressione si avrà $\delta : x :: h - \delta : h + r - x$, e quindi $x = \delta . \frac{h+r}{h}$; e se questo valore d'$x$ introducasi nella ragione $\frac{h+r}{h+r-x}$ si avrà $\frac{h+r}{h+r-\delta-\frac{\delta r}{h}} = \frac{h}{h-\delta}$, e perciò la ragione tra le due altezze del barometro in A, e a non sarà turbata in alcun modo dal cambiamento di densità accaduto al di sotto di A per ragione della diversa temperatura; e poichè si proverà all'istesso modo, che quello pure accade per le pressioni in b, c ..., si potrà concludere, che il rapporto tra le pressioni in A, e B resterà pure lo stesso, non ostante i cambiamenti di densità, che per la variazione del calore potessero accadere al di sotto di A.

84. Io non entrerò a discutere il valore di queste risposte, ma per riguardo alla obbiezione di *Tardy* confesso, che non ho mai saputo comprendere, perchè la ragione tra le pressioni non debba cambiarsi ancora, quando la stazione inferiore sia al livello del mare, perciocchè cambiandosi la temperatura al di sotto della stazione superiore, la pressione rimane ancora la stessa alla stazione inferiore, e alla superiore si cambia. Ora due quantità non cambiano il rapporto, quando una restando costante, l'altra soffre alterazione? Similmente non mi sembra, che lo scopo dei cambiamenti, che si fanno nelle espressioni delle altezze ricavate secondo la legge Hallejana per le cagioni diverse, che vi influiscono, sia quello di ristabilire il rapporto tra le pressioni, che quelle cagioni hanno turbato. All'opposto per le difficoltà, che hanno i Fisici incontrato nella determinazione della influenza di quelle cagioni, mi pare, che quelle espressioni si debbano considerare come formole empiriche composte di fattori diversi ricavati dal paragone con le osservazioni, che siano atte a fornire quelle altezze in modo, che a queste osservazioni meglio si accostino. E infatti se non fosse così, tutti quelli, che hanno fornita alcuna di quelle formole non avrebbero potuto introdurre tanti cambiamenti nelle quantità numeriche, che vi entrano, i quali non sono derivati dall' indole stessa delle cagioni, alle quali appartengono, o dal modo, con cui operano, che è quasi generalmente sconosciuto, ma solamente dal confronto del risultamento, che esse forniscono, con le misure delle altezze ottenute coi metodi geodetici.

85. Anche le nozioni intorno agli effetti del calore sul mercurio non sono state migliorate dopo la pubblicazione della mia Memoria; poichè finora non è stato con maggiore precisione determinato il cambiamento di volume, che quello

soffre per un cambiamento dato di calore, nè ancora si è potuto bene fissare, se a cambiamenti eguali di calore esso soffra cambiamenti eguali di volume. E veramente pare, che il mercurio a guisa di ogni altro corpo ad eguali accrescimenti di calore debba dilatare il volume in una progressione crescente; ma nel barometro è sottoposto a due cagioni, che producono un effetto contrario, e sono le pressioni di una quantunque piccola massa d'aria rimasta nella di lui sommità, e del vapore, che dal mercurio stesso si alza nel vòto barometrico secondo l'osservazione di *Daniele Bernoulli* confermata da *Smeaton*, e da altri. Ma chi sa ancora fra queste contrarie cagioni quale, e come prevalga? Ad ogni modo l'effetto loro è sempre assai tenue; laonde pare, che i Fisici siano oramai convenuti ad ammettere nel mercurio la variazione del volume stabilita da *La Place* (30) sopra gli esperimenti di *Say Lussac*, e a tenerla costante per ogni costante variazione del calore.

86. Ma dalle osservazioni di *André de Sy* autore di una Memoria assai bella sulle livellazioni barometriche (*Journ. des Mines Termidor an. XIII, N.* 107, *e* 108) risultano due importanti avvertimenti, che non debbono trascurare quelli, che le vogliono replicare; e il primo è, che sempre debbano dare al mercurio del barometro un tempo sufficiente, perchè possa tutto ricevere il cambiamento, che corrisponde alla temperatura; perciocchè quello ha trovato, che questo cambiamento è successivo, e non si compie che in un tempo notabile per modo, che sotto $80^{\circ R}$ dopo $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{4}$ d'ora le dilatazioni furono $\frac{46}{12}$, $\frac{57}{12}$, $\frac{60}{12}$, $\frac{65}{12}$, $\frac{73}{12}$ di linea. L'altro avvertimento poi è, che sciegliere devasi un certo tempo per le osservazioni barometriche, poichè in otto giorni continui egli non trovò alcuna regolarità nelle variazioni del volume del mercurio, che succedettero avanti le otto ore antimeridiane, e qualche irregolarità vidde ancora in quelle

sull' una alle quattro pomeridiane senza però averne potuto precisare la ragione. Quindi si può dar ragione dei diversi risultamenti, che ottennero diversi Autori, che forse non tutti all' istesso modo attesero a quelli avvertimenti.

87. Parimenti presso d'*Aubuisson* (*l. c.* 64) trovasi un altra correzione da farsi alle osservazioni dipendentemente dalla temperatura per quei barometri, che portano una scala intiera di ottone; questa non è esatta, che ad un certo grado di calore, che nel sistema metrico suole essere il $0^{\circ R}$; laonde l' altezza del mercurio in altri gradi di calore deve essere corretta dall' errore, che vi avrebbe potuto arrecare il cambiamento di lunghezza nella scala. Ora il Gen. *Roy* ha trovato, che l' ottone si dilata di 0,0000185 per grado del termometro, mentre il mercurio si dilata di 0,000185, ossia dieci volte di più (*Suiton Mem. de l' Instit.* 1808); quindi la correzione si farà diminuendo di un decimo o i valori di t, e t', o il moltiplicatore $\frac{1}{3412} = 0,000185$, che diverrà $\frac{1}{6013} = 0,000166$.

88. Non è però dubbio, che sopra questa ineguaglianza non debba influire il legno, a cui suole essere attaccata la scala, e che forma la montatura del barometro. Il *d' Angos* (*Extrait d' une lettre ... Journ. de Phys. Aout* 1811) suggerisce di appoggiare il barometro a due verghe metalliche, che sostengano la scala, e non dubita, che questi non dovessero dare osservazioni molto più esatte degli altri, nei quali le montature molto diverse tra loro spesso difendono il tubo dall' aria, ed essendo igrometriche, pieghevoli, e inegualmente affette dal calore comunicano le ineguaglianze, che soffrono, al tubo barometrico, o alla scala, o al termometro, che vi è annesso; quindi *d' Angos* osservava con barometri formati da tubi nudi, che sostenevano essi medesimi la scala; e in questi spesso trovava regolari quelle osservazioni, che in altri mostravansi irregolari; e tra gli altri fenomeni in quelli gli parve di vedere, che le dilatazioni d' estate siano

un po minori delle contrazioni d'inverno. Ma non è tale, e così determinata la differenza, che si possa tenerne conto nelle osservazioni barometriche fatte per dedurne le altezze dei luoghi.

89. Similmente ancora non si è potuto deffinire l'influenza, che in quelle osservazioni aver possono i venti; perciocchè egli è vero, che il barometro prima del vento si abbassa, ma non è ben noto, se questo abbassamento sia prodotto dal vento, o da quella stessa cagione, da cui è risultato il vento. Inoltre alcuna volta i venti sembrano agire sul barometro, ma in realtà i cambiamenti, che in questo succedono, non sono che accidentali; così scrive *d'Angos*, che a Malta i venti scuotono i muri, e sembrano per questo produrre dei movimenti nel barometro. Perfine pare certo, che qualche azione sopra di questo aver debbano i venti ascendenti, e discendenti; ma i venti sembrano per lo più essere orizzontali, e cambiare questa direzione solo per le circostanze particolari; ma in queste non abbiamo alcun mezzo per conoscere la precisa direzione, o forza loro. Quindi non deve recarci meraviglia, se volendo tener conto della influenza dei venti a contrarie conseguenze siano stati condotti *De Luc*, e *Ramond*; e se la maggior parte dei Fisici quantunque non convenga con *De Luc*, che niuna influenza attribuiva ai venti sul barometro, pure acconsenta al *Pictet*, il quale dubita, che mai si possa valutarla, non ostante le ricerche bene diligenti, che ne ha fatte *Ramond*.

90. Ma questi molto più felicemente ha potuto determinare ancora nelle zone temperate una ineguaglianza, a cui è sottoposto il barometro, e che *Humboldt* (*Tableau Physique des regions equinoxiales, pag.* 94) aveva già riconosciuta tra i Tropici. Sebbene per la ricerca delle altezze dei luoghi non sia necessario di paragonare ciascuna altezza barometrica osservata con quella del livello del mare (84), questo però si richiede sempre, quando si vuole far uso delle osservazioni isolate. Ora questa altezza media non è veramente

determinata con ogni precisione, poichè *La Place* a 0^{oR} la pone di $0,76^m$, e *Lindenau* a 10^{oR} scrive d'averla da molte osservazioni singolarmente di *Chiminello*, *Toaldo*, *Fleurian de Bellevue*, *Schuckburgh*, e *Thulis* dedotta di $28^p\ 2^l,2$, e *d'Angos* a $16^{oR},58$ nell'aria, e a 17^{oR} nel barometro inseguito a 468 osservazioni fatte a Malta, e altre 100 fatte in parte a Siracusa, e in parte al Capo Pachino l'ha ridotta a $28^p\ 2^l,08$. Ma qui non si tratta della grandezza di quella altezza, ma bene importa di sapere, che *Humboldt* osservando tra i Tropici ha potuto confermare il fenomeno scoperto già a Surinam fino dal 1722 dai Fisici olandesi, e da *Goudin* a Quito di una piccola variazione diurna, o piuttosto oraria simile alla marea, per cui quell'altezza cresce, e cala in due periodi ogni ventiquattr'ore prossimamente come nella tavola seguente

dalle 9 ore di mattina alle 4 di sera cresce di $0,90^l$
dalle 4 ore di sera alle 11 di sera cala di 0,51
dalle 11 ore di sera alle 4 di mattina cresce di 0,31
dalle 4 ore di mattina alle 9 di mattina cala di 0,70;

e si può vedere tra le sue opere (*Nivellement barometrique pag*. 289) una tavola, che presenta la quantità di quel movimento, che corrisponde a ciascun'ora.

91. Fuori dei Tropici, dove l'altezza media del barometro al livello del mare è sottoposta a variazioni molto maggiori prodotte da altre cause straniere, la determinazione di quella oscillazione era molto più difficile, nè vi voleva meno della sagacità, e pazienza di *Ramond* per classificare 3281 osservazioni barometriche fatte nel corso di due anni in modo, che potesse riconoscerla; e trovò infatti, che quella variazione diurna segue in generale la marcia stessa nei nostri climi come nella zona torrida con la differenza, che l'abbassamento del giorno è la metà solamente di quello, che si osserva all'equatore, e che presso di noi la salita della sera è a un dipresso eguale all'abbassamento della mattina, laddove tra i tropici queste quantità stanno come uno a due. Fi-

nalmente egli trovò, che l'estensione delle oscillazioni, e l'istante del loro ritorno variano nelle nostre latitudini con le stagioni dell'anno essendo in Europa più forti nella primavera; e forse questa differenza scompare nella zona torrida, dove non vi sono stagioni.

92. Ma l'*Humboldt* (*Tableau ec. pag.* 89) ha pure messa fuori di dubbio l'altra variazione, per cui l'altezza media del barometro al livello di mare va continuamente scemando dai poli all'equatore. E già quando io scrissi la mia Memoria mi erano note in gran parte le osservazioni citate da *Humboldt*, di *Fleurian de Bellevue*, *Schukburgh*, *de Luc* nelle zone temperate, e di *Bouguer*, *Condamine*, e *George Ivan* dentro i Tropici, che trovarono quell' altezza di metri 0, 76434; 0, 76300; 0, 76250; 0, 76022; 0, 75683; 0, 75796; ma non mi parve allora di potere alcuna cosa stabilire con certezza, e forse una teoria già concepita mi fece illusione, poichè questa mi fece credere (33, e 34), che l'altezza barometrica al livello del mare dovesse crescere accostandosi all'equatore, e non mi lasciò credere vera la conseguenza contraria, che seguiva da quelle osservazioni. Ma l'autorità, e le osservazioni di *Humboldt* non lasciano dubitare, che la media pressione dell'atmosfera, e perciò la media altezza barometrica realmente scema andando dai poli all'equatore per modo, che se nelle nostre zone temperate si ponga di $28^{p}\,2^{l}$, 2 essendo il termometro a $+10^{\circ R}$, nella zona torrida secondo *Humboldt* è solamente di $28^{p}\,1^{l}$, 02, cioè minore di 1^{l}, 18.

93. E osserva lo stesso *Humboldt*, che questa differenza, che è quasi di due millimetri, non si può spiegare per la differenza della temperatura d'Europa, e dei paesi equatoriali, e ciò tanto meno, perchè nella parte bassa del Perù per tutti i quattro, e cinque mesi, nei quali il sole sta nascosto sotto di una bruma spessa, il termometro si tiene a 15, o 16 gradi centesimali; quindi nel citato luogo *Humboldt* mette quella differenza tra i fenomeni difficili da spiegarsi;

ma altrove (*Essais sur les refract. astron.*) sembra attribuirlo alla sorgente costante del calore, e della umidità, che si trova all'equatore, per cui l'aria dilatata s'innalza, e nelle colonne più elevate rifluisce continuamente sopra le colonne vicine, onde in quelle pesa meno pel moto di ascensione, e invece aumenta la pressione di queste. Io aggiugnerò, che finchè si considera l'atmosfera come una massa fluida, che girando insieme con la terra sia ridotta all'equilibrio, lo strato dell'aria al livello del mare deve essere uno di quelli, che diconsi pure a livello, onde la di lei densità, e perciò ancora la pressione dovrà essere dapertutto costante, come mostra ancora *La Place* (*Mech. cel. Vol. I, pag.* 106). Se dunque nella zona torrida, e in qualunque delle due temperate siano p, e p' le pressioni, g, e g'' le gravità acceleratrici, h, e h' le altezze barometriche, e Δ la densità del mercurio, sarà $p = \Delta gh$, $p' = \Delta g''h'$; ed essendo Δ costante, e $p = p'$, dovrà essere $gh = g''h'$, e quindi $h : h' :: g'' : g$, cioè le altezze barometriche dovranno essere reciprocamente come le gravità acceleratrici g', e g, e poichè queste scemano andando dai poli all'equatore, quelle invece dovranno crescere per modo, che se h' sia l'altezza barometrica a 45°, in ogni altra latitudine l dovrà essere $h = h'(1 + 0,00284 \cos. 2l)$, e sotto all'equatore, dove è $l = 0$, e $\cos. 2l = 1$, dovrebbe essere $h = h'(1 + 0,00284)$, e se pongasi $h' = 28^p\, 2^l, 2$, all'equatore dovrebbe essere $h = 28^p\, 2^l, 2\,(1 + 0,00284)$ $= 28^p\, 3^l\, 16$. Ma *Humboldt* l'ha ritrovata di $28^p\, 1^l, 02$. Se dunque la differenza trovata da questo osservatore si volesse attribuire a circostanze accidentali, e contare questo caso tra i rarissimi, nei quali queste circostanze impediscono, che le vere leggi della natura si scoprano, anzi le mostrano come in senso contrario, converrà a queste attribuire un effetto medio non minore di $2^l, 14$; che sicuramente è molto da considerarsi.

94. E qui io non voglio lasciare di dire, che *d'Aubuisson* fa dipendere la variabilità del coefficiente $\frac{P}{\delta g}$ (19) da quella

di δ, poichè, dice egli, diminuendosi la gravità sulla superficie della terra andando dai poli all'equatore, ancora l'aria deve essere, poste le altre circostanze eguali, meno compressa a misura che si accosta all'equatore; e infatti per riguardo all'analisi è lo stesso nel coefficiente $\frac{p}{\delta g}$, che si faccia variare δ, ovvero g. Ma secondo la natura delle cose poichè sappiamo, che g realmente si varia, perchè vorremo tenere questa per costante, e invece attribuire la variazione a δ? Inoltre la dimostrazione citata di *La Place* fa manifestamente vedere, che la densità al livello del mare deve essere costante, non ostante che la gravità vada cambiandosi secondo la nota legge. Ma io dichiaro, che espongo queste idee non senza timore d'ingannarmi; perchè mi par chiaro secondo la teoria, che dovesse l'altezza media del barometro al livello del mare crescere andando dai poli all'equatore, e non vedo come conciliarla con le osservazioni del tutto contrarie.

95. Finalmente *La Place* (*Supplem. au dixieme livre du Traité de Mac. Celes. pag.* 64) ha dimostrato, che l'altezza della colonna del barometro, prescindendo da quelli, che sono formati d'un tubo di due braccia assolutamente eguali, ancora contata dalla sommità è minore di quella, che corrisponde a tutta la pressione dell'aria, perchè l'azione della capillarità del tubo tende ad abbassarla; quindi dall'effetto di questa capillarità dovranno correggersi aumentandole in proporzione non solo le altezze barometriche, come si misuravano da alcuni fino al contorno, dove il mercurio tocca il tubo, ma quelle ancora, che si misurano fino alla sommità. Ora come si debba eseguire questa correzione si può ricavare interpolando le belle esperienze di *Carlo Cavendish* (*Trans. Philos. an.* 1776) riportate ancora da *La Place* (*Supplem. à la Theor. de l'action capillaire, pag.* 66), siccome ha fatto il *Lindenau* (*Tables Barom., pag.* 114).

96. Ma oltre alla determinazione degli effetti delle di-

verse cagioni, che influiscono sopra la misura delle altezze barometriche, altri lavori sono stati intrapresi dopo la pubblicazione di quella mia Memoria. E il primo riguarda il coefficiente numerico della espressione dell'altezza cercata (36), che *La Place* seguendo le osservazioni fatte da *Ramond* sopra i Pirenei aveva per una prima approssimazione stabilito 17971, e che inseguito portò a 18336. Ora questo è pure stato direttamente determinato da *Biot*, e *Arrago* (*Sur les affinités des corps pour la lumière etc. Mém. de l'Instit.* 1808), i quali con la bilancia cercarono la proporzione tra le densità del mercurio, e dell'aria, e da quella avendo ottenuto il valore della frazione $\frac{p}{\delta}$ hanno ricavato per quel coefficiente al termine della congelazione, e sotto la pressione barometrica di $0,76^m$ il numero 18317, ossia sotto la pressione barometrica di pollici 28 il numero 18395,5, che è ben poco diverso da quello di *Ramond*.

97. Questi ha potuto sostenere il suo coefficiente contro le obiezioni di *Prony*, il quale da alcune osservazioni fatte sul Moncènis aveva ricavato, che quel coefficiente fosse troppo grande per la misura delle piccole altezze; imperciocchè *Ramond* osservando a Clermont trovò, che il coefficiente stesso gli serviva per le altezze di quattro a seicento metri, come gli aveva servito a Tarbes per altezze molto maggiori. Similmente egli potrà sostenerlo contro *Lindenau*, il quale riflettendo, che questo coefficiente avendo manifestamente qualche analogìa con le rifrazioni astronomiche, e pensando, che queste diminuiscano andando dai poli all'equatore, avrebbe voluto fare a quello ancora subire la stessa modificazione; e chiaro è al contrario, che questa non si può introdurre, poichè *Humboldt* (*Essai sur les Refract. astron. voyage etc. Vol. I*) sembra avere dimostrato, che nelle diverse latitudini le rifrazioni astronomiche non sono diverse.

98. Ma *Lindenau* per ritrovare il coefficiente da sostituire a quello di *Ramond* si è servito del metodo delle equa-

zioni di condizione, poichè egli calcolando con le tese, e col termometro Reaumuriano, perviene ad una equazione, che adoperando le nostre denominazioni sarebbe $v = M \left(1 + \frac{t-t'}{400} - \frac{1(t-t')^2}{4(200)^2}\right) L \frac{H}{H'}$ analoga alla equazione da noi trovata (36), quando in questa si trascurino gli effetti dovuti alle ineguaglianze della gravità, e l'effetto del calore dell'aria si esprima con due termini (68), e il coefficiente M si riguardi come indeterminato. Ora se pongasi $M' = \left[1 + \frac{t-t'}{400} - \frac{1}{4}\left(\frac{t-t'}{200}\right)^2\right] L \frac{H}{H'}$; e V un'altezza misurata coi metodi trigonometrici, che ritengasi per esatta; e i un fattore di condizione, si avrà l'equazione $(1+i)MM' - V = 0$, con la quale sostituendo il valore di V si potrà determinare i. Così avendo molte altezze V misurate esattamente, si ricaveranno altrettanti valori di i, dal paragone dei quali si avranno altrettanti meno uno valori di M', tra i quali si sceglierà il medio per farne uso. E infatti *Lindenau* dalle osservazioni di *De Luc*, *Saussure*, *Schuckburgh*, *Ramond*, *Roy*, e *La Caille* ha dedotto pel valore più probabile M' = 9441, che è ben poco diverso da 9437, che si otterrebbe, se si riducesse in tese il coefficiente 18393 di *Ramond* col rapporto di 0,51307 : 2 per quello del metro alla tesa sotto allo stesso calore.

99. Questo metodo per determinare i coefficienti delle formole con le equazioni di condizione, ossia pigliando i medj tra quelli, che sono forniti dalle osservazioni, che è stato illustrato già da *Lambert* (*Mém. serv. à l'usage des Mathem., et de leurs applic. etc.*) e ultimamente da *Prony* (*Eaux Cour, etc. Recherches Phys. etc.*), quantunque sia indiretto, e sembri più empirico, che scientifico, è però in mancanza dei metodi diretti il solo, che generalmente valga nelle cose fisiche per dare dei risultamenti, che più si accostino all'esattezza e quindi è pure quello, a cui seguendo l'esempio di *De Luc* si sono tenuti pressochè tutti i Fisici, che

scrissero sopra questo argomento. E primamente *Schukburgh* sul risultamento medio di tredici osservazioni raccolse, che la regola di *De Luc*, verso la temperatura media di $+3,1^{\circ R}$ dava le altezze troppo piccole di circa un cinquantesimo; laonde la temperatura normale, in cui la semplice differenza dei logaritmi delle altezze barometriche darebbe senza correzione le altezze dei luoghi espresse da tese inglesi, dovrebbe essere di $3,4^{\circ R}$; ma inseguito essendo stato dalle sue osservazioni condotto a cambiare l'espressione dell'effetto del calore sull'aria trovò, che quella temperatura normale a un dipresso, riducevasi al $0^{\circ R}$; e questa risultò pure al Generale *Roy*, che seguendo il metodo stesso prese a paragonare ottantatre osservazioni barometriche fatte sopra diverse altezze dai trecento fino ai tremille, e cinquecento piedi misurate trigonometricamente in Inghilterra; e dal paragone di sei tra queste fatte agli estremi della temperatura più distanti confermò da principio il coefficiente, che aveva già stabilito per la dilatazione dell'aria; se non che confrontando le osservazioni del Capitano *Phipps* ora *Lord Mulgrave* con quelle di *Bouguer* verso l'equatore credette di potere sospettare, che non si dasse alcuna temperatura normale comune a tutte le latitudini; che il zero della scala dei coefficienti potesse cambiarsi secondo la densità particolare dell'aria nella latitudine, dove le osservazioni sono state fatte; e che in fine questa secondo l'opinione di *Bouguer* già confutata (48) fosse composta di parti specificamente meno pesanti all'equatore che ai poli.

100. Parimenti *Trembley* ginevrino Membro dell'Accademia di Berlino, che aveva assistito *Schuckburgh* nelle misure trigonometriche prese a Salevo, e sul Molo, da quindici osservazioni dedusse la temperatura normale di $12^{\circ R}$ invece dell'altra di $16\frac{3}{4}$ data da *De Luc*, in cui fosse nulla la correzione per avere in tese di Francia le altezze con la sola differenza dei logaritmi delle altezze barometriche; ma poichè quelle essendo tutte a temperature troppo vicine a quella

normale non potevano servire per la determinazione del coefficiente, che corrisponde al cambiamento, che soffre l'aria per ogni grado di cambiamento del calore, così a questo fine si valse delle ottantatre osservazioni di *Roy*, alle quali ne aggiunse due fatte da *Lacaille* al Capo di Bona Speranza; e avendole disposte in una tavola, tolte alcune poche anomalie nelle temperature le più elevate, trovò quella temperatura normale essere di 11,5$^{\circ R}$, che è vicinissima ai 12$^{\circ R}$; e partendo da questo termine sempre pigliando il medio tra i risultamenti, che corrispondono alle temperature, che ne erano più lontane, determinò la dilatazione dell'aria di $\frac{1}{192}$ invece di $\frac{1}{215}$ stabilito da *de Luc*.

101. Ma un esempio ancora più esteso, e luminoso di quel metodo indiretto spettante a questo stesso argomento aveva già dato presso *Zach* (*Monütliche correspondens Elfter Band Junius* 1805, *pag.* 515), lo stesso *Lindenau* senza nominarsi, dove seguendo per lo più le supposizioni, e i calcoli di *Euler*, e *Oriani*, e solo riducendoli al 10$^{\circ R}$ molto più comodi dell'altro usato da questo, col metodo delle equazioni di condizione paragonò più di centoventi altezze misurate trigonometricamente per determinare prima la temperatura normale, in cui la differenza dei logaritmi delle altezze barometriche dasse l'elevazione dei luoghi, e poi la correzione, che per ottenere questa elevazione dovevasi praticare a quella differenza per ogni grado, per cui il calore si allontanasse in più, o in meno da quella temperatura.

102. Questo stesso metodo, il quale sciegliendo tra le osservazioni soltanto le migliori sarà sempre utilissimo alla fisica, era pur quello, che io mi era proposto di adoperare per determinare il coefficiente M (37). Ma a che fine intraprendere un lavoro lungo, e ancora non piacevole, in cui con tanta estensione era già stato prevenuto da *Lindenau*. E poichè tanto questi col metodo indiretto, quanto *Biot*, e

Arrago (96) col metodo diretto hanno trovato i coefficienti ben poco diversi da quello di *Ramond*, il quale se non è il medio, almeno sta in mezzo tra quelli, io domanderò pure, perchè non vorranno i Fisici convenire insieme nell'addottarlo? Perciocchè è manifesta la necessità di convenire in uno stesso coefficiente a fine d'intendersi, e partire dalli stessi dati nella ricerca delle altezze, e difficilmente si troverà un altro coefficiente, che sia stato derivato da osservazioni migliori, o che abbia per sè maggiori autorità.

103. E ritenendo il primo coefficiente numerico della formola di *La Place*, converrà pure ritenere i coefficienti degli altrui fattori, i quali sono stati stabiliti in seguito a quel primo appunto perchè quella fornisse le altezze cercate, che più si accostassero alle osservate. Così io, che (37) proposto mi era di fare qualche cambiamento nella formola di *La Place*, dopo l'esame più attento mi sono ridotto a conoscere, che conveniva ritenerla come la migliore. Nè è già, che mi fosse riuscito difficile l'introdurvi qualche cambiamento, perchè bastava per questo pigliare il medio tra i coefficienti di *La Place*, di *Lindenau*, e di *Biot*, e *Arrago*; ma la differenza non sarebbe risultata mai tanto grande, che importasse tenerne conto; poichè d'uopo è sempre ricordarsi, che questo metodo di ricavare le altezze dei luoghi per mezzo del barometro non è che un metodo di approssimazione, la di cui esattezza non può oltrepassare un certo limite, poichè primamente con quello si argomenta da un dato piccolo, che è l'altezza barometrica, ad una cosa grande cercata, che è l'altezza dei luoghi, e questo si fa per mezzo del barometro, che è una bilancia, sopra un di cui braccio pesa il mercurio, e sopra l'altro pesa l'aria, ma è una bilancia molto inesatta, ed infedele, perchè il mercurio oltre all'adesione, che ha col vetro, vi soffre un notabile sfregamento, onde si vede dopo poche oscillazioni arrestarsi; e perchè il barometro non può mostrare all'osservatore i cambiamenti locali, che accadono nello strato d'aria, che si pesa. E questo io

dico solamente per istabilire il giusto valore del metodo di livellare col barometro, e non già per deprimerlo ancora di sotto ai metodi trigonometrici, poichè ancora con questi per ragione degli stromenti, e della incertezza delle rifrazioni non si può aspettare una esattezza maggiore che con quello.

104. La formola adunque per ottenere il valore di v (32) sarà $v = 18336^{met.} (1 + 0,0028371 \,.\, \cos.\, 2\psi) \left(1 + 2 \,.\, \frac{t+t'}{1000} \right) \times \left[\left(1 + \frac{v}{a} \right) \mathrm{L} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'} + \frac{v}{a} \,.\, 0,868589 \right]$, nel quale è $\mathrm{H} = h$, $\mathrm{H}' = h' + h' \,.\, \frac{v - v'}{5412}$; $a = 6366198^{met.}$; la gravità è riportata non all'equatore, ma al paralello medio di 45°; e nel secondo membro si dovrà a v sostituire il suo valore, che risulta supponendo $v = 0$ nello stesso secondo membro. E prescindendo dai coefficienti relativi alle ineguaglianze della gravità tre cose in quel valore meritano particolare attenzione, e sono il coefficiente metrico, la temperatura normale, in cui l'altezza cercata dei luoghi risulta senz'altro dal prodotto di quel coefficiente nella differenza dei logaritmi delle altezze barometriche osservate al piede, e alla cima dell'altezza cercata; e finalmente i coefficienti, che esprimono le variazioni, che subir debbono i volumi dell'aria, e del mercurio per ogni grado di cambiamento, che segua sopra, o sotto alla temperatura normale. Dai num. 99, e 100 è manifesto, che prima di *Ramond*, e *La Place* lo studio dei Fisici era rivolto a determinare tanto la temperatura normale, quanto questi coefficienti, poichè per quel coefficiente primo volevasi ad esempio di *Bouguer* ritenere un numero della serie decupla, affinchè fosse ancora un coefficiente virgolare, la di cui moltiplicazione nella differenza dei logaritmi delle altezze barometriche si potesse sempre eseguire col solo trasporto della virgola, che in questa differenza distingue i decimali, onde nel calcolare nasce grande facilità.

105. Ma questa non fu molto valutata da *Ramond*, e *La Place*, ai quali parve migliore vantaggio il fissare per temperatura normale il $0^{\circ R}$, laonde rivolgere dovettero lo studio loro a modificare convenientemente tanto quel primo coefficiente metrico, quanto gli altri due coefficienti di correzione. E si avverta, che la ragione di questo fu quella precisamente di tenere il $0^{\circ R}$ per temperatura normale, e non già quella di far uso delle misure del nuovo sistema metrico, come sembra indicare l'Estensore tante volte citato degli articoli della Biblioteca britannica; poichè ancora a *Lindenau* quel coefficiente non risultò virgolare, sebbene siasi servito delle antiche misure francesi di piedi, e tese, perchè egli pure ha fissato la temperatura normale ad arbitrio a $0^{\circ R}$.

106. Per diminuire la difficoltà, che si aveva nel ridurre a numero l'espressione analitica di v (104), che tolto il coefficiente virgolare era divenuta ancora maggiore, un primo ripiego preso fu quello di perdere una parte dell'esattezza, e tralasciando alcuni termini dei più piccoli cambiare quella espressione in una di approssimazione; così *Prony* (*Bibliot. britan. scienc. et arts, vol.* 43, e *Voyage d'Humboldt quatr. part., Vol. I*) avendo posto $k = 18336$; $\psi' = 0,002845 \times \cos. 2\psi$; $\delta = 2 . \frac{t + t'}{1000}$; $L \frac{H}{H'} = \lambda$; $P' = \frac{\lambda + 0,868589}{6366198}$; $vP' = P$; trascurando i termini troppo piccoli per dare un considerabile errore, che sono $k (\delta\lambda\psi' + \psi'P + \delta P + \delta\psi'P)$ ha trovato $v = k\lambda (1 + \delta + \psi' + kP)$, che per mezzo dei logaritmi si calcola facilmente, e ha il vantaggio di presentare lo svolgimento di ciascun termine di correzione separatamente.

107. Similmente *Ramond* (*Jour. de Physique* 1810) riduce il calcolo della formola esprimente le altezze alle tre seguenti

$$Lh - [Lh' + L (5412 + v - v') - L\,5412] = a;$$

$$La + L \frac{1000 + 2 (t + t')}{1000} + L\varphi = Lv,$$ che è il logaritmo della differenza cercata di due altezze.

$L\varphi$

$$L\varphi = L\,18393 \pm L\,\frac{362,4}{351,4 - 2\,.\,\text{sen.}^2\ \text{della altezza del polo}}$$, dove il segno $+$, o $-$ serve per le latitudini minori, o maggiori di 45°; ma *Oltmanns* (*Voy. d'Humboldt quatr. part., vol.* 1, e *Ephem. de Berlin* 1809) ha cercato di ridurre queste formole a maggiore semplicità pei casi, dove una osservazione barometrica sia fatta al livello del mare, o nón molto sopra; poichè egli avverte, che si può supporre

$$a = Lh - Lh' - L\left(1 + \frac{v - v'}{5412}\right)$$, o piuttosto

$$a = Lh - L\left(1 + \frac{v - v'}{5412}\right) - Lh'$$; e poichè posta s la sottangente del sistema è $L\left(1 + \frac{v - v'}{5412}\right) = \frac{v - v'}{5412}\,.\,s$, si avrà

$$a = Lh - \left(\frac{v - v'}{5412}\right) s - Lh'$$. Ma se sia h l'altezza presa verso il livello del mare si potrà tenerla per costante, e perciò ancora cercare la variazione del numero invece di quella del logaritmo; dunque si avrà

$$Lh - \left(\frac{v - v'}{5412}\right) s - Lh' = L\left[h - \left(\frac{v - v'}{5412}\right)\right] las - Lh' =$$

$$L\left[h - \frac{h}{5412}\,.\,(v - v')\right] - Lh' = a$$; poichè $l\,.\,as$, che è il logaritmo della base a moltiplicata per la sottangente del sistema è $= 1$; ma presa $h = 337^{li}, 8$ si ha prossimamente $\frac{h}{5412} = \frac{1}{16} = 0,0642$; dunque pel caso enunciato la formola di *Ramond* sarà $L\left[h - \left(\frac{v - v'}{16}\right)\right] - Lh' = a$;

e $La + L\varphi + L\left(\frac{1000 + 2(t + t')}{1000}\right) = Lv$.

108. Un altro ripiego usato per diminuire la difficoltà del conteggio è stato quello di preparare delle tavole, nelle quali alcuni conti si trovassero già fatti; poichè come in altre parti delle matematiche alcuni calcolatori tolleranti della

fatica hanno con una modestia, e una perseveranza egualmente degna di elogio consecrata una parte della loro vita a lavori oscuri, che avevano l'unico oggetto di procurare ai loro contemporanei, e alle future generazioni l'avvantaggio di scorrere di un passo più rapido, e sicuro la strada delle scoperte, così è ancora accaduto per riguardo alle livellazioni, che si fanno col barometro, a rendere meno lungo, e incomodo il calcolo delle quali primamente pubblicarono alcune tavole *Horsley* (*l. c.* 51), e *Schuckburgh*, le quali non furono mai molto adoperate. In seguito lo stesso fecero *Wünschl* (*Nachtrag zu barometer messungen*), e *Biot* prima nella sua Astronomia fisica (Vol. II), e poi in un opuscolo separato (*Tables barometriques portatives*) e *Pictet* (*Bibl. britan. Vol.* 45). Ma sopra tutti in questo lavoro si distinsero *Oltmanns* (*l. c.* 107 *Voyage etc.* e ancora separatamente sotto il titolo di *Tables hypsometriques etc.*) e *Lindenau* (*l. c.* 101), e separatamente sotto il titolo di *Tables barometriques etc.*) i quali spettano ambedue a quella Nazione illustre per tanti riguardi che ha dato *Keplero*, *Speidellie*, *Ursinio* rinomati tra i primi Editori delle grandi tavole dei logaritmi, e ancora a nostri giorni *Mayer*, e *Bürg* celebri per la estensione, e miglioramento, che hanno arrecato alle tavole lunari.

109. Lasciando stare le tavole di *Biot*, che sono state costruite soltanto per calcolare le elevazioni medie, e per queste ancora si trovano in qualche caso mancanti, pare, che *Oltmanns* siasi determinato a comporre le sue tavole hypsometriche, perchè non gli parvero al bisogno sufficienti le tre, che *Lindenau* senza porvi il suo nome aveva pubblicate nel Giornale di *Zach*, le quali sebbene corrispondano alla formola, per cui furono costruite, pure nell'applicazione richiedono delle interpolazioni molto lunghe, e poi non sono che un ristretto di altre tavole più considerabili, che l'Autore stesso ha ivi enunciate, ma non pubblicate fino al 1809, cioè quattro anni dopo, quando *Oltmanns* aveva già compite, e pubblicate le sue. Si può dunque credere, che questi sareb-

besi risparmiata così grande fatica, se avesse vedute le tavole di *Lindenau*; e veramente queste non lasciano cosa veruna a desiderare per l'uso, a cui sono destinate; poichè sebbene suppongono esse le antiche misure francesi, che in Germania erano più conosciute, e il termometro ottantigrado, pure vi ha aggiunte alcune tavole ausiliari per ridurre quelle prime al sistema metrico, e al termometro centigrado, e ancora alle misure inglesi, e al termometro di *Fahrenheith*; e in fine ha posta ancora una tavola di fattori, con cui le grandezze trovate con le di lui tavole, e con la sua formola si possono ridurre a quelli, che si troverebbero, se si usassero le formole di *La Place*, *Ramond*, *Trembley*, *De Luc*, *Roy*, e *Schuckburg*.

110. Ma senza volere togliere in qualunque piccola parte il merito di *Oltmanns*, e massime di *Lindenau* siami permesso di aggiugnere, che ambedue nella introduzione premessa alle loro tavole fanno l'ingenua confessione di averle composte per supplire alle tavole logaritmiche, onde potessero senza di queste eseguire le livellazioni barometriche quegli osservatori, che non le hanno, o che non credono di doversene caricare massime nei lunghi viaggi. Ma in verità chi è, che si occupi della ricerca delle altezze col barometro, che, non possegga le tavole logaritmiche, o non sappia al bisogno servirsene. E paragonando per es. le tavole logaritmiche stereotipe con le opere d'*Oltmanns*, e di *Lindenau* chi potrebbe non trovare per la spesa, e ancora pel trasporto più comode quelle, che queste massimamente se si aggiunga, che queste servir possono al solo calcolo delle altezze, e quelle giovano ad ogni altro uso di conteggio. Quindi io dubito, che le tavole d'*Oltmanns*, e di *Lindenau* possano mai rendersi comuni, e servire all'uso dei Fisici, i quali sicuramente debbono essere più obbligati a *d'Aubuisson*, a cui spetta una tavola pubblicata da *La Metherie* (*Journ. de Physique etc. Fevrier* 1811), e dall'Estensore della Biblioteca britannica (*Scienc., et arts, Vol.* 46), che per errore l'attribuisce ad *Oltmanns*, la quale è tanto breve, che ciascun osservatore

potrebbe portarla attaccata al suo barometro, e serve alle livellazioni barometriche con una meravigliosa facilità. Questa è la seguente

Barom.	Altezza	Differ.
Cent.	*Metr.*	*Metr.*
77	0	103
76	104	104
75	210	106
74	317	107
73	425	108
72	535	110
71	647	112
70	760	113
69	875	115
68	992	117
67	1110	118
66	1230	120
65	1352	122
64	1476	124
63	1601	125
62	1728	127
61	1858	130
60	1990	132
59	2124	134
58	2261	137
57	2400	139
56	2541	141
55	2685	144
54	2831	146
53	2980	149
52	3132	152
51	3287	155
50	3445	158
49	3607	162
48	3772	165
47	3940	168
46	4112	172
45	4287	176
44	4466	179
43	4650	184
42	4838	188
41	5031	193
40	5228	197
39	5430	202
38	5638	208
37	5851	213
36	6070	219

111. Per mostrare l'uso di questa formola io l'applicherò all' esempio recato dagli Autori citati, in cui suppongo $h = 75, 28$ centimetri, $h' = 59, 10$; $t = 20^\circ, 4$ del termometro centigrado, $t' = 6^\circ, 2$; $v = 19^\circ, 6$; $v' = 5^\circ, 2$; e $\psi = 41^\circ$; nella colonna di mezzo delle altezze si prenda il numero corrispondente a 75 parte intiera della altezza h del barometro inferiore che è 210, e da questo sottraggasi il prodotto della frazione 0, 28 di h' per la differenza 106, che nella colonna delle differenze corrisponde alla parte intiera, cioè da 210 sottraggasi 30, e si avrà 180. Similmente per l'altra altezza h' del barometro superiore si prenderà l'altezza 2124, che corrisponde a 59 centimetri parte di lei intiera, e sottrarrassi da questa il prodotto della sua frazione 0, 10 per la differenza corrispondente 134, che è 13, e si avrà 2111. La differenza dei due numeri 2111, e 180 trovati, cioè 1931 sarebbe l'altezza v cercata, se la temperatura fosse dapertutto al gelo, che è il 0 del termometro centigrado (se però fosse $h = 77 + x$ centimetri al numero trovato per h' si dovrà aggiugnere $103, x$ per avere v nell' esposto stato della temperatura).

112. La correzione pel diverso calore del mercurio nel barometro si avrà per mezzo della formola $v \mp \frac{3}{2}(v - v')$ pigliando il segno —, o + secondo che v' sarà $<$, o $>$ di v; onde nell' esposto caso l'altezza cercata sarebbe $1931 - 14,4 - 7,2 = 1931 - 21,6 = 1909,4$.

113. E se l'altezza così corretta pel calore del mercurio si chiami v', si avrà l'altezza medesima corretta pel diverso calore dell' aria per mezzo della formola $v'\left(1 + 2 \cdot \frac{t \pm t'}{1000}\right)$ pigliando il segno +, o — secondo che ambedue i gradi t, e t' saranno di sopra, o uno sarà di sotto al zero; onde nell' esposto esempio l'altezza cercata sarebbe $1909,4\left(1 + 2 \cdot \frac{26,6}{1000}\right) = 1909,4(1 + 0,0532) = 1909,4 + 101,580 = 2010,980$. Ma nei casi ordinarj nella espressione di $\frac{t+t'}{1000}$ si potranno

pigliare le cifre decimali ancora in numero minore di quattro.

114. Se questa altezza così corretta si chiami v'', essendo la premessa tavola costruita per la latitudine di 45°, si avrà la correzione dipendente dalla diversa latitudine per mezzo della formola $v''\,(1 \pm 45 \mp \psi)$ pigliando i segni superiori, o gli inferiori, secondo che è $45 > o < \psi$; laonde nell' esposto caso l'altezza cercata sarebbe $2010,980\left(1+\frac{4}{10000}\right) = 2010,980 \,.\, 1,0004 = 2011,784$. Nella zona torrida si accresceranno le altezze di $2\frac{1}{2}$ millesimi, e si diminuiranno d'altrettanto nelle glaciali.

115. Se il barometro avesse la scala di ottone, per correggere l'effetto della sua dilatazione converrebbe diminuire di un decimo i gradi di calore v, e v' dei termometri fisici; quindi nel proposto esempio i loro valori sarebbero 17, 6, e 4, 7, onde l'altezza risulterebbe 2014, 1 invece di 2011, 784.

116. La premessa tavola è calcolata sulle formole di *d'Aubuisson*, le quali sono $v' = 18365\,(1 + 0,00284 \,.\, \cos.\, 2\psi) \times [1 + 0,002\,(t + t')]\left[\mathrm{L}h - \mathrm{L}h'\left(1 - 1\left(\frac{v - v'}{5412}\right)\right)\right]$; e $v = v'\left(1 + 2\,\frac{a + v'}{r}\right)$; nelle quali a è l'altezza della stazione inferiore sopra il livello del mare, e r il raggio terrestre. E se l'altezza dell'esempio arrecato si ricercasse con queste formole, si troverebbe 2011, 9 metri ben poco diversa da quella, che si è ritrovata di sopra. Similmente per la più alta delle montagne, che è il Chimboraço, pigliando le osservazioni di *Humboldt*, che danno $h = 0,76200$; $h' = 0,37717$; $v = 25^\circ,3$; $v' = 10^\circ,0$; $t = 25^\circ,3$; $t' = -1^\circ,6$; $\psi = 1^\circ 45'$ si avrebbero 5857 metri tanto per la formola, quanto per la tavola; e facendo ancora la correzione dipendente dalla latitudine la prima darebbe metri 5873, e l'altra 5872.

117. Veramente le premesse formole, per le quali è fatta la tavola di *d'Aubuisson* differiscono da quella di *La Place* (36).

Ma non è difficile dal valore ritrovato per quelle ricavare l'altro, che da questa può risultare, poichè se questo si chiami v, e quello V si avrà lasciando i fattori comuni alle due formole $v : V :: 18336 : 18365$ a un dipresso, poichè i fattori diversi sono troppo piccoli, perchè possano produrre una differenza notabile. Quando adunque sia ritrovata V, si potrà senza temere alcun sensibile errore porre $v = V \cdot 1,00005$.

118. Ma noi non siamo forse lontani da un grande cambiamento in queste ricerche. Egli è ben noto, che *Mariotte* dopo di avere scoperta la legge, secondo cui l'aria si condensa in proporzione dei pesi comprimenti, volendo applicarla al ritrovamento delle altezze dei luoghi, e di quella singolarmente di tutta l'atmosfera, immaginò questa divisa in 4032 strati quanti sono i dodicesimi di linea in pollici 28, ciascuno dei quali a base eguale pesasse tanto quanto un dodicesimo di linea in altezza di mercurio, e avesse costante la densità, la quale però salendo andasse scemando nella ragione, in cui scemava il peso sovraincombente. Ora conoscendo la proporzione tra i pesi specifici dell'aria, e del mercurio sotto all'altezza barometrica di pollici 28 era ben facile di derivarne l'altezza del primo strato, che per riguardo ad un dodicesimo di linea doveva essere come il peso del mercurio a quello dell'aria; e ricavata avendo l'altezza di questo strato conobbe *Mariotte*, che per mezzo dei logaritmi si poteva senza grande difficoltà calcolare l'altezza degli altri strati separatamente, la somma dei quali data avrebbe l'altezza dei luoghi, quando fosse data la differenza dell'altezza barometrica ridotta a dodicesimi di linea, che corrispondeva a questi luoghi. Ma volendo pure risparmiare ancora la difficoltà di questo calcolo logaritmico, si prese egli stesso la fatica di comporre una tavola, in cui già si trovano calcolate le altezze degli strati atmosferici, che corrispondono al peso dei dodicesimi di linea in altezza di mercurio, e così diede egli il primo esempio di tavole preparate per comodo degli osservatori, che vogliono dalle altezze del barometro argomentare le altezze dei luoghi.

119. Questo, che si può chiamare metodo a strati, cadde prestamente in discredito, perchè messo alle prove dava le altezze di alcuni monti troppo diverse dalle misure trigonometriche, e fu poi del tutto abbandonato dai Fisici, i quali assai prestamente rimasero invaghiti del metodo Hallejano. E infatti geometricamente parlando sono in questo metodo maravigliose l'eleganza, e l'evidenza. Ma d'altra parte la facilità quanto è maggiore in quel primo, il quale non richiede calcolo sublime in verun modo, nè conduce ad alcuna formola un poco complicata? E lo stesso metodo Hallejano non è poi esattissimo, perchè si potrebbe ottenerne dei risultamenti ancora più precisi, se si adoperassero i logaritmi per es. a dieci decimali invece di quelli a sette. Finalmente gli errori risultanti dal metodo di *Mariotte* non erano tanto prodotti da questo, quanto dall'uso, che egli ne fece, poichè in primo luogo si servì di una proporzione tra i pesi specifici del mercurio, e dell'aria, che non era esatta bastantemente; appresso avendo trovato con *Picard*, e *Cassini*, che all'osservatorio di Parigi conveniva alzarsi per 63 piedi, perchè il barometro, che era a pollici 28 si abbassasse di una linea, per comodo del calcolo argomentò, che al livello del mare per vedere questo abbassamento avesse dovuto convenire alzarsi per piedi 60. Finalmente ancora per scemare la difficoltà, e lunghezza delle operazioni egli calcolò le altezze di quei strati come se fossero tanti termini di una serie aritmetica del second'ordine, quando in realtà quelle spettano ad una serie di un ordine superiore, o piuttosto ad una serie armonica.

120. Ora *Benzenberg* ha procurato di rimettere in onore quel metodo a strati, poichè primamente in un opuscolo (*Beschreibung eines einfachen Reisebarometer. Nebst einer Anleitung zur leichtern Berechnung der Berghöhen etc.*) dopo di averlo esposto con molto dettaglio ha fatto stampare una tavola che presenta le altezze delli strati corrispondenti ciascuno a base eguale al peso di una colonna di mercurio alta

ta $\frac{1^{mo}}{100}$ di un pollice dalla pressione barometrica di pollici 29 fino ai 23 partendo dalla supposizione, che il mercurio sotto ai pollici 29 pesi 10494 volte più dell'aria, onde il primo strato riesce alto 8, 746 di piede. Appresso egli ne fece l'applicazione a diverse montagne, e mostrò, che l'errore non arrivava che a pochi piedi, e singolarmente nel *Montblanc* la differenza tra la misura trovata con questo metodo, e l'altra derivata dalle operazioni geodetiche non oltrepassava i piedi 52, laddove giugneva fino ai piedi 155 con la stessa formola di *Trembley*, che la dava minore di tutte le altre. Una gran parte di queste cose egli ha replicate nel Giornale di *Gilbert* (*Annalen der Physik Jahrgang* 1810. *Zehntes stück*), dove egli avverte, che basterebbe duplicare il numero degli strati, nei quali s'intende divisa l'atmosfera, riducendoli per esempio al peso di $\frac{1}{200}$ di pollice di mercurio, perchè l'errore si ridurrebbe anch'esso alla metà, e il metodo si accosterebbe ancora di più all'esattezza. Nè è da temere, che la formazione, o l'uso di una somigliante tavola debba importare lunga fatica; poichè quella di *Benzenberg* non gli costò che il travaglio di due giorni, e riempie soli due foglj, e se ne compie l'uso con una sottrazione, e una moltiplicazione soltanto. Ma per ora basti il cenno dato del metodo degli strati; poichè forse in altra occasione io farò parte all' Italia del lavoro, che *Benzenberg* ha dato alla Germania, non senza qualche accrescimento.

121. Niuno deve meravigliarsi di vedere l'impegno di tanti illustri Fisici de' nostri giorni non solo per rendere facili i calcoli richiesti alla derivazione delle altezze dalle osservazioni barometriche, ma ancora per ridurre il metodo stesso quasi alla portata del popolo. Una volta si cercavano con questo le sole altezze delle montagne, che pareva un oggetto di mera curiosità; ora si vorrebbero livellare tutte le ineguaglianze della terrestre superficie per fissarne la posizio-

ne per riguardo al livello del mare. E veramente egli è noto, che per conoscere la posizione di un qualunque luogo abbisognano tre coordinate, delle quali due sono date dalla geografia astronomica, che ne mostra la latitudine, e la longitudine, ossia la posizione sulla superficie della terra, per cui si può pigliare quella del mare; ma a compimento della geografia fisica manca ancora una terza coordinata, che deve essere a quelle due perpendicolare, e che perciò segnar deve per ciascun luogo l'elevazione, o la depressione per riguardo a quella superficie. E chi non vede, che la cognizione di questa coordinata non meno che quella delle altre due è necessaria, e deve contribuire alla cognizione della economia tutta della vegetazione, e della vita animale, e della stessa costituzione morale dell'uomo? Ma noi siamo ancora ben lontani dall'avere le osservazioni, che farebbono di bisogno alla determinazione di quella coordinata, se non per tutte, almeno per le principali ineguaglianze terrestri; poichè dopo i lavori di *Condamine*, *Bouguer*, *Humboldt*, *Boupland*, e *Caldus* non abbiamo in tutta l'America che cinquecento punti circa, dei quali si conosca la posizione per riguardo a quel livello; e sicuramente un numero maggiore per l'Europa ne fissarono *De Luc*, *Saussure*, *Pictet*, *Schuckburgh*, *Roy*, *Weiss*, e *Tralles* nella Svizzera, lo stesso *Schuckburgh*, *Venini*, *Pini*, e *Oriani* nell'Italia, *Gersdorf*, e *David* nella catena dei monti tra la Boemia, e la Sassonia, *Vidal*, *Reboul*, *Mechain*, e *Ramond* ne' Pirenei, *Vierthaller*, *Schultess*, *Moll*, e gli Arciduchi d'Austria *Giovanni*, e *Ranieri* in molte parti della Monarchia Austriaca, e massime del Tirolo, e *Villefosse* nell'Harz; e finalmente *Humboldt* (*Voyage etc. quattr. part. etc. Astronomie etc.*) pensa, che ancora in Asia siano conosciuti circa cinquanta punti. Ma nell'Europa stessa non abbiamo ancora la livellazione di alcuno dei grandi fiumi, o di alcuna delle grandi strade, prescindendo da quella, che pel Brenner conduce da Monaco a Trento, e che *Buch* ha percorsa sempre col barometro alla mano.

122. Ora le osservazioni richieste per la determinazione di quella terza coordinata non si possono aspettare che dall' uso del barometro, perciocchè quello degli stromenti geodetici è molto difficile, e costoso, e forse pei difetti, che questi portano seco dalla prima costruzione, o contraggono nei trasporti, e massime per la incertezza delle rifrazioni non dà risultamenti migliori; laonde le misure trigonometriche del Montblanc prese da *Pictet*, e *Schuckburgh* differiscono tra loro fino a 114 piedi, che sono $\frac{1}{119}$ del totale, e all'opposto *Benzenberg* (119) col suo metodo vi trovò la differenza sola di piedi 52, che non sono che $\frac{1}{250}$ del totale. È adunque chiara la ragione dell'impegno, per cui si vorrebbe moltiplicare, quanto si può, le osservazioni barometriche, e rendere popolare il metodo di servirsene per le livellazioni liberandolo non solo dalla necessità del calcolo sublime, ma ancora da ogni formola algebraica. Ad ottenere però l'intendimento proposto forse gioveranno le seguenti riflessioni.

123. E primamente come nelle due coordinate della latitudine, e della longitudine, così nella terza, che si potrebbe chiamare di livello, alcuni piedi di errore non si debbono curare, perchè in realtà non si potrà mai assicurare, che vi siano; e quando bene ciò si potesse, quell'errore non potrà mai influire notabilmente sulle conseguenze, che da quella si vogliono derivare; quindi debbono sembrare inutili gli sforzi, che ancora fare si potessero per indurre qualche cambiamento nelle formole, poichè la diligenza dei Fisici le ha oramai ridotte al segno, che col cambiarle si otterrebbe soltanto la differenza di pochi piedi. Al contrario fa d'uopo, che i Fisici convengano insieme, affinchè i valori di quella terza coordinata ancora spettanti a diversi luoghi si possano fra loro paragonare; il che richiede pure l'accordo di tutti tanto nel metodo di osservare, quanto nella formola per calcolare; poichè pare, che con ragione *Benzenberg* abbia escluse le li-

vellazioni dell' Harz date da *Villefosse* (*Gilbert. Annalen etc. Jahrgang* 1810 *eilftes stüch*) appunto per la correzione particolare, che ha introdotta nelle sue osservazioni, e nella formola di *de Luc* dipendente dalla costituzione stessa del suo barometro.

124. Ora per quanto spetta alla formola da usarsi, io sono sempre nella opinione di pigliare quella di *La Place*, e alle ragioni addotte altrove aggiungo pure gli esempj d'*Humboldt*, e *Oltmanns*, che con quella hanno calcolata l'altezza di poco meno di cinquecento punti nell' America. Per riguardo poi al metodo di osservare converrebbe, che tutti si valessero di barometri costruiti all' istesso modo, e che stati fossero insieme paragonati, perciocchè sebbene non sia da concedere a *Villefosse* (*Annales de Physique etc.* 1808), che ogni barometro sia individuo, e presenti differenze notabili da qualunque altro, che possono influire sulle conseguenze, che si vogliono dedurre dalle sue osservazioni, è però vero, che questo succede in alcuni, e che per escludere ogni pericolo d'inganno converrebbe, che gli Artisti avessero almeno un campione, con cui potessero paragonare i barometri, che mettono in commercio. Pareva, che a conseguire questa corrispondenza di osservazioni mirasse l'Accademia di Manheim, quando insieme ad altri stromenti meteorologici mandò in diversi luoghi ancora il barometro; e se questa liberalità avesse potuto durare più lungamente, e quelli, che ricevettero gli stromenti, ne avessero tutti fatto il conveniente uso, e pubblicate le loro osservazioni, sicuramente molto ne avrebbe approfittato la meteorologia, e massime il metodo di livellare col barometro. Ma senza cercare una condizione, che non si può ottenere, io penso, che poichè l'arte di costruire i barometri è ridotta ad un grado, che non vi si possono temere sostanziali differenze, il desiderio di avere una quasi generale livellazione della superficie più colta della terra si potrà soddisfare in gran parte, se più, che si potrà, ancora con le liberalità dei Governi si moltipliche-

ranno i barometri, e i termometri, e ciascuno sarà sollecito di pubblicare le sue osservazioni, onde si possa da molte ricavare la media, che debba poi servire all'uso.

125. E veramente *Ramond* in una Memoria letta all'Istituto di Parigi riportata per estratto nella Biblioteca Britannica (*Scien., et Arts T.* 44) ha mostrato, che le migliori osservazioni barometriche per le livellazioni sono le simultanee vicine, nelle quali al tempo stesso osservansi due barometri a poca distanza uno dall'altro nel senso orizzontale, poichè la differenza tra i risultamenti, che si ricavano da queste, e dalle livellazioni geodetiche più esatte, sono come insensibili, e si trovano indifferentemente in più, e in meno. Ma non sono di molto inferiori le osservazioni simultanee quantunque lontane, che si fanno al tempo stesso sopra due barometri distanti orizzontalmente uno dall'altro dalle sei fino ancora alle ottanta leghe, purchè quelle non siano isolate, ma le medie tra molte fatte alla medesima ora, e massime al mezzodì in circostanze di stagioni, di temperature, di venti, di umidità ec. molto diverse; poichè sebbene le variazioni atmosferiche non seguano al tempo stesso nelle due stazioni, come adoperando quelle osservazioni si suppone, ad ogni modo, quando queste si replicano, quelle si compensano, e si riducono ad un equilibrio medio, a cui si riporta l'osservazione media, la quale dà delle conseguenze tanto vicine all'esattezza geometrica, quanto le osservazioni simultanee vicine. Nè però le simultanee lontane quantunque isolate si dovranno trascurare, perchè le variazioni atmosferiche negli intervalli di circa sei leghe non interrotti da montagne seguono al tempo stesso, e nelle distanze ancora maggiori, come tra Parigi, Londra, e Marsiglia, si propagano con una celerità meravigliosa, che non si può colla celerità dei venti spiegare.

126. Finalmente ancora di grande profitto potranno essere le osservazioni isolate paragonandole con quella, che si avrebbe al livello del mare, ovvero con altre pure isolate

fatte successivamente. E nel primo caso converrà tener conto delle variazioni, alle quali l'altezza barometrica al livello del mare è soggetta (90), e della differenza del calore, che si avrà tra questa stazione, e l'altra dell'osservazione dando nell'estate un grado Reaumuriano meno di calore per ogni cento tese circa d'innalzamento (62...); e così in questo, come nell'altro caso converrà sciegliere quelle osservazioni, sulle quali ossia per la piccola differenza del tempo, ossia per la qualità del clima, o della stagione si potrà argomentare, che le variazioni dell'atmosfera abbiano avuta la minima influenza; quindi al proposto fine sogliono le osservazioni pigliarsi ogni due ore al più, e nei giorni più costantemente sereni d'estate; e con questo metodo non solo *Humboldt* per lo più nella zona torrida, dove le variazioni atmosferiche sono quasi nulle, ha potuto livellare quattrocento cinquantatre punti in America sopra una estensione di ottocento venticinque leghe dal Nord al Sud, e settecento dall' Est all'Ovest, e compiere il progetto gigantesco di presentare il taglio verticale del Messico dal mare Atlantico al Pacifico, ma ancora in Europa *De Luc, Saussure, Schukburgh, Pictet, Buch, Pini, Oriani, Venini,* ed altri han potuto determinare le altezze di qualche migliajo di punti molto importanti, che serviranno a formare un fondo ben ampio per la Geografia fisica.

127. Le ricerche delle altezze dei luoghi sono divenute più interessanti, dacchè *Humboldt* richiamando un problema già esposto da *Varennio* (*Geogr. gener. cap. IV, e IX*) ha pensato di valersi delle altezze dei monti come di basi per determinare le distanze orizzontali, che hanno tra sè, o con altri luoghi; e mostrandone l'uso, e il vantaggio coll'unire la Capitale del Messico colla Veracrux sopra una distanza di 160000 tese ha indicato un facile metodo per la costruzione delle carte geografiche. Della soluzione di questo problema oltre ad *Humboldt,* e *Oltmanns* nelle opere già citate, e *De Lambre* nella Memoria sopra la misura dell'arco del me-

ridiano si è occupato *Lindenau* (*Tabl. barom., pag.* XLVIII), il quale cita la corrispondenza di *Zach* (*Vol. XIV*), e procede in questi termini. Sia k la distanza orizzontale di due monti, o di un monte da un certo luogo della superficie terrestre da cui si possa vedere la di lui sommità; sia poi δ la distanza apparente di uno dal zenit dell'altro; e sia C l'angolo, che comprendono al centro della terra i raggi corrispondenti ai due monti, o ad un monte, e al luogo sovraindicato; pongasi poi n la ragione della rifrazione a C, onde la distanza vera della sommità di uno dal zenit dell'altro sia $\delta+nC$; e finalmente sia N l'altezza relativa dei due monti, o di un monte sopra il luogo, da cui è stato riguardato; si avrà, dice *Lindenau*, l'equazione $N\,.\cos.\frac{C}{2}=k\,.\cot.\left(\delta-\frac{C}{2}+nC\right)$, e poichè C si può sempre pigliare tanto piccolo, che sia $\cos.\frac{C}{2}=1$, si avrà $N=k\,.\cot.\left(\delta-\frac{C}{2}+nC\right)$.

128. Da queste espressioni di *Lindenau* mi parve, che si potesse argomentare quella prima equazione essere generale, ed esatta, e la seconda particolare, e limitata al caso di $\cos.\frac{C}{2}=1$. Se così è, confesso, che a me non è mai riuscito di dimostrare la prima; anzi condotta avendo la corda dell'arco corrispondente alla distanza k, mi parve, che gli angoli formati dalla visuale con questa corda, e con l'altezza del monte dovessero essere espressi da $90^\circ-\delta-nC+\frac{C}{2}$, e da $\delta+nC-C$; e gli angoli formati da quell'altezza con la corda stessa, e con la tangente, che eguaglia la distanza orizzontale, dovessero essere espressi da $90^\circ+\frac{C}{2}$, e da $90^\circ-C$; laonde dal triangolo formato dalle prime tre rette si ricaverebbe, che quella corda sta ad N come $\text{sen.}\,\delta+nC-C:\text{sen.}\,90^\circ-\delta-nC+\frac{C}{2}$, come $\text{sen.}\,\delta+nC-C:\cos.\delta+nC-\frac{C}{2}$;

e del triangolo formato con queste altre tre rette seguirebbe, che quella corda sta alla distanza orizzontale k come sen. $90^\circ + \frac{C}{2}$: sen. $90^\circ - C$, come cos. C : cos. $\frac{C}{2}$; e perciò l'equazione generale, ed esatta sarebbe

$$N . \text{sen.}(\delta + nC - C) . \cos . \frac{C}{2} = k . \cos . \left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right) \cos . C;$$

ossia

$$N . \cos . \frac{C}{2}\left[\text{sen.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)\right] . \cos . \frac{C}{2} - \cos . \left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right) \times \text{sen.} \frac{C}{2} = k . \cos . \left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)\left(\cos .^2 \frac{C}{2} - \text{sen.}^2 \frac{C}{2}\right),$$

da cui pel caso di $\frac{C}{2}$ piccolissimo ponendo cos. $\frac{C}{2} = 1$, e sen. $\frac{C}{2} = 0$ si ricava $N . \text{sen.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right) = k . \cos . \left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)$, ossia $N = K . \text{cotang.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)$, che è la seconda equazione di *Lindenau*.

129. Ma C è sempre una funzione di k data per l'equazione $C = \frac{k}{\text{rag.} \text{♁} . \text{sen.} 1''}\left(1 - \frac{e^2}{2} . \text{sen.}^2 L\right)$, in cui e, ed L esprimono l'eccentricità della terra, e la latitudine geografica; quindi si potrà eliminare C dall' equazione trovata per lasciarvi la sola incognita k. Nel caso però in cui sia $\frac{C}{2}$ assai piccolo, molto più sarà tale $\frac{C}{2} - nC$, onde si potrà porre $\cos . \left(\frac{C}{2} - nC\right) = 1$, e $\text{sen.}\left(\frac{C}{2} - nC\right) = C - nC$; ed eseguite queste sostituzioni nell' equazione $N = k . \cot . \left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)$, ossia $N . \text{sen.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right) = k . \cos . \left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)$, ossia

$$N\left[\text{sen.} \delta . \cos . \left(nC - \frac{C}{2}\right) + \cos . \delta . \text{sen.}\left(nC - \frac{C}{2}\right)\right] =$$

$k \,.\left[\cos.\,\delta\,.\cos.\left(nC-\frac{C}{2}\right)-\text{sen}.\,\delta\,.\,\text{sen}.\left(nC-\frac{C}{2}\right)\right]$, si avrà $k\,.\cos.\,\delta+k\left(\frac{C}{2}-nC\right).\,\text{sen}.\,\delta=N\,.\,\text{sen}.\,\delta-N\left(\frac{C}{2}-nC\right).\cos.\,\delta$; e se per brevità pongasi $\frac{1}{\text{rag.}\,♁}\left(1-\frac{e^2}{2}\,.\,\text{sen}.^2\,L\right)=\alpha$ resterà $k^2+\frac{1+(\frac{1}{2}-n)\alpha N}{(\frac{1}{2}-n)\,\alpha\,.\,\text{tang}.\,\delta}\,.\,k-\frac{N}{(\frac{1}{2}-n)\,\alpha}=0$, e perciò $k=-\frac{1}{2}\,.\,\frac{1+(\frac{1}{2}-n)\alpha N}{(\frac{1}{2}-n)\alpha\,.\,\text{tang}.\,\delta}\pm\sqrt{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1+(\frac{1}{2}-n)\alpha N}{(\frac{1}{2}-n)\,\alpha\,.\,\text{tang}.\,\delta}\right)^2+\frac{N}{(\frac{1}{2}-n)\,\alpha}\right]}$.

130. Quantunque il valore trovato di k non sia rigoroso, non si può tuttavia temere, che i termini trascurati lo rendano sensibilmente mancante se non dove si tratti di distanze grandissime. Ma per quelle, che oltrepassano le 1000 tese il calcolo numerico di quel valore riesce un po faticoso, poichè esso allora diviene assai grande. Per diminuire questa difficoltà *Lindenau* introduce le formole trigonometriche, perciocchè se facciasi $p=\frac{1+(\frac{1}{2}-n)\,\alpha N}{2(\frac{1}{2}-n)\,\alpha\,\text{tang}.\,\delta}$; $q=\frac{N}{(\frac{1}{2}-n)\,\alpha}$; tang. A $=\sqrt{\frac{q}{p}}$, sostituendo nell'equazione $k^2+\frac{1+(\frac{1}{2}-n)\,\alpha N}{(\frac{1}{2}-n)\,\alpha\,.\,\text{tang}.\,\delta}\,k-\frac{N}{(\frac{1}{2}-n)\,\alpha}=0$, e analizzando si troverà $k=\text{tang}.\,\frac{A}{2}\,.\sqrt{q}$.

131. Per ridurre in pratica questo metodo è d'uopo determinare la rifrazione terrestre. Si sa, che il coefficiente n, da cui questa dipende, è diverso secondo il vario stato dell'atmosfera; e *De Lambre* per la Francia stabilisce $n=0,075$ d'estate, 0,08 alla primavera, e all'autunno, e da 0,09, a 0,010 d'inverno; *La Place* prende $n=0,084$; ma *Lindenau* prende il valore di $n=0,077$, che egli dice di avere ricavato da molte osservazioni sue, e di *Roy*, *Bouguer*, *Boskovich*, *De Lambre*, e d'altri essendo il barometro a 28^p; e con questo valore ha costruita una tavola, che presenta la distanza orizzontale per approssimazione; per correggere però gli errori, che nei valori forniti da questa tavola risultano per la

incostanza della rifrazione, egli osserva, che questa è funzione della elevazione media delle due stazioni, e scema in proporzione dell'altezza; e nominando Δk, e ΔR le variazioni della distanza orizzontale, e della rifrazione ricava l'equazione $\frac{\Delta k}{\Delta R} = \frac{N - 0,423\, \alpha . k^2}{(0,846\, \alpha . k . \text{tang.}\, \delta + 0,423\, \alpha N + 1) \cos.^2 \delta}$; o quest'altra di una maggiore approssimazione $\Delta k = \Delta R \left(\frac{k^2 . \text{sen.}\, 1''}{15,861 . \cos.(\delta + C)} \right)$; laonde moltiplicando questo fattore $\frac{k . \text{sen.}\, 1''}{15,861 . \cos.(\delta + C)}$ per ΔR ottiene Δk, ossia la correzione della distanza orizzontale, che era stata determinata per approssimazione; e questa correzione è negativa sempre, e solamente nei casi soli, quando la rifrazione terrestre sia minore di 0,77, come è stata supposta. Finalmente egli da molte osservazioni fatte in diversi paesi, e a diverse elevazioni ha ricavata una tavola, che presenta le quantità da sottrarsi da 0,077 per ottenere ΔR; e quelli, che vorranno occuparsi di queste ricerche, potranno consultarla.

132. Ma il partito migliore sarà sempre quello di osservare le distanze dal zenit reciprocamente da ambedue le stazioni, poichè da queste, quando non siano molto diverse tra loro, si potrà dedurre immediatamente la rifrazione. Imperciocchè se le distanze apparenti di ciascuna stazione dal zenit dell'altra siano δ, e δ', e le rifrazioni corrispondenti siano R, e R', le distanze vere dal zenit saranno $\delta + R$, e $\delta' + R'$, esclusi quei casi rarissimi, dove per la rifrazione quelle distanze debbono essere diminuite; quindi la somma di ambedue sarà $\delta + \delta' + R + R'$; ma questa somma è ancora eguale a $180^\circ + C$, perchè eguaglia tutti gli angoli del triangolo formato dalle tre rette, che uniscono le due stazioni tra loro, e col centro della terra con di più l'angolo C; dunque si avrà $\delta + \delta' + R + R' = 180^\circ + C$. Ma quando R, e R' non differiscano molto tra loro, si può prossimamente porre $R = R'$, e si ha $2R = 180^\circ + C - \delta - \delta'$, dunque allora si

avrà $\frac{R}{C} = 90^\circ + \frac{\frac{C-\delta-\delta'}{2}}{C} = n$. Solo potrà farsi qualche eccezione a questi risultamenti, quando la rifrazione per la dispersione irregolare dei vapori abbassasse gli oggetti invece di alzarli, o inclinasse ancora in qualunque modo i raggi orizzontali; ma l'osservatore attento potrà con ogni facilità accorgersi di questi accidenti, che di raro avvengono per le circostanze locali.

133. Finalmente siccome la ricerca della rifrazione è il lavoro più difficile per lo scioglimento del proposto problema, così io non voglio lasciare di aggiugnere, che seguendo gli insegnamenti del celebre Autore della Meccanica Celeste, dove alla pag. 277, e seg. del Vol. IV tratta delle rifrazioni terrestri, si può cercare quello scioglimento senza avere riguardo alla rifrazione, e poi ritrovarla per mezzo di una formola, che sarebbe la seguente

$$R = \left[\frac{0{,}000293876 \cdot \frac{h}{0^m \cdot 76}}{1 + 0{,}00375\,V} - \frac{3{,}08338}{N} \left(\frac{h}{\frac{1 \pm V}{5412}} - \frac{h'}{\frac{1 \pm V'}{5412}} \right) \right] \text{tang.}\ \delta;$$

dove si suppone C assai piccolo. Ma io non mi fermerò a svolgere, e a dimostrare questa formola, che ciascuno potrà facilmente ricavare dal luogo citato.

134. Ora resterebbe a trattare dell'altro uso, che si può fare delle osservazioni barometriche per determinare la profondità delle caverne di ogni sorte, e massimamente delle miniere. La formola generale si adatta facilmente a questo caso ponendo (6, e 36) v negativa, e $s = -1$ per ragione, che la gravità decresce come le distanze dal centro; e nel rimanente seguendo il calcolo come per la determinazione delle altezze. Questo metodo è riuscito ad *Humboldt* nella miniera di Valensiana (*Voyage*... 1 *Vol.*, *pag.* 313) la più profonda dell'America con una precisione così grande, che ha data la sola differenza di tre metri sopra cinquecento quattordici; di che possiamo bene meravigliarci, perchè si tratta

di una altezza così poco notabile in circostanze, nelle quali molte anomalie devono risultare dalle correnti verticali dell' aria, dalla ineguale distribuzione del calore, e massime dall' umidità, la quale in grande copia si trova nelle profonde caverne, e non si sa bene, quanto, e come modifichi le leggi della pressione dell' aria, da cui dipende il metodo barometrico per misurarle. Forse per queste cagioni, o come sospettò *Humboldt*, per qualche vizio contratto dal barometro, di cui si serviva, il metodo stesso non è riuscito all' *Ulloa*, il quale aveva trovata la sovraindicata miniera di 838 metri, cioè a dire quasi maggiore del doppio. Ma questa ricerca non è tanto per noi importante, che convenga occuparcene più lungamente. Quelli, che ne hanno l' occasione opportuna, usando di questo metodo per determinare le profondità delle miniere potrebbero arrivare a sciogliere il problema assai importante, in cui si cerca come, e quanto l' umidità influisca sulle leggi della pressione dell' aria.

135. Io pensava di chiudere in questo luogo l' appendice, che mi sembrava necessaria a compimento della Memoria già pubblicata, quando mi venne in pensiere di cercare il volume XIV della corrispondenza di *Zach* citato da *Lindenau* per vedere, se ritrovava qualche rischiarimento intorno alla prima equazione da questo arrecata, di cui ho parlato ai num. 127, e 128. In verità vi rinvenni alcune ottime riflessioni sul merito di questo metodo di dedurre dalla relativa altezza dei luoghi la loro distanza orizzontale; ma del resto vi trovai quella equazione tal quale l' aveva veduta presso di *Lindenau* come se questi l' avesse ricopiata da quell' opera, o piuttosto come se fosse di lui stesso la nota, in cui di quel metodo si parla. Ma scorrendo i varj articoli contenuti in quel volume mi cadde sott' occhio il quinto del mese di Luglio alla pag. 52, in cui si dà conto di un' altra Memoria di *Rohde* (*Sur la nouvelle correction des hauteurs mesurées par le barometre relative a la latitude geografique dans le IV tome de la Mecanique Celeste ...*) il quale con nuovi argomenti diversi da

quelli, che egli aveva esposti nell' altra Memoria (2), e che io credo di avere confutati, cerca di escludere la correzione stabilita da *La Plàce* per la differenza della gravità dipendente dalla diversa latitudine. Se dall' estratto riportato in quella corrispondenza io ho bene compresa la di lui mente, quegli argomenti si riducono a questo.

136. Il metodo differenziale usato da me ad imitazione del *La Place* dipende dalle due equazioni (7) $\delta' g' \delta v = -\delta p'$; e (19) $\delta' = \frac{c\delta p'}{c'p}$, dalle quali si deduce la terza $\frac{c\delta g'\delta v}{c'p} = -\frac{\delta p'}{p'}$; e in queste ultime si potrà tralasciare la frazione $\frac{c}{c'}$, quando la temperatura si supponga costante per tutta l' atmosfera. Ora *Rohde* niente oppone alla prima equazione, ma da questa prende argomento per dimostrare mancante la seconda; poichè come in quella si trova il coefficiente g' esprimente la gravità, perchè un coefficiente relativo a questa forza non dovrà ancora trovarsi nella seconda? E infatti non è sicuro, che dalla gravità dipende la pressione dell' aria? Pare adunque a *Rohde*, che, posta g la gravità alla superficie della terra, la seconda equazione dovesse essere $\delta' = \frac{c\delta g p'}{c'p}$, da cui per la terza seguirebbe $\frac{c\delta g'\delta v}{c'gp} = -\frac{\delta p'}{p'}$, la quale può bene contenere un coefficiente che risulta dalla differenza delle gravità g', g per ragione della diversa distanza dal centro, ma non può contenere alcun coefficiente risultante dalla differenza della gravità nelle latitudini diverse, perchè questo, essendo tutta la colonna d' aria premente alla stessa latitudine, spetterebbe egualmente alle due gravità g', e g, e svanirebbe nella frazione $\frac{g'}{g}$, che moltiplica il valore di $-\frac{\delta p'}{p'}$.

137. Confesso di non aver bene intesa la risposta, che a questa opposizione fa l' estensore dell' articolo citato, il quale pare concedere, che nella seconda delle due equazioni fondamentali del metodo differenziale esposto da *La Place* man-

chi il coefficiente g relativo alla gravità, come afferma *Rohde*, e sostenere nondimeno, che nella equazione finale debba trovarsi il coefficiente relativo alla differenza della gravità dipendente dalla diversa latitudine, come insegna *La Place*; ma ancora non mi sono data gran pena per intenderla, e mi riservo a ritornare sopra quell'articolo se mai accadrà, che io possa avere la dissertazione di *Rohde*, e in quella trovi alcuna cosa, che meriti di essere conosciuta ancora tra di noi. Intanto osservo, che quella equazione controversa si riduce a questa $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{c'p}{cp'}$, la quale vuol dire, che le densità dell'aria δ, δ', posti costanti i gradi di calore c, c' sono come le pressioni p, p' direttamente secondo la legge di *Mariotte*; e poste costanti le pressioni p, p' sono reciprocamente come i gradi di calore c, c'; e in generale sono direttamente come le pressioni, e reciprocamente come i gradi di calore secondo la legge d'*Eulero* (11). Ora quantunque queste leggi siano sottoposte a quelle difficoltà, che sono state già nel corso della Memoria esaminate, niente però è più chiaro di questo, che non sussiste la nuova proposta da *Rohde*, e che in quella equazione, che le esprime non può entrare alcun coefficiente relativo alla gravità, poichè l'effetto di questa non è altro che la pressione, e tenendo conto di questa si tiene ancora conto di quello; laonde poichè in quella equazione si trova il coefficiente p relativo alla pressione, questo basta pure per quello della gravità, perciocchè lo contiene. E in vero qualunque sia la pressione p, può sempre esprimersi pel prodotto di una certa massa nella gravità g; quindi se dovesse adoperarsi la correzione di *Rohde*, questo coefficiente g si troverebbe nel numeratore insieme, e nel denominatore della frazione esprimente il valore di $\frac{\delta}{\delta'}$, e svanirebbe, cosicchè con quella correzione si toglierebbe il giusto riguardo, che aver si deve alla gravità nel determinare la pressione, che modifica la densità. Ora questa risposta mi pare tanto evidente, che non abbisogni altro discorso.

SAGGI

DI ALGEBRA TRASCENDENTE E DI MECCANICA

Del Signor Pietro Franchini

Presentata li 20 Gennajo 1812 dal Sig. Giuseppe Venturoli e approvata dal Sig. Cav. Canterzani.

Articolo I

Sulle spinte di una trave inclinata.

§. 1. Probl. Dato che una trave di nota forma e di noto peso colla testa si appoggi ad un muro verticale, e col piede insista su di un piano orizzontale, si vuol sapere qual sia la forza con cui tende ascivo lare lungo il piano, quale la sua pressione contro di esso, quale la sua spinta contro il muro.

Se la sicurezza delle nostre case è un oggetto interessante e prezioso quanto la nostra vita, la completa soluzione dell'enunciato Problema, deesi riguardare come uno de' più grandi servigi, che la Matematica abbia mai resi alla società (*). Una breve istoria de' tentativi fatti per risolverlo, farà conoscere ai meno esperti, che quantunque, per una combinazione straordinaria e quasi inesplicabile, le indagini d'insigni geometri, molto abbiano sin qui servito al teoretico disviamento dell'umano ingegno, niente al pratico bisogno delle architettoniche operazioni, meritano ciò non pertanto alcune

---

(*) La teoria de'tetti che spiovono da una sola parte, quantunque essi facciano una gagliarda spinta contro il muro inferiore, non si riferisce al nostro Problema, ma bensì all'accelerazione lungo i piani inclinati. Tale spinta cresce pertanto a misura che i tetti di cui si parla si discostano dal piano orizzontale.

Fra i tetti spioventi da più parti, quelli che diconsi alla Mansarda, e che sono indicati colla fig. 1, esigono più di tutti gli altri le avvertenze che risultano dalla soluzione del Problema proposto.

tracce da lor segnate, distinta lode e riconoscenza: tanto più, che all'emulo impegno di quei che agitarono la difficil questione, l'origine deesi e l'importanza qualunque sia dell'attuale nostro lavoro.

I primi a cimentare le proprie forze nella soluzione del nostro Problema furono, *Couplet* e *Gio: Bernoulli*: ma le formole dai loro metodi somministrate, altro non fecero che tenere lungamente incerto o diviso il sentimento de' calcolatori e degli architetti. Aspettavasi, non senza impazienza, un valoroso geometra, che meglio analizzando il segreto giuoco delle meccaniche forze, stabilisse la verità su più chiari principj, quando i Professori *Frisi* e *Krafft*, avendo con una particolare risoluzione, ottenuta una formola simile ma non identica con quella di *Bernoulli*, già confermata da *Kaestener*, aggiunsero in vece alle antiche idee, nuove e più incomode oscurità. Siccome peraltro, gli sforzi del genio soglion essere proporzionati agli ostacoli da superarsi, alcuni fra i più illustri Italiani (*), lasciata da parte la costruzione di *Couplet*, non assai per tutti naturale ed evidente, di nuovo si accinsero, e con altri mezzi più semplici ed ingegnosi, alla contrastata soluzione. I risultati del loro profondo studio concordemente si unirono a sanzionare la formola del Francese Geometra; e parea che altro più non restasse, se non che completarne il significato con la considerazione dell'attrito, e metterla a prova con una scelta serie di sperimenti; ma le astruse meditazioni di qualche geometra, che pretese trovar difetto nella citata formola, a motivo ch'ella dà una spinta infinita quando è retto l'angolo della trave col muro, trattennero questa pregevolissima operazione; mentre uno di loro, meno forse tollerante e più coraggioso, nuova e complicata formola produsse, da sostituirsi per di lui avviso alle altre

---

(*) *Lorgna, Gregorio Fontana e Mascheroni.*

tre (*Delanges Soc. Ital. T. X*). In tale e tanto inviluppo di analitici pensamenti, il nostro Problema non ha cessato di essere, quale *Gregorio Fontana* lo ravvisò (*Soc. Ital. T. III*) *pietra d'inciampo per parecchi* GEOMETRI DI PRIMA SFERA; ed ognun vede, che a vantaggio della Società, e per decoro delle scienze esatte molto tuttavia importa, che si decida pur una volta la memorabile controversia, determinando con la geometria, con l'analisi algebrica e con gli sperimenti, se tra le quattro formole sino ad ora conosciute, ve ne sia pur una legittimamente dedotta, e capace di rappresentare, mediante un'opportuna modificazione, tutti i dati dell'esperienza. Tale appunto è il primario scopo delle attuali nostre ricerche, e noi crediamo di anticiparne una più chiara e compiuta nozione, suddividendole nei quattro seguenti articoli, il primo de' quali ha per oggetto di giungere con una sola figura e con un calcolo diretto e semplice, alle formole sin qui ottenute con tanti e diversi metodi: il 2.° di scuoprire il difetto comune a tutte le formole, e quello che a ciascuna esclusivamente appartiene: il 3.° di presentare una serie di risultati sperimentali, atti a verificare qual delle note formole sia legittima e genuina: il 4.° è destinato a derivare da una delle formole suddette, quella che in ogni caso fedelmente si accordi coll'esperienza.

Cammin facendo ci occuperemo di qualche Problema analogo all'argomento, e non trascureremo di contemplarlo sotto quei rapporti, che meglio possono interessare la pratica utilità della scienza.

§. 2. Sia G il centro di gravità (*Fig.* 1.^{a}) e P il peso del travicello BD che si suppone trattenuto nel punto D da un ostacolo situato sul piano orizzontale CH. Espressa la forza P colla GP, questa risolvasi nelle GE, GF normali fra loro, e fatto $CBD = \varphi$, si avrà $GF = P \cos . \varphi$, $GE = P \text{ sen} . \varphi$. Siccome la GE agisce sugli estremi B, D, in ragione reciproca della loro distanza dal punto G, si sostituiscano a GE le forze BR, DN tali, che sia $BR + DN = GE$, $BR . GB =$

DN . GD; e indicando BD per a, BG per b, sarà

$$\mathrm{BR} = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\,\mathrm{sen.}\,\varphi,\quad \mathrm{DN} = \frac{\mathrm{P}b}{a}\,\mathrm{sen.}\,\varphi.$$

Prolungata la BD in K finchè sia DK = GF si compia il parallelogrammo rettangolo NK, e si conduca ML normale a CH. Le forze che agiscono in D, cioè DN, DK, vengono così ridotte alla DM, e quindi alle due DL, ML (= DO). Per trovare l'espressione di queste, si risolva il tetragono birettangolo iscrittibile DNML, nel quale ND (= A) = $\frac{\mathrm{P}b}{a} \times \mathrm{sen.}\,\varphi$, MN (= D) = P cos. φ, DNM = DLM = 100°, LMN (= NDC) = φ. La *fig.* 2 presenta il tetragono con le respettive indicazioni, adottate nel nostro Trattato Analitico di Trigonometria e Poligonometria (Lucca 1805).

Richiamando le formole da noi esposte (Memoria Trigonometrica, Lucca 1807, pag. 24) cioè

$$\{1.\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos.\,d-\mathrm{C}\,\mathrm{sen.}\,d=0,\ 1.\mathrm{D}-\mathrm{C}\cos.\,d-\mathrm{B}\,\mathrm{sen.}\,d=0\}\ldots.(a)$$

dove d sta in vece di φ, si deduce

$$\mathrm{B}(=\mathrm{DL})=\mathrm{P}\cos.\varphi\,\mathrm{sen.}\varphi-\frac{\mathrm{P}b}{a}\mathrm{sen.}\varphi\cos.\varphi=\frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\mathrm{sen.}\varphi\cos.\varphi\ldots(\mathrm{I})$$

$$\mathrm{C}(=\mathrm{ML})=\mathrm{P}\cos.^2\varphi+\frac{\mathrm{P}b}{a}\mathrm{sen.}^2\varphi=\frac{\mathrm{P}}{a}[a+(b-a)\,\mathrm{sen.}^2\varphi].$$

La prima di queste è la formola con cui *Gio. Bernoulli* (*Op. T. IV, p.* 189) e poi *Kaestener* (*Accad. di Erfurt an.* 1778) espressero la spinta orizzontale. Essa è falsa perchè i suoi valori crescono coll'angolo φ sino a $\varphi = 50°$ per diminuire poi con maggior rapidità da 50 a 100°, mentre l'esperienza dimostra che la spinta orizzontale cresce coll' angolo φ da $\varphi = 0$ sino a $\varphi = 100°$. La ragione teoretica dell'errore deriva, come in seguito vedremo, dall'essersi presa la DK minore del giusto.

§. 3. Risolvendo la BR nelle due BQ, BS, si hanno due nuove forze, una delle quali è distrutta dal muro, l'altra parzialmente agisce nel punto D, ed accresce la spinta DL. Per calcolarne l'effetto si risolva la BS nelle due B*m*, B*q*;

la $\mathrm{B}q$ nelle $\mathrm{B}p$. $\mathrm{B}s$; la $\mathrm{B}p$ nelle $\mathrm{B}n$, $\mathrm{B}r$; la $\mathrm{B}r$ nelle $\mathrm{B}i$, $\mathrm{B}t$; ec. Risulta $\mathrm{B}m = \mathrm{BS}\cos.\phi$: ma $\mathrm{BRS} = \phi$, e (§. 2) $\mathrm{BR} = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\,\mathrm{sen}.\,\phi$. Dunque $\mathrm{BS} = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\,\mathrm{sen}.^2\phi$, e però $\mathrm{B}m = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\,\mathrm{sen}.^2\phi\,\cos.\phi$. Così $\mathrm{B}q\,(=\mathrm{BS}\,\mathrm{sen}.\,\phi) = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\,\mathrm{sen}.^3\phi$; $\mathrm{B}p\,(=\mathrm{B}q\,\mathrm{sen}.\,\phi) = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\,\mathrm{sen}.^4\phi$; $\mathrm{B}n\,(=\mathrm{B}p\cos.\phi) = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\cos.\phi\,\mathrm{sen}.^4\phi$, ec. e quindi

$$\mathrm{B}m + \mathrm{B}n + \text{ec. all'infin.} = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\cos.\phi\,\mathrm{sen}.^2\phi\,(1 + \mathrm{sen}.^2\phi + \mathrm{sen}.^4\phi\ \text{ec.})$$

e per essere $1 + \mathrm{sen}.^2\phi + \mathrm{sen}.^4\phi\ \text{ec.} = \frac{1}{1-\mathrm{sen}.^2\phi} = \frac{1}{\cos.^2\phi}$, si ritrae $\mathrm{B}m + \mathrm{B}n\ \text{ec.} = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\,\mathrm{sen}.\,\phi\,\tan.\,\phi$.

Convien dunque prendere la $\mathrm{DK} = \mathrm{GF} + \mathrm{B}m + \mathrm{B}n + \text{ec.} = \mathrm{P}\left(\cos.\,\phi + \frac{a-b}{a}\,\mathrm{sen}.\,\phi\,\tan.\,\phi\right)$. Assunto questo valore per MN (= D), e $\frac{\mathrm{P}b}{a}\,\mathrm{sen}.\,\phi$ per ND (= A) (§. 2), la risoluzione del tetragono MNDL ci dà mediante le formole

$$\mathrm{B} = \mathrm{D}\ \mathrm{sen}.\,d - \mathrm{A}\ \cos.\,d,\quad \mathrm{C} = \mathrm{A}\ \mathrm{sen}.\,d + \mathrm{D}\ \cos.\,d,$$

le quali derivano dalle formole (a) del §. cit. i seguenti valori $\mathrm{C} = \mathrm{P}$, $\mathrm{B} = \frac{\mathrm{P}(a-b)}{a}\tan.\,\phi$ .... (II).

La seconda di queste è la formola con diversi metodi ottenuta dai geometri: *Couplet* (*Hist. de l'Accad. de France an.* 1731); *Lorgna* (*Saggi di Statica e di Meccan., pag.* 7, 8); *Gregorio Fontana* (*Soc. Ital. T. III*); *Salimbeni* (*Soc. Ital. T. IV*); *Mascheroni* (*Nuove Ricerche sull'equilibrio delle volte*); *Venturoli* (*Elem. di Meccanica* 1.ª *ediz., pag.* 48).

La formola onde si tratta sembra falsa perchè il suo valore cresce con eccessiva rapidità, sino a divenire infinito quando $\phi = 100°$; ma noi faremo vedere che tal difficoltà non è di alcun peso.

§. 4. Per avere la spinta orizzontale superiore BT bisogna sommare la serie infinita BQ, Bs, Bt ec. Ora si ha

$$Bs = Bq \cos.\phi = \frac{P(a-b)}{a} \cos.\phi \operatorname{sen.}^3\phi,$$

$$Bt = Br \cos.\phi = Bp \operatorname{sen.}\phi \cos.\phi = \frac{P(a-b)}{a} \cos.\phi \operatorname{sen.}^5\phi,$$

ec. ec.

Dunque

$$BQ + Bs + Bt \text{ ec.} = \frac{P(a-b)}{a} \operatorname{sen.}\phi \cos.\phi [1 + \operatorname{sen.}^2\phi + \operatorname{sen.}^4\phi \text{ ec.}]$$

$= \frac{P(a-b)}{a}$ tan. ϕ, e però B = BT, cioè le due spinte orizzontali inferiore e superiore sono tra loro eguali.

§. 5. Qualora si prenda DK = alla sola GF (= P cos. ϕ), e calata la perpendicolare KL' si determini il semmento DL', se ne trova l'espressione P sen. ϕ cos. ϕ .... (III).

Tale per sentimento del *P. Frisi* (*Istituz. di Meccan.*, *pag.* 64) confermato da *Krafft* (*Novi Comment. Accad. Scient. Petropol. T. IV*, *an.* 1752, 1753), è la formola della spinta orizzontale. Essa ha il difetto della formola (I), ed oltre a ciò, erroneamente suppone che la spinta richiesta sia indipendente dall'azione delle forze DN, BR, e dalla situazione del centro di gravità.

§. 6. L'ultima tra le formole sino al presente immaginate è quella del Sig. *Delanges*, ed è

$$B = \frac{P(a-b)\,b \operatorname{sen.}\phi \cos.\phi}{b^2 \operatorname{sen.}^2\phi + (a-b)^2 \cos.^2\phi} \;\ldots\ldots (IV).$$

Di questa formola meno semplice delle altre e più operosamente ottenuta, non ci occuperemo, perchè nell'ipotesi la più semplice e comune in pratica, che sia $b = \frac{a}{2}$, coincide con quella del *P. Frisi*; e perchè dà luogo ad un valore massimo della spinta B, lo che contraddice all'esperienza.

§. 7. Affinchè ognuno possa chiaramente conoscere qual discrepanza vi sia fra le tre prime formole sopra esposte, e resti insieme persuaso delle proposizioni da noi enunciate ne' §§. 2, 3, 5, dove abbiamo accennata l'erroneità vera o apparente delle respettive formole, esponiamo qui per ordine quattro valori, dedotti da ciascuna nell'ipotesi che sia $b = \frac{a}{2}$.

$$\begin{array}{c}\text{Valori}\\ \text{della}\\ \text{form. I.}\end{array}\left\{\begin{array}{l}
\varphi = 20^\circ.,\ B = \frac{1}{4}P.\frac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = 0,146\,P. \\
\varphi = 33^\circ.\frac{1}{3},\ B = \frac{P\sqrt{3}}{8} = \frac{1,732}{8}P = 0,216\,P. \\
\varphi = 50^\circ.,\ B = \frac{1}{4}P. \\
\varphi = 66^\circ.\frac{2}{3},\ B = \frac{1}{2}P.\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2} = \frac{P\sqrt{3}}{8} = 0,216\,P. \\
\varphi = 80^\circ.,\ B = \frac{1}{2}P \times 0,951 \times 0,309 = \frac{0,118}{2}P = 0,059\,P.
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}\text{Valori}\\ \text{della}\\ \text{form. II.}\end{array}\left\{\begin{array}{l}
\varphi = 33^\circ.\frac{1}{3},\ B = \frac{P}{2\sqrt{3}} = \frac{P}{3,464} = 0,288\,P. \\
\varphi = 50^\circ.,\ B = \frac{1}{2}P. \\
\varphi = 66^\circ.\frac{2}{3},\ B = \frac{1}{2}P\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 1,732\,P = 0,866\,P. \\
\varphi = 80^\circ.,\ B = \frac{1}{2}P \times 3,077 = 1,538\,P.
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}\text{Valori}\\ \text{della}\\ \text{form. III.}\end{array}\left\{\begin{array}{l}
\varphi = 33^\circ.\frac{1}{3},\ B = 0,432\,P. \\
\varphi = 50^\circ.,\ B = \frac{1}{2}P. \\
\varphi = 66^\circ.\frac{2}{3},\ B = 0,432\,P. \\
\varphi = 80^\circ.;\ B = 0,118\,P.
\end{array}\right.$$

Oltre i difetti particolari proprj delle formole I, III, IV, sopra indicati, uno ve ne ha comune a tutte, ed è che sono calcolate indipendentemente dall'attrito: per lo che neppure la formola II può esser giammai di alcuna pratica utilità. È vero che dipende dal nostro arbitrio, l'introdurre negli elementi del calcolo da cui essa deriva, la considerazione dell'attrito, e che in conseguenza possiamo liberarla dal divisato comune difetto; ma trattandosi di un problema in teorica astruso, in pratica pericoloso, chi vorrà prestar cieca fede al nuovo simbolo analitico, ottenuto colla indicata modificazione, se col favore di esatti risultati sperimentali non si possa metterlo a prova, e verificarne la sicurezza? Giova dunque, prima d'intraprendere l'anzidetta modificazione della formola II, che ci occupiamo dell'esperienze.

§. 8. La macchina di cui si è fatto uso, consiste in un travicello parallelepipedo rettangolo a base quadrata, ABCDEF (*Fig.* 4), lungo metri 1, 171, e del peso di kilogr. 4 . 2. Due de' suoi angoli solidi sono tagliati, e sul piano della sezione il di cui profilo vien espresso da EF, è fermato un cilindro di busso, di un diametro $= \frac{2}{3}$ di centim., lungo quasi quanto la faccia del travicello, traversato da un perno di ferro inseritovi a forza, e perfettamente mobile intorno a due occhi di ferro più piccoli del cilindro.

Sulla sezione inferiore indicata dalla DC, si sono stabiliti nella stessa guisa due cilindri eguali fra loro ed alla metà del precedente, situati in linea retta, e distanti l'uno dall' altro di $\frac{1}{2}$ centimetro. In G evvi un occhio di ferro a cui si raccomanda un sottil cordone di seta, che scendendo verticalmente lungo la BC, passa fra i due cilindri, e per una direzione CL parallela alla tavola IH, entra nella carrucola L fermata a vite nella tavola stessa, e serve a sostenere il peso P. La parete MN è verticale e di legno ben levigato: la tavola IH levigata ed orizzontale.

Situato il travicello come la figura lo dimostra, tutto il suo peso si appoggia sui tre cilindri, e però scivola liberamente, qualunque sia la posizione a cui vuolsi adattare, se non sia trattenuto da un opportuno contrappeso P. Gli angoli DEM, eguali a quelli che si sarebbero avuti lasciando intatti gli angoli solidi, gli abbiamo misurati col grafometro, e variando gradatamente il peso P, abbiamo trovato quale in ogni caso era quello che precisamente corrispondeva all'equilibrio. Si è corretta l'incertezza dell'attrito, e quella che poteasi temere nella misura degli angoli, con ripetere ogni esperienza cinque o sei volte, e con prenderne il valor medio.

Con queste ed altre avvertenze che lungo sarebbe il descrivere, ci è riuscito di appagare le scrupolose indagini di abilissimi artefici e di varj professori espressamente consultati, fra' quali il Sig. Consigliere *Duccini* Ingegnere e Direttore de' lavori idraulici del Principato, ed il Sig. *Carlo di Poggio* Censore del Liceo *FELICE* .

Tavola de' nuovi risultati sperimentali.

kil.

$\phi = 33^\circ.\frac{1}{3}$, $P = 0 . 75$

$\phi = 40^\circ.$ $P = 1 , 08$

$\phi = 50^\circ.$ $P = 1 , 39$

$\phi = 60^\circ.$ $P = 1 , 74$

$\phi = 65^\circ.$ $P = 2 , 10$ (metà del peso del travicello)

$\phi = 66^\circ.\frac{2}{3}$ $P = 2 , 39$

$\phi = 73^\circ.\frac{1}{3}$ $P = 2 , 90$

$\phi = 80^\circ.$ $P = 3 , 72$

$\phi = 84^\circ.$ $P = 4 , 20$ (tutto il peso del travicello) (*)

§. 9. Per conoscere quanto cooperi alla spinta orizzontale una forza verticale BS applicata al vertice del travicello abbiamo appeso al suddetto vertice un masso di ferro pesante $0^{kil.} . 57$, e si è trovato, che essendo $\phi = 50^\circ$. si richiede un contrappeso di $1^{kil.} . 80$. Ciò dimostra che una forza $BS = 0^{kil.} . 57$ accresce la spinta orizzontale di una quantità $= 0^{kil.} . 41$.

Trasportando il peso addizionale dal vertice al punto di mezzo dov'è il centro di gravità, la spinta orizzontale diventa $= 1 , 44^{kil.}$, e però diminuisce di $0^{kil.} . 36$. Questo prova = *che la spinta orizzontale cresce, a misura che il centro di gravità si accosta all' estremo superiore del travicello* (**).

(*) Si è tralasciata l'esperienza corrispondente a $\phi = 20^\circ.$, perchè la spinta orizzontale essendo molto debole, l'attrito sparge notabile incertezza sull'origine del disequilibrio.

(**) Evvi chi cerca il valore di ϕ a cui corrisponde il massimo momento del travicello contro il muro (*Fig.* 2) e moltiplicando la BQ (= RS) (§. 2) pel vette BC, cioè $\frac{P(a-b)}{a}$ sen. ϕ cos. ϕ per a cos. ϕ, pone = 0 il suo differenziale, lo che dà $\cos.^3 \phi - 2 \cos.\phi \,\text{sen.}^2 \phi = 0$, e quindi $\cos.\phi = r\sqrt{\frac{2}{3}}$; e per essere $\log.\cos.\phi = \log. r + \frac{1}{2}\log.\frac{2}{3} = 10 + \frac{1}{2} \times (0{,}3010300 - 0{,}4771212) = 9{,}9119544$, somministra $\phi = 35^\circ . 16'$ (sessag.). Questo risultato però è ben lontano dal corrispondere al massimo, perchè la forza premente il muro è $= BQ + Bs + Bt$ ec. $= \frac{P(a-b)}{a}$ tan. ϕ, formola che non ha valor massimo.

§. 10. Per determinare l'effettiva pressione verticale, esercitata da un travicello contro il piano orizzontale su cui si appoggia, ecco il meccanismo che abbiamo immaginato.

Preso un vette AB (*Fig.* 5) di forma parallelepipeda rettangolare, e fissato nel suo mezzo O un asse di ferro, mobile su due occhi, su i quali riposi collo spigolo acutissimo ricavato nell'asse medesimo, ad oggetto di togliere quasi totalmente l'attrito, si è appoggiato ad una parete verticale NN, di tavola ben levigata un travicello AC, di forma parallelepipeda rettangolare, a base quadrata, lungo metri 1,771, munito de'soliti cilindri mobili, e del peso di $4^{kil.}, 14$, in guisa che il suo estremo inferiore venga a posare sul vertice A del vette. Distrutta la spinta orizzontale mediante un cordone fermato all'estremo A del travicello, e sulla lunghezza del vette nel punto D, dopo aver messo il vette in situazione orizzontale, si è sperimentato qual contrappeso era necessario collocare dalla parte opposta, ad una distanza BO dall'asse di rotazione eguale ad OA. Questo meccanismo, che è stato riconosciuto superiore ad ogni eccezione da parecchi abilissimi Artefici ed Ingegneri, ha somministrato i risultati che seguono:

Essendo $\varphi = 44^\circ . \frac{4}{9}$ ($= 40^\circ$. sessag.) il contrappeso si è trovato $= 3^{kil.} . 98$. La pressione verticale era dunque minore del peso totale di $0^{kil.} . 16$.

Fatto $\varphi = 55^\circ . \frac{5}{9}$ ($= 50^\circ$. sessag.) il contrappeso è risultato di $3^{kil.} . 84$, e però la pressione verticale minore del peso totale di $0^{kil.} . 3$. Crescendo φ di $11^\circ . \frac{1}{9}$, la pressione divisata diminuisce dunque di $0^{kil.} . 14$.

La formola di ML trovata (§. 2) ci dà nei due casi precedenti

$$ML = 0^{kil.} . 794 \times 4, 14 = 3^{kil.} . 287$$

$$ML = 0^{kil.} . 707 \times 4, 14 = 2^{kil.} . 926 :$$

valori minori entrambi delle respettive pressioni verticali somministrate dall'esperienza, e che provano essere il calcolo della ML, qual risulta dalla costruzione del §. cit. ben lontano

tano dal vero, poichè modificandolo con la considerazione dell' attrito, condurrebbe a dei risultati sempre più erronei.

Si può stabilire intanto: *che se abbiasi riguardo all' attrito, una trave inclinata non gravita sul piano orizzontale con tutto il suo peso, e che la sua pressione diminuisce coll' angolo* φ. Vedremo ben tosto che questa proposizione ottimamente si concilia coll' equazione $C\ (= ML) = P$ ottenuta nel §. 3.

§. 11. Eccoci alla promessa trasformazione della formola (II), formola che sola fra tutte non ci ha presentato alcun manifesto carattere di falsità.

Riassunte l' equazioni del §. 3, $C = P$, $B = \frac{P(a-b)}{a} \tan.\varphi$, $B = BT$, si rimuovano gli appoggi che impediscono lo scivolamento, e si sostituisca in B una forza $Bb\ (= x)$ eguale e contraria alla BT; si sostituiscano in D due forze $Dl\,(= z)$, $Dd\ (= y = B)$, la prima eguale e contraria alla spinta verticale, la seconda alla spinta orizzontale B. È certo che il travicello resterà tuttavia in equilibrio, e perciò, le tre equazioni sopra esposte, che divengono

$$z = P,\ x = \frac{P(a-b)}{a} \tan.\varphi,\ x = y$$

sono le condizioni da cui dipende l' equilibrio del travicello. Sieno $B\beta$, $D\delta$ due forze equivalenti all' attrito nei respettivi punti B, D; forze che debbono agire in direzione contraria a quella che risulterebbe dal moto del travicello. Siccome l' attrito è proporzionale alla pressione, preso un coefficiente costante f, si può fare $B\beta = f \,.\, Bb$, $D\delta = f \,.\, Dl$. In virtù di questi nuovi elementi, le condizioni dell' equilibrio 1.ª e 3.ª divengono $z + fx = P$, $x = y + fz$, dove y esprime l' effettiva spinta orizzontale inferiore. La 2.ª siccome equivale a $P\,(a-b)\,\text{sen.}\,\varphi = ax \cos.\varphi$, cioè a $P \,.\, D\tau = Bb \,.\, BC$, che è l' equazione destinata ad impedire la rotazione del sistema, si cangia in

$$P \,.\, D\tau = Bb \,.\, BC + B\beta \,.\, DC, \text{ cioè in}$$

$$\mathrm{P}\,(a-b)\,\mathrm{sen.}\,\phi = ax\,\mathrm{cos.}\,\phi + afx\,\mathrm{sen.}\,\phi\,.$$

Dividendo quest'ultima equazione per sen. ϕ si ha $x=\frac{\mathrm{P}(a-b)}{a(f+\mathrm{cot.}\phi)}$. La 1.^{a} diviene $z=\mathrm{P}\left(1-\frac{f(a-b)}{a(f+\mathrm{cot.}\phi)}\right)$.

La 3.^{a} si riduce ad $y=\mathrm{P}\left[(1+f^2)\frac{(a-b)}{a(f+\mathrm{cot.}\phi)}-f\right]$ ....(V)

ed è la trasformata richiesta. Essa darebbe una infallibile riprova della formola (II), qualora si potesse trovare un valore di f, che la rendesse concorde con tutti i risultati sperimentali. Noi però, invece di cercare *a priori* il valore onde si tratta, il che sarebbe oltremodo difficile, cercheremo qual sia il valore di f, che in ciascuno de' nove casi contemplati nel §. 8, accorda la formola (V) coll'esperienza: ed è chiaro, che se il valore di f esiste, nell'ipotesi che tutti gli sperimenti sieno di un'assoluta esattezza, dee trovarsi costantemente eguale ad uno stesso numero. Una leggiera aberrazione dovrà riferirsi alle minime inesattezze, inseparabili dai fisici sperimenti, e molto più dai nostri, ne' quali sempre doveasi vincere la doppia difficoltà, di misurare esattamente l'angolo ϕ, e di misurarlo quasi a volo, cioè nel punto preciso in cui l'equilibrio cessa.

I risultati dell'indagine sopra indicata sono i seguenti:

Valori di ϕ	$33^\circ\frac{1}{3}$,	40°,	50°,	60°,	65°,	$66^\circ\frac{2}{3}$,	$73^\circ\frac{1}{3}$,	80°,	84°.
Valori della Dd	*kil.* 0,75;	*kil.* 1,08;	*kil.* 1,39;	*kil.* 1,74;	*kil.* 2,1;	*kil.* 2,39;	*kil.* 2,9;	*kil.* 3,72;	*kil.* 4,2.
Valori di f	0,10;	0,09;	0,12;	0,16;	0,16;	0,14;	0,16;	0,16;	0,18.

È da osservarsi che i valori corrispondenti all'esperienze 1.^{a}, 2.^{a} e 9.^{a}, sono quelli che più aberrano dal cercato valore medio; e che tal difetto nasce appunto dalla maggiore difficoltà che s'incontra nell'effettuarle. Infatti nelle prime la spinta essendo debole, una piccola differenza nell'attrito influisce sull'origine del disequilibrio; nè si può prescindere da tale differenza, per non essere noi sicuri che i cilindri sieno dotati di una mobilità esattamente uguale, qualunque elemento longitudinale serva loro di appoggio. Nell'ultima esperienza la spinta è troppo forte, e forte è in proporzione l'attrito. Le variazioni di questo divengono quindi sensibili, per una ragione opposta a quella, che avea luogo nelle prime esperienze.

Preso il medio aritmetico $0,14$ fra i valori di f, i valori teorici della Dd sufficientemente si avvicinano a quelli trovati coll'esperimento. Quello della Dd relativo alla 1.ª esperienza del §. 9 si trova $= 1,79^{kil.}$: quello della Dd relativo alla 2.ª esperienza dello stesso §. risulta $= 1,46^{kil.}$. Calcolando il valore della $z (= \mathrm{D}l)$ spettante alle due esperienze del §. 10, si ottiene $z = 3,92^{kil.}$, $z = 3,84^{kil.}$; valori de' quali il 2.° coincide col valore sperimentale.

In pratica non mai succederà che l'attrito sia tanto leggiero, quanto quello che ha luogo nella nostra macchina; ma siccome l'aumento di f favorisce la sicurezza dell'edifizio, l'uso della formola (V) non soggiace per tal motivo ad alcuna eccezione. Noi però facciam osservare, che il valore di f cade sempre fra dei limiti molto angusti, perchè se giungesse a $0,5^{kil.}$, posto $\phi = 50°$ si avrebbe per y un valore negativo, lo che contraddice.

Quindi ne segue, *che l'attrito del piè di una trave inclinata, contro il piano orizzontale su cui scivola, abbia generalmente un valore intermedio, fra quello dell'attrito di 1.ª e di 2.ª specie; giacchè il coefficiente del primo attrito, le superficie confricanti essendo ambedue di legno, giunge, com'è noto,* sino a $0,50$; e quello del secondo, in virtù di una mediocre pressione, diviene come si è veduto, $=0,14$.

§. 12. Facendo per semplicità $b = \frac{1}{2}a$, le formole de' due attriti superiore ed inferiore sono

$$\mathrm{B}\beta = \frac{\mathrm{P}f}{2(f + \cot.\phi)}, \quad \mathrm{D}\delta = \mathrm{P}f\left(1 - \frac{f}{2(f + \cot.\phi)}\right) = \mathrm{P}f\frac{(f + 2\cot.\phi)}{2(f + \cot.\phi)}.$$

Pongasi successivamente $\phi = 0°. = 33°.\frac{1}{3} = 50°. = 66°.\frac{2}{3} = 100°$ e si avrà

$\varphi = 0$, $B\beta = 0$, $D\delta = 0{,}\ 14\,P$,
$\varphi = 33^\circ.\frac{1}{3}$, $B\beta = 0{,}037\,P$, $D\delta = 0{,}135\,P$,
$\varphi = 50^\circ.$, $B\beta = 0{,}061\,P$, $D\delta = 0{,}131\,P$,
$\varphi = 66^\circ.\frac{2}{3}$, $B\beta = 0{,}097\,P$, $D\delta = 0{,}126\,P$,
$\varphi = 100^\circ.$, $B\beta = 0{,}\ 50\,P$, $D\delta = 0{,}070\,P$.

La somma degli attriti, generalmente espressa dalla formola $Pf\frac{(1+f+2\cot.\varphi)}{2(f+\cot.\varphi)}$, nei respettivi casi di cui sopra, proviene $= 0{,}\ 14\,P$, $= 0{,}\ 172\,P$, $= 0{,}\ 192\,P$, $= 0{,}\ 223\,P$, $= 0{,}\ 57\,P$. I risultati precedenti dimostrano 1.° che l'attrito superiore $B\beta$ cresce da $\varphi = 0^\circ$. sino a $\varphi = 100^\circ$., ma più rapidamente dell' attrito inferiore $D\delta$: quindi apparisce perchè la spinta verticale Dl si trovi minore (§. 10) a misura che si aumenta l'angolo φ.

2.° Che la somma degli attriti $B\beta + D\delta$ cresce da $\varphi = 0$ fino a $\varphi = 100^\circ$. Questo aumento serve a ristringere dentro i dovuti limiti quello della spinta orizzontale dato dalla formola (II).

Siccome quando $\varphi = 0^\circ$, $B\beta$ è $< D\delta$, e quando $\varphi = 100^\circ$. è $B\beta > D\delta$, vi dev' essere un valore di φ a cui corrisponda $B\beta = D\delta$. Per trovarlo si supponga

$$\frac{f}{2(f+\cot.\varphi)} = f\left(1 - \frac{f}{2(f+\cot.\varphi)}\right)$$

e poichè ne deriva $1 = f + 2\cot.\varphi$, con fare $f = 0{,}\ 14$ si ottiene $\cot.\varphi = 0{,}\ 430$, cioè $\varphi = 74^\circ$. presso a poco.

Il valore $= \infty$ dato dalla formola (II), unicamente significa, che non esiste alcuna forza Bb, capace di tenere equilibrato il travicello in una posizione orizzontale. Infatti la forza Bb, e la gravità che sollecita il travicello, essendo ad angolo retto fra loro, non possono giammai distruggersi.

§. 13. Posto che la sommità C di un travicello obbliquo AC (*Fig.* 6) sia stabilmente fermata sul vertice di un secondo travicello verticale CD, essendo gli estremi A, D, nello stesso piano di livello, si dimanda come si distribuisca il peso di ciascun travicello, che si suppone cognito, sugli appoggi A, D.

Si posi ciascuno degli estremi A, D sul piatto di una stadera, e si determini il respettivo peso. Essendo AC$=0{,}64^{kil.}$, CD $= 0{,}59^{kil.}$, abbiamo trovato che facendo successivamente ACD $= 33^{\circ}.\frac{1}{3}$, $= 50^{\circ}$, $= 66^{\circ}.\frac{2}{3}$, il peso di AC risulta sempre $= 0{,}34^{kil.}$; e quello di CD $= 0{,}89^{kil.}$. Dunque il peso perduto dal travicello obbliquo sta al suo peso primitivo come $1 : 2 + \frac{2}{15}$. Conoscendo il peso di due travi AC, BC ed il loro carico, può dunque determinarsi la quantità del peso, che cessando la reciproca loro connessione in C, dalla quale giova prescindere, si trasmette mediante il *colonnetto* CD sul punto D dell'*asta* o *chiave* AB, lo che serve a dare una proporzionata solidità alla chiave stessa e ad assicurare la stabilità del tetto.

§. 14. Probl. Dato che due travi AC, BC, la di cui spinta orizzontale inferiore si suppone distrutta da un ostacolo insormontabile in A, B, si sostengano vicendevolmente, appoggiandosi nel vertice C, si dimandano le condizioni da cui dipende il loro equilibrio.

Soluzione. Sia p il peso di AC, p' quello di BC; φ, φ' i respettivi angoli ch'essi fanno colla verticale. Siccome l'effetto dell'ostacolo in A, equivale a quello di due forze a detto punto applicate, le quali sieno respettivamente uguali e contrarie alle forze che in esso agiscono, la forza che produce la spinta orizzontale superiore nel vertice della trave AC, può assumersi effettivamente $= \frac{P(a-b)}{a} \tan.\varphi$. Lo stesso dicasi per rapporto alla seconda trave BC, e si concluderà, che qualora prescindasi dall'attrito, ed il centro di gravità cada nel punto di mezzo, le condizioni dell'equilibrio si riducono a $p \tan.\varphi = p' \tan.\varphi'$. Basta dunque *che i pesi stiano in ragione inversa delle tangenti degli angoli colla verticale*.

ARTICOLO II

Si vuol dimostrare = *Che ogni equazione algebrica determinata, ha una risolvente reale o immaginaria.*

§. 1. Tutti i Geometri hanno ravvisato il teorema onde si tratta, come il principio fondamentale della teoria dell' equazioni algebriche. Alcuni, come il Dottor *Tommasini* (*Introductio in Alg. T.* 2, §. 407) l' hanno ammesso come conseguenza dell' ipotesi da cui l' equazione stessa deriva, come se qualunque ipotesi anche contradittoria, dovesse di sua natura verificarsi: altri si è contentato di supporlo tacitamente: vi è stato in fine chi ha fatto ogni sforzo, per non lasciarlo senza una qualunque siasi dimostrazione, ma con successo, per quanto a noi sembra, del tutto infelice. Egli è un fenomeno analitico, per lunga esperienza riconosciuto, che le verità semplici e fondamentali, sieno per ordinario le più astruse e recondite; e che l' umano ingegno non soglia giungere a dimostrarle, se non dopo avere stabilite sulla loro esistenza ipotetica o induttiva, le principali verità che ne dipendono.

Il Sig. *Lacroix* nel suo Complemento dell'Algebra (p. 116) comincia dal confessare, che *si l' on n'a pas encore de démonstration complète de la proposition dont il s'agit, on peut du moins donner des raisons assez fortes, pour qu' elle ne soit plus douteuse;* ed il suo discorso è sì specioso, che il Signor *Francoeur* (*Cours complet de Mathém. T.* 2, §. 449) non ha esitato a prevalersene come di una vera dimostrazione. Compendiandolo com'è suo stile, egli si esprime presso a poco in questi termini.

L' equazioni di grado pari, aventi l' ultimo termine positivo, sono le sole per cui sia incerta l' esistenza di una risolvente reale, perchè non si sanno trovare generalmente due valori d' x, i quali diano una variazione di segno nella somma de' termini. Chiamando p, q, r ec. i coefficienti della proposta, u l'ultimo suo termine, con mutare il segno di u si ha un' equazione con due risolventi reali, che debbon esser funzioni di p, q, r ec. u, perchè il loro valore varia con quello de' coefficienti. Dunque si può supporre $x = f(p, q, r \ldots u)$. Ma lo spirito del calcolo algebrico, il quale è indipendente dai valori particolari che possono darsi alle quantità, prova che mutando il segno di u, la formola $x = f(p, q, r \ldots -u)$ dee soddisfare alla proposta, ancorchè per la mutazione del segno di u sia sotto una forma immaginaria, e per conseguenza una semplice espressione analitica o un simbolo, atto unicamente ad annullare la somma de' termini. Dunque ogni equazione algebrica determinata ha per lo meno una risolvente reale o immaginaria.

Siccome tutta la dimostrazione si fonda sull' esistenza della formola $x = f(p, q, r \ldots u)$, e questa non può supporsi se prima non si prova possibile la generale soluzione dell' equazioni algebriche di qualunque grado, i soli dubbj proposti dal Sig. *Lacroix* (*Complem. cit.*, §. 56) basterebbero per distruggerla, qualora il Sig. Cav. *Ruffini* non avesse rigorosamente provata l' impossibilità della soluzione onde si tratta (*Soc. Ital.*, *T. X*). Tolta di mezzo la dimostrazione del Sig. *Francoeur*, si fa luogo a quella che passiamo ad esporre, e per cui ci giova premettere le seguenti nozioni.

I. Se in una funzione delle variabili y, z, espressa per $F(y, z)$ si fa variare successivamente y e z, con mettervi $y + k$ per y, $z + h$ per z, si ottiene la stessa funzione variata $F'(y, z)$, la quale nasce dalla sostituzione simultanea di $y + k$ per y, e di $z + h$ per z. Infatti, siccome le variabili y, z sono per ipotesi fra loro indipendenti, la variazione di una non può influire nella variazione dell' altra.

II. Sostituendo $z + h$ per z in sen.z e cos.z, si ottiene

$$\text{sen.}(z+h) = \text{sen.}z\ \text{cos.}h + \text{sen.}h\ \text{cos.}z\ ,\ \text{cos.}(z+h) = \text{cos.}z\ \text{cos.}h - \text{sen.}z\ \text{sen.}h\ ;$$

ma $\text{sen.}\,h = h - \frac{h^3}{2.3}$ ec., $\text{cos.}\,h = 1 - \frac{h^2}{1.2}$ ec.

Dunque se h sia una quantità infinitamente piccola, onde possano trascurarsi le sue potenze superiori alla prima, si ha

$$\text{sen.}(z+h)=\text{sen.}z+h\cos.z,\ \cos.(z+h)=\cos.z-h\,\text{sen.}z:$$

e se in vece di z abbiasi mz, e pongasi $z+h$ per z, risulta

$$\text{sen.}(mz+mh)=\text{sen.}\,mz+mh\cos.\,mz,\ \cos.(mz+mh)=\cos.\,mz-mh\,\text{sen.}\,mz.$$

III. Avendosi due quantità finite A, B, si possono trovare due quantità infinitesime k, h, tali, che stia $A : B :: k : h$. Infatti $A : B :: \frac{A}{\infty} : \frac{B}{\infty}$.

Ciò posto sia $x^{2m}+px^{2m-1}+qx^{2m-2}\ldots+\pi x+\zeta=0$ e s'indichi per δ una quantità prossimamente minore della minima differenza fra le sue risolventi. Avendo riconosciuto coi noti metodi che la proposta non abbia nè risolventi eguali, nè risolventi razionali, si ponga δ, 2δ, 3δ ec. per x, fino ai limiti delle massime risolventi, positiva e negativa. Se si trova una variazione di segno ne' risultati, fra i numeri sostituiti per x vi è una risolvente reale. Suppongasi dunque di non incontrare alcuna variazione di segno, e siccome qualunque risolvente della proposta, se esiste, dev'essere immaginaria, pongasi $x=\lambda(\cos.\phi+\text{sen.}\phi\sqrt{-1})$. La trasformata è $P+Q\sqrt{-1}=0$, dove

$$P=\lambda^{2m}\cos.2m\phi+\rho\lambda^{2m-1}\cos.(2m-1)\phi+q\lambda^{2m-2}\cos.(2m-2)\phi\ldots+\pi\lambda\cos.z+\zeta$$

$$Q=\lambda^{2m}\,\text{sen.}\,2m\phi+p\lambda^{2m-1}\,\text{sen.}(2m-1)\phi+q\lambda^{2m-2}\,\text{sen.}(2m-2)\phi\ldots+\pi\lambda\,\text{sen.}\phi$$

e tutto si riduce a provare che vi è sempre un valore di λ e di ϕ, il quale dà simultaneamente $P=0$, $Q=0$.

Sieno λ', ϕ' due qualunque determinati valori di λ, ϕ; e P, Q divengano respettivamente P′, Q′. Pongasi $\lambda'+k$ per λ', $\phi'+h$ per ϕ', essendo k, h quantità infinitesime: si trascurino le potenze di k, h, superiori alla prima, e chiamando P″, Q″ ciò che respettivamente divengono P′, Q′, si avrà (n.° I e n.° II)

$$P''=P'+\Big[2m\lambda'^{2m}\cos.2m\phi'+(2m-1)p\lambda'^{2m-1}\cos.(2m-1)\phi'\ldots+\pi\lambda'\cos.\phi'\Big]\frac{k}{\lambda'}$$
$$-[2m\lambda'^{2m}\,\text{sen.}\,2m\phi'+(2m-1)\rho\lambda'^{2m-1}\,\text{sen.}(2m-1)\phi'\ldots+\pi\lambda'\,\text{sen.}\phi']h,$$

$$Q''=Q'$$

$$Q'' = Q' + \left[2m\lambda'^{2m} \text{ sen. } 2m\phi' + (2m-1)p\lambda'^{2m-1} \text{ sen. } (2m-1)\phi' \ldots + \pi\lambda' \text{ sen. } \phi' \right]\frac{h}{\lambda'}$$
$$+ [2m\lambda'^{2m} \cos. 2m . \phi' + (2m-1)\rho\lambda'^{2m-1} \cos. (2m-1)\phi' \ldots + \pi\lambda' \cos. \phi']k.$$

Noi diciamo che il valore ed il segno di k, h, si possono prender tali, che P'', P'; Q'', Q' risultino del medesimo segno; che sia $P'' < P'$, $Q'' < Q'$, e che le differenze $P' - P''$, $Q' - Q''$ sieno infinitesime. Pongasi

$$2m\lambda'^{2m} \cos. 2m\phi' + (2m-1)p\lambda'^{2m-1} \cos. (2m-1)\phi' \ldots + \pi\lambda' \cos. \phi' = M$$
$$2m\lambda'^{2m} \text{ sen. } 2m\phi' + (2m-1)\rho\lambda'^{2m-1} \text{ sen. } (2m-1)\phi' \ldots + \pi\lambda' \text{ sen. } \phi' = N$$

onde si abbia

$$P'' = P' + \frac{Mk}{\lambda'} - Nh, \quad Q'' = Q' + \frac{Mh}{\lambda'} + Nk.$$

Se $P' > 0$ e $Q' > 0$ bisogna che $\frac{Mk}{\lambda'} - Nh$, $\frac{Mh}{\lambda'} + Nk$ sieno quantità infinitesime negative, e viceversa se $P' < 0$, e $Q' < 0$: condizioni che si verificano in ambedue i casi con fare

$$\left\{ \frac{Mk}{\lambda'} - Nh = \pm\alpha, \quad \frac{Mh}{\lambda'} + Nk = \pm\alpha' \right\} \ldots \text{(I)}$$

essendo α, α' quantità infinitesime, ed il segno essendo qual si richiede dalle circostanze. Le stesse equazioni sussidiarie (I) soddisfano al caso che una delle quantità P', Q' sia positiva, l'altra negativa.

Ottenuti i nuovi valori di P, Q, cioè $P''(<P')$, $Q''(<Q')$ procedasi ad una seconda trasformazione, per cui da P'' si derivi $P''' < P''$, da Q'' si derivi $Q''' < Q''$. Indicando $\lambda' + k$ per λ'', $\phi' + h$ per ϕ'', e rappresentando per M', N' ciò che respettivamente divengono M, N, quando vi si pone λ'', ϕ'' per λ', ϕ', è chiaro che si avrà

$$P'' - P''' = P' - P'', \quad Q'' - Q''' = Q' - Q''$$

purchè s'istituiscano l'equazioni

$$\left\{ \frac{M'k'}{\lambda''} - N'h' = \pm\alpha, \quad \frac{M'k'}{\lambda''} + N'k' = \pm\alpha' \right\} \ldots \text{(II)}$$

e quindi si deduca il valore di k' ed h'.

Suppongasi protratta all'infinito questa serie di successive trasformazioni, e per fissare le idee si suppongano P' e

Q' positivi e $P' < Q'$. Avendosi $P'' = P' - \alpha$, $P''' = P'' - \alpha = P' - 2\alpha$, $P'''' = P''' - \alpha = P'' - 2\alpha = P' - 3\alpha$, ec. si dee giungere ad un punto in cui si trovi $P^{(n)} = 0$, e però esiste un valore di λ e di ϕ il quale dia $P = 0$.

Affinchè le quantità P', Q', mediante i successivi decrementi svaniscano insieme, si richiede che la maggiore decresca per gradi proporzionalmente più forti; e qualunque sia il rapporto che per quest' effetto dee sussistere fra α ed α', è certo che tal rapporto è possibile. Pongasi che α' abbia ad α il richiesto rapporto, e risolvendo l'equazioni (I) si avrà il corrispondente valore infinitesimo di k e di h. L'equazioni (II) daranno il corrispondente valore infinitesimo di k' e di h', e così in seguito. Spingendo all' infinito la serie delle indicate trasformazioni, si giungerà necessariamente ad ottenere l'evanescenza simultanea di P e di Q. Dunque vi è sempre un valore di λ e di ϕ, che sostituito nell' espressione d'x verifica la proposta: per conseguenza ogni equazione algebrica determinata ha per lo meno una risolvente reale o immaginaria.

ARTICOLO III

Ricerca delle risolventi razionali dell' equazioni di 3.°, 4.° e 5.° grado, le quali sieno prive del 2.° termine, o tali che il coefficiente di detto termine sia divisibile pel massimo esponente dell' incognita: dove della estrazione di $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b})}$, e della maniera di ottenere i fattori razionali componenti un equazione di 5.° grado, le di cui risolventi sieno tutte irrazionali.

§. 1. Essendo $x^3 + px + q = 0$ un' equazione cubica qualunque, i Geometri hann' osservato, che quando si ha $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 0$ due delle sue risolventi sono eguali.

Partendo dall' ipotesi contraria, cioè che due risolventi sieno eguali, pongasi

$x^3 + px + q = (x^2 \pm 2fx + f^2)(x \mp 2f) = x^3 - 3f^2x \mp 2f^3 = 0$. Risulta $-3f^2 = p, \mp 2f^3 = q$; quindi $f = \sqrt{-\frac{1}{3}p} = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2}q}$, e fatta la potenza sesta si ha $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 0$ come sopra: si ha inoltre $p < 0$, altrimenti $\frac{1}{4}q^2$ avrebbe un valore negativo ed f sarebbe immaginario.

I criterj coi quali si può decidere dell'eguaglianza di due risolventi eguali di un'equazione cubica della forma $x^3 + px + q = 0$, sono dunque $p = -3m^2$, $q = \pm 2m^3$.

Teor. Se due risolventi di un'equazione cubica come sopra sono eguali, tutte le sue risolventi sono razionali.

Infatti perchè sia f irrazionale, bisogna che tali sieno ambedue le quantità $\sqrt{-\frac{1}{3}p}$, $\sqrt[3]{\mp \frac{1}{2}q}$. Ma il quadrato di queste dà il numero razionale $-\frac{1}{3}p = \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}\right)^3}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}} = \dfrac{\frac{1}{2}q}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}}$ numero irrazionale. Dunque ec.

§. 2. Non verificandosi i criterj delle risolventi eguali, suppongasi che la proposta abbia una risolvente razionale $\pm f$, e si faccia

$x^3 + px + q = (x^2 \pm fx + g)(x \mp f) = x^3 + (g - f^2)x \mp gf = 0$.

Il confronto dà $g - f^2 = p$, $\mp gf = q$. Dunque si divida q in due fattori: si prendano per f, g, quelli che danno $g - p = f^2$, ed il valore di f è la risolvente cercata.

La riprova de' valori reciproci di q diviene anche più facile e breve, osservando 1.° che se $p > 0$, g dev'essere $> p$; e se $p < 0$, il massimo valor negativo di g dev'essere $< p$.

2.° Che se $q > 0$ il segno di g è contrario a quello di f: è lo stesso se $q < 0$. Basta avvertire che il segno di f si desume dall'equazione ipotetica $x = \pm f$.

3.° Il divisore estremo q rimane escluso quasi sempre, perchè non può essere $x = \pm q$ se non abbiasi p negativo ed insieme $p \pm 1$ un quadrato, dove si ha il segno $+$ se q è negativo e viceversa. È questa una conseguenza della sostituzione di $\pm q$ per x nell'equazione $x^3 + px + q = 0$.

Esempio I. Abbiasi $x^3 - 21x - 20 = 0$. Risciolgo 20 ne' fattori 4, 5; 2, 10, escludendo gli estremi 1, 20; il primo perchè troppo piccolo, il secondo perchè $21 + 1$ non è un quadrato.

Posto $f = 5$ osservo che $g + 21 = f^2$ diviene $4 + 21 = 5^2$ e ne deduco $x = 5$. Il fattore $x^2 \pm fx + g$ si cangia in $x^2 + 5x + 4$ e dà $x = -1$, $x = -4$.

Esempio II. Sia $x^3 - 17x + 40 = 0$. I più semplici divisori di 40 essendo 1, 2, 4, 5, 8, sperimento i primi tre, e veggo subito che non può farsi $f = \pm 1$, ± 2, ± 4, perchè il 2.° membro della caratteristica $g + 17 = f^2$ risulta eccessivamente minore del primo. Pongo $f = 5$, e siccome trovo $8 + 17 = 5^2$, ne deduco $x = -5$. Il fattor quadratico è $x^2 - 5x + 8$.

Esempio III. Suppongasi data l'equazione $x^3 + 28x + 64 = 0$. La caratteristica $g - 28 = f^2$ dimostra che il minimo valore di g non può esser < 29. Dunque non si può assumer per g altro divisore che 32. Ma $32 - 28 = 2^2$, e -2 verifica la proposta. Dunque $x = -2$.

Esempio IV. L'equazione assegnata sia $x^3 - 96x - 576 = 0$, che per essere $p < 0$ non è (§. 2, n.° I°) pel nostro metodo delle più vantaggiose. Cominciando dalla ricerca de' più semplici divisori di 576, trovo 1, 2, 4, 6, 8, 9, 12. Quindi escludo i divisori 1, 576; il primo perchè troppo piccolo, il secondo perchè $96 + 1$ non è un quadrato, e passo a provare alternativamente per f e g nell'equazione $g + 96 = f^2$ i divisori reciproci 2, 288; 3, 192; 4, 144; 6, 96: ma siccome g non può avere alcun valore negativo $= 0 > 96$, avverto di prendere positivamente per g i numeri 288, 192, 144, 96.

Un brevissimo sperimento dimostrandomi che le prime cinque coppie di divisori sono inutili, provo le due coppie susseguenti 8, 72; 9, 64, e queste essendo parimente inutili, pongo $f = 12$, $g = 48$. Il risultato è $48 + 96 = 12^2$. Dunque $x = 12$. Ecco il quadro delle operazioni che sono necessarie pel metodo de' divisori. (*Vedi Tavola*) *arte I del Tomo XVI.*

6, −8, −9, −12, −16, −18, −32, −36, −48, −64, −72, −96, −144, −192, −288, −576,

6, − 72, − 64, − 48, − 36, − 32, − 18, − 16, − 12, − 9, − 8, − 6, − 4, − 3, − 2, − 1

2, −168, −160, −144, −132, −128, −114, −112, −108, −105, −104, −102, −100, − 99, − 98, − 97.

2, 21, *, 12, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *.

*, *, *, − 1, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *.

ione $\frac{\left(\frac{q}{a}+p\right):a}{a}+1=0$ ci dà la risolvente richiesta $x=12$.

TAVOLA *che dovrà collocarsi tra le pag.* 244, 245 *della Parte I del Tomo XVI.*

Indicando per a un divisore di q, abbiamo

Valori di a	576	288	192	144	96	72	64	48	36	32	18	16	12	9	8	6	4	3	2	1
Valori di $\frac{q}{a}$	1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	32	36	48	64	72	96	144	192	288	576
Valori di $\frac{q}{a}+p$	−95	−94	−93	−92	−90	−88	−87	−84	−80	−78	−64	−60	−48	−32	−24	0	48	96	192	480
Valori di $\left(\frac{q}{a}+p\right):a$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	−4	*	−3	0	12	32	96	480
Valori di $\frac{\left(\frac{q}{a}+p\right):a+0}{a}$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	3	*	48	480

Valori di a	−1	−2	−3	−4	−6	−8	−9	−12	−16	−18	−32	−36	−48	−64	−72	−96	−144	−192	−288	−576
Valori di $\frac{q}{a}$	−576	−288	−192	−144	−96	−72	−64	−48	−36	−32	−18	−16	−12	−9	−8	−6	−4	−3	−2	−1
Valori di $\frac{q}{a}+p$	−672	−384	−288	−240	−192	−168	−160	−144	−132	−128	−114	−112	−108	−105	−104	−102	−100	−99	−98	−97
Valori di $\left(\frac{q}{a}+p\right):a$	672	192	72	60	32	21	*	12	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Valori di $\frac{\left(\frac{q}{a}+p\right):a+0}{a}$	−672	−96	−24	15	*	*	*	−1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Il divisore 12 che verticalmente corrisponde al numero −1, da cui resta verificata l'ultima condizione $\frac{\left(\frac{q}{a}+p\right):a}{a}+1=0$ ci dà la risolvente richiesta $x=12$.

ESEMPIO V. Abbiasi finalmente $x^3 - 60x - 1600 = 0$. Siccome $p > 0$ e $q < 0$, g dev'essere > 60, f positivo e < 27. Basta dunque cercare i divisori di 1600 minori di 27, che sono 1, 2, 4, 8, 10, 16, 20, e che danno respettivamente $g = 1600, 800, 400, 200, 160, 100, 80$. Si vede subito che i primi quattro non convengono alla caratteristica $g - 60 = f^2$; che il 5.° dà $160 - 60 = 10^2$, e però $x = 10$. (*)

§. 3. Quando la formola Cardanica è reale, nel qual caso una soltanto può essere la risolvente razionale della proposta, il valore di tal risolvente, se esiste, trovasi anche con estrarre successivamente le respettive radici quadrata e cubica, indicate dalla formola $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b})}$. Così da $x^3 + 3x - 14 = 0$ si ritrae $x = \sqrt[3]{(7 + \sqrt{50})} + \sqrt[3]{(7 - \sqrt{50})} = \sqrt[3]{(7 + 7,071)} + \sqrt[3]{(7 - 7,071)} = \sqrt[3]{14,071} + \sqrt[3]{-0,071} = 2,4\ldots - 0,4\ldots = 2$.

Da $x^3 + 6x - 20 = 0$ si deduce $x = \sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3})} + \sqrt[3]{(10 - 6\sqrt{3})} = \sqrt[3]{(10 + 6 \times 1,732)} + \sqrt[3]{(10 - 6 \times 1,732)} = \sqrt[3]{20,392} + \sqrt[3]{-0,392} = 2,7\ldots - 0,7\ldots = 2$.

Questo metodo, che è molto facile nel caso rarissimo che b sia un quadrato, ed $a \pm \sqrt{b}$ sieno cubi, come in $x^3 - 9x + 28 = 0$, esige quasi sempre un calcolo fastidioso, che divien tale anche di più, se i numeri a, b contengono delle frazioni; e riesce poi del tutto inutile quando è $b < 0$. Avendosi per esempio l'equazione semplicissima $x^3 - 5x + 12 = 0$, si trova

---

(*) Per agevolare la supposta riduzione di un'equazione cubica qualunque $Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$ alla forma $x^3 + px + q = 0$, giova far uso della formola

$$x^3 + (AC - 3m^2)x + A(AD - Cm) + 2m^3 = 0$$

dove m sta per $\frac{B}{3}$ ed x è $= Ay + m$.

Il numero de' casi in cui si verifica che sia p divisibile per 3, è il terzo di tutti i casi possibili, ed a questo numero deesi aggiungere quello dell'equazioni originariamente prive del 2.° termine. Quindi apparisce quanto esteso sia il numero dell'equazioni da noi contemplate.

$$x=\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\tfrac{847}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{\tfrac{847}{27}}\right)}=\sqrt[3]{\left(6+5{,}596\right)}+$$
$$\sqrt[3]{0{,}404}=\sqrt[3]{11{,}596}+\sqrt[3]{0{,}404}=2{,}2\ldots+0{,}7\ldots$$

espressione dipendente da una serie di otto operazioni, che indica una risolvente razionale 3, ma ci lascia nella necessità di verificarla.

Il metodo del §. 2 è incomparabilmente più semplice e più spedito, poichè l'equazione $g+5=f^2$ si verifica subito con fare $f=3$, $g=4$.

§. 4. Gli autori di elementi algebrici, in vece dell'anzidetto metodo aritmetico, sogliono adoperare nella ricerca delle risolventi razionali l'estrazione algebrica della radice cubica esatta (*).

Noi, quantunque siamo persuasi esser questa un'operazione assolutamente viziosa, ci proponiamo di trattarne, perchè la ricerca di $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}$ può riguardarsi come un problema relativo al calcolo algebrico, necessario al compimento dell'Algebra Trascendente, e perchè siamo d'avviso di poterne perfezionare ulteriormente la soluzione.

Omesso il metodo di tentativo, omai abbandonato, per cui la parte razionale della radice cubica fassi dipendere dalla determinazione di un numero t, il quale renda un quadrato la funzione $\frac{m-t^3c}{3t}$, a noi sembra che uno soltanto sia il metodo attualmente adottato dagli Analisti.

Pongasi $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=y+\sqrt{t}$, essendo y, t, due numeri razionali da determinarsi. Fatto il cubo si deduce

$$a=y^3+3yt\ldots(1)\qquad \sqrt{b}=(3y^2+t)\sqrt{t}\ldots(2).$$

(*) Fra i moderni *Tommasini* (*Introductio in Alg. Tom. II*, *pag.* 6); *Paoli* (*Elem. d' Alg. Tom. I*, *p.* 110); *Francoeur* (*Cours Compl. de Math. vol.* 2, *pag.* 79 etc.). *Bossut* si serve unicamente del metodo del §. 3, ma non lo adopera nella ricerca di una risolvente razionale. *Lacroix* tralascia ogni applicazione della teoria dell'equazioni cubiche; omissione, che per essere affatto nuova tra gli autori di elementi, ci dà luogo di sospettare ch'egli non fosse contento de' metodi pratici conosciuti.

La differenza de' quadrati dà $a^2 - b = (y^2 - t)^3$, cioè $y^2 - t = \sqrt[3]{(a^2 - b)}$. Affinchè y, t sieno razionali dev' essere $a^2 - b = \pm h^3$ cubo razionale. Dunque $t = y^2 \mp h$, e l'equazione (I) diventa $4y^3 \mp 3hy - a = 0 \ldots (Y)$; equazione, che se ha luogo la radice ipotetica, dee avere una risolvente razionale, per la di cui determinazione si ricorre al metodo de' divisori. (*)

§. 5. Prima di prendere in esame l'esposto metodo, ci giova stabilire alcune utili verità, ed osservare se possa vantaggiosamente estendersi ai casi, in cui $a + \sqrt{b}$ non è un cubo.

I. Siccome deesi avere $a^2 - b = \pm h^3$ tutti i binomj cubi della forma $a \pm \sqrt{b}$ sono compresi nella formola $a \pm \sqrt{(a^2 \mp h^3)}$. Ma una formola di questa natura suppone un' equazione cubica $z^3 \pm 3hz - 2a = 0$ e viceversa. Dunque la ricerca della radice cubica esatta di $a \pm \sqrt{b}$, e la ricerca di una risolvente razionale dell' equazione $z^3 \pm 3hz - 2a = 0 \ldots (Z)$ sono due problemi che reciprocamente dipendono l'uno dall'altro. Lo stesso risulta dall'ispezione della (Y), la quale con fare $2y = z$ si cangia nella (Z), e sostituendo il valore di h diviene $z^3 - 3\sqrt[3]{(a^2 - b)} \times z - 2a = 0$, equazione da cui deriva $z = \sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} + \sqrt[3]{(a - \sqrt{b})}$.

Qualunque volta la ricerca del valore esatto di $\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})}$ *debba servire alla soluzione di un' equazione cubica, il metodo sopra esposto ci riconduce dunque con circolo vizioso al punto da cui siamo partiti.*

II. *Se vien data un' equazione cubica qualunque* $x^3 + px + q = 0$, *che abbia almeno una risolvente razionale, esiste sempre la radice cubica esatta del binomio* $-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$

(*) Il metodo proposto dal P. *Boscovich* (*Elem. Univ. Math. T. II*, *p.* 145. *Venet.* 1757) sembra del tutto diverso dal precedente, ma se attentamente si considera l'equazione finale del suo calcolo, cioè $u^3 - 6au^2 + (276 - 15a^2)u - 8a^3 = 0$, si vede ch'ella equivale ad un'incomoda trasformata della (Y). Infatti con porre $u = \omega + 2a$ si ottiene $\omega^3 - 27(a^2 - b)\omega - 27(a^2 - b) \times 2a = 0$, ovvero, perchè $a^2 - b = h^3$, $\omega^3 - 27h^3\omega - 2a \times 27h^3 = 0$, equazione che si cangia nella (Y) purchè si faccia $\omega = 2 . 3hy$.

sotto la forma $y+\sqrt{t}$, poichè la determinazione di questa radice non dipende che dall'esistenza di una risolvente razionale della (Z) identica colla proposta. (*)

Qualora il binomio dato sia $a+\sqrt{-b}$, e la (Z) abbia tutte le risolventi razionali, i tre valori della radice $y+\sqrt{t}$ sono immaginarj come dev'essere; e l'immaginarietà deriva dall'essere $t=y^2-\sqrt[3]{(a^2+b)}$, e $\sqrt[3]{(a^2+b)}$ sempre maggiore del quadrato del massimo valore d'y. Sappiamo infatti dalla teoria dell'equazioni cubiche, che nell'equazione $x^2-px\pm q=0$, le di cui risolventi sieno tutte reali, è $x<2\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Dunque nella (Z) si ha $z^2<4h<4\sqrt[3]{(a^2+b)}$. Ma $z^2=4y^2$. Dunque $y^2<\sqrt[3]{(a^2+b)}$.

III. *La formola Cardanica è inutile per determinare le risolventi razionali, ove si tratti del caso irriducibile.* Infatti nulla si ottiene coll'estrazione algebrica della radice cuba, perchè si cade in un circolo vizioso; a nulla giova il metodo aritmetico del §. 3 perchè $\sqrt{-b}$ non può estrarsi: nè le serie derivanti dallo sviluppo della potenza $\frac{1}{3}$ di $a+\sqrt{-b}$, $a-\sqrt{-b}$, sono di alcun vantaggio, perchè altro non danno generalmente che delle semplici approssimazioni.

IV. Il valore di $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}$ essendo necessariamente triplice, è impossibile determinarlo con un metodo diretto, il quale sia indipendente da un'equazione di 3.° grado.

V. Essendo a, b numeri intieri, per qualunque valore razionale dispari di z si ha y sotto la forma $\frac{2M+1}{2}$, e $\sqrt{t}$ $[=\sqrt{(y^2-h)}]=\frac{1}{2}\sqrt{[(2M+1)^2-4h]}=\frac{1}{2}\sqrt{t'}$ purchè sia ϕ numero dispari. Dunque, sebbene a, b sien numeri intieri, può aversi $\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{b}\right)}=\frac{z+\sqrt{t'}}{2}$ ...(I), proposizione gratuitamente contradetta da qualche illustre Geometra, e segnatamente dal P. *Boscovich* (*Op. cit. Tom. II, p.* 147).

(*) Male dunque si appose il P. *Boscovich* (*Op. cit. p.* 131) ove disse: *Sæpe autem radicis cubicæ extractio haberi non poterit, licet æquatio proposita rationales radices habuerit.*

Istituendo subito l'equazione (I) si giunge alla (Z) senza passare per la (Y). L'equazione ipotetica (I) è dunque preferibile.

VI. Affinchè due risolventi dell'equazione $x^6+fx^3+g=0$ sieno della forma $y\pm\sqrt{t}$, bisogna che sia $g=h^3$, e che l'equazione sussidiaria $z^3-3hz+f=0$ abbia almeno una risolvente razionale. Infatti la proposta ci dà

$$x=\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}f\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}f^2-g\right)}\right]}.$$

§. 6. Se $a+\sqrt{b}$ non è un cubo, sia n un numero intiero o fratto, tale che risulti $\sqrt[3]{[n(a+\sqrt{b})]}=y+\sqrt{t}$. Indicando $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(=\sqrt[3]{\frac{1}{n}}\right)$ per $\sqrt[3]{N}$, abbiamo $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=(y+\sqrt{t})\sqrt[3]{N}$, e l'equazioni (1), (2) del §. prec. divengono

$$a=N(y^3+3yt),\quad \sqrt{b}=N(3y^2+t\sqrt{t}).$$

Da queste $y^2-t=\sqrt[3]{\frac{a^2-b}{N}}=\frac{\sqrt[3]{(a^2-b)N}}{N}$, e però si vede che per determinare il valore di n, basta trovare un numero N il quale renda a^2-b un cubo; numero che sempre esiste, perchè tali sono $(a^2-b)^2$, $(a^2-b)^{-1}$. Per altro, siccome richiedesi per m il più semplice fra i valori possibili, e per la ricerca di questo valore più semplice non evvi alcun metodo, tutto il successo dipende dalla dubbia scorta di un fastidioso tentativo. Trovato il più semplice fra i valori di n, valore che non può essere un cubo, altrimenti non sarebbe atto a trasformare in un cubo il binomio dato, la radice dimandata comparisce sotto la forma $(y+\sqrt{t})\sqrt[3]{N}$. Ma questa esige l'estrazione di una radice quadrata e di una radice cubica, e poi una somma ed una moltiplicazione, mentre per determinare aritmeticamente il valore di $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$ basta l'estrazione delle due radici ed una somma. Dunque, anche nel caso il più favorevole che sia N un numero intiero, il metodo del §. 3 non si estende nè con facilità nè con vantaggio ai casi in cui $a+\sqrt{b}$ non sia un cubo.

Diciamo adesso, che il metodo di cui si tratta non va esente da ogni difetto, neppure nel caso che il binomio dato sia un cubo: 1.° perchè il metodo de' divisori, da cui si fa dipendere la ricerca de' valori d'y, è laborioso e prolisso: 2.° perchè la forma dell'ausiliare (Y) è sovente inopportuna. Infatti, qualunque volta la (Z) ha una sola risolvente razionale dispari, la (Y) ha una sola risolvente razionale fratta; e quando la (Z) ha tutte le risolventi razionali dispari, tutte le risolventi della (Y) sono razionali fratte. In ambedue questi casi riesce del tutto inutile il sottoporre la (Y) al metodo de' divisori. Così l'equazione (Y) relativa al binomio $-20+\sqrt{\frac{5887}{27}}$ è $4y^3-17y+20=0$, e non ha nessuna risolvente razionale intiera. Prevalendoci della (Z) che è $z^3-17z+40=0$, si trova subito (§. 2, es. 2) $z=-5$. Dunque $y=-\frac{5}{2}$, e siccome $h=\frac{17}{3}$ ne deriva $t\left(=\frac{25}{4}-\frac{17}{3}\right)=\frac{7}{12}$, e la radice è $-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}$. (*)

§. 7. In seguito di quanto si è fin qui esposto si può adesso concludere, che per ottenere il valore esatto di $\sqrt[3]{+(a\sqrt{b})}$ giova istituire l'equazione ipotetica $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=\frac{z+\sqrt{t}}{2}$: dedurne cubando $8a=z^3+3zt\ldots(a)$, $8\sqrt{b}=(3z^2+t)\sqrt{t}$. Quindi $(8a)^2-(8\sqrt{b})^2=(z^2-t)^3$, cioè $z^2-t=4\sqrt[3]{(a^2-b)}$ e $t=z^2-4h$. Così l'equazione (a) diventa $4z^3-12hz-8a=0$, e divisa per 4 coincide colla (Z), della quale si hanno facilmente (§. 2) le risolventi razionali, ed in conseguenza

$$\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{b}\right)}=\frac{z}{2}+\sqrt{\left[\frac{z^2}{4}-\sqrt[3]{\left(a^2-b\right)}\right]}.$$

(*) Data un'equazione $kx^m+\text{ec.}=0$, prima di applicarle il metodo de' divisori, giova liberarla dal coefficiente k, altrimenti può succedere, che l'applicazione di detto metodo non porti a verun risultato, quantunque la proposta abbia più di una risolvente razionale, reperibile dopo la trasformazione indicata.

In pratica basta calcolare il valor di $h\,[=\sqrt[3]{(a^2-b)}\,]$ per sostituirlo nella (Z) che si risolve come sopra.

Questo metodo, il quale come ognun vede, altro non ha di comune con quello del §. 4, che l'artifizio con cui si ottiene il valore di t, ne differisce 1.° nell'equazione d'ipotesi: 2.° nell'equazione finale: 3.° nella maniera di ottenere le risolventi razionali dell'equazione finale.

Per conseguire anche più speditamente l'intento, gioverà 1.° osservare, che quando a sia intiero e $b>0$ non può supporsi $z=2a$, poichè l'equazione (a) diverrebbe $8a=8a^3+bat$, cioè $1=a^2+\frac{3}{4}t$, dove t ha necessariamente il segno di b. In moltissimi altri casi, l'esclusione del divisore $2a$ si desume in un istante dal segno, o dal valore del coefficiente $3h$ della (Z) (§. 2, n.° 3). 2.° Con mettere a prova la prima coppia di divisori reciproci appena ottenuta, quindi la seconda ec., poichè in questa guisa spesso ci riuscirà dispensarci dalla ricerca di una parte di tali divisori: circostanza favorevole che sempre ha luogo quando è $p>0$ (§. 2, n.° I°). Le seguenti applicazioni, che non sono scelte fra le più facili, faranno sempre meglio conoscere l'opportunità del nostro metodo, anche nel caso che i numeri a, b siano fratti; caso pel metodo comune assai svantaggioso, perchè riducendo la (Y) a forma intiera, l'ultimo suo termine notabilmente si accresce.

Esempio 1.° Si dimanda $\sqrt[3]{(10+\sqrt{108})}$. Abbiamo $h=\sqrt[3]{-8}=-2$, e la (Z) è $z^3+6z-20=0$. Esclusi i divisori 1, 20 perchè $p>0$ (§. 2, n.° 3) pongo $20=2\times10$ e fo $f=2$, $g=10$. Siccome $g-6=f^2$ resta verificata, deduco $\frac{z}{2}=1$, $t\,[=1^2-(-2)]=3$, $\sqrt[3]{(10+\sqrt{108})}=1+\sqrt{3}$.

Esempio 2.° Si vuole $\sqrt[3]{(81+\sqrt{6534})}$. Essendo $a^2-b=27$ e però $h=3$ la (Z) è $z^3-9z-162=0$, e si tratta di verificare $g+9=f^2$. Escludo subito i divisori 1, 162; il primo perchè l'ispezione della (Z) lo dimostra falso; il secondo perchè a è intiero e $b>0$. Suppongo $162=2\times81$, ma l'equazione $g + 9 = f^2$ indica subito la falsità di questi valori. La terza coppia di divisori reciproci essendo 6, 27, pongo $f = 6$ e trovo $27 + 9 = 6^2$. Dunque $\frac{z}{2} = 3$, $t = 3^2 - 3 = 6$, $\sqrt[3]{(81 + \sqrt{6534})} = 3 + \sqrt{6}$.

Esempio 3.° Si cerca $\sqrt[3]{\left(\frac{32}{135} + \sqrt{\frac{64}{1125}}\right)}$. Essendo $h = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{32}{135}\right)^2 - \frac{64}{1125}\right]} = -\frac{4}{45}$, si ha $z^3 + \frac{4}{15}z - \frac{64}{135} = 0$. Pongo $15z = u$ ed ottengo $u^3 + 60u - 1600 = 0$. Dunque (§. 2 sul fine) $u = 10$, $\frac{z}{2} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, $t = \frac{1}{9} + \frac{4}{15} = \frac{1}{5}$ ed $\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{5}}$ è la radice richiesta. (*)

§. 8. La ricerca delle risolventi razionali ed eguali di un'equazione di 4.° grado $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, per mezzo del noto metodo del massimo comune divisore, essendo di sua natura molto incomoda, e ordinariamente soggetta ad un inutile tentativo; e la ricerca delle risolventi razionali diseguali per mezzo della ridotta $s^3 + 2ps^2 + (p^2 - 4r)s - q^2 = 0$, esigendo talvolta un prolisso e fastidioso calcolo, o perchè sia troppo grande l'ultimo termine q^2, o perchè troppo grandi sieno i coefficienti di s, s^2, e grande insieme il valore de' divisori quadrati di q^2; ed essendo, come in seguito dimostreremo, la suddetta ricerca impossibile col metodo generale, quando la proposta abbia una sola risolvente razionale, noi ci proponiamo di rintracciare le risolventi razionali eguali e diseguali, con un metodo semplice, che direttamente conduca all'esatto valore delle medesime.

Nell'ipotesi che la proposta abbia tre risolventi eguali,

(*) Se ambedue i termini del binomio sieno affetti da irrazionalità quadratica, giova ridurre i radicali alla più semplice espressione, e poi moltiplicare e dividere tutto il binomio pel cubo di uno de' suoi radicali. Così $\sqrt{243} + \sqrt{242} = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}(9\sqrt{3} + 11\sqrt{2})}{3\sqrt{3}} = \frac{81 + 33\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$, e la radice è $\frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

può supporsi

$$x^4+px^2+qx+r=(x^3\mp 3fx^2+3f^2x\mp f^3)(x\pm 3f),\ \text{cioè}$$

$$x^4+px^2+qx+r=x^4-6f^2x^2\pm 8f^3x-3f^4.$$

Dunque l'equazione data dev'essere $x^4-px^2\pm qx-r=0\ ..(A)$ dove deesi avere $-q$ se le risolventi eguali sono negative. Il confronto de' termini dà

$$6f^2=p,\ \pm 8f^3=q,\ 3f^4=r.$$

Quindi $\sqrt{\tfrac{1}{6}p}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{q}=\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}r}$, ovvero $p^2=12r$, $q^2=\tfrac{8}{27}p^3$. Queste condizioni, unite con quella che risulta dai segni della formola (A), costituiscono i criterj per distinguere se un' equazione di 4.° grado abbia tre risolventi eguali. Verificandosi le predette condizioni si deduce

$$x=\sqrt{\tfrac{1}{6}p},\ x=\sqrt{\tfrac{1}{6}p},\ x=\sqrt{\tfrac{1}{6}p},\ x=-3\sqrt{\tfrac{1}{6}p}.$$

Sia per esempio $x^4-24x^2+64x-48=0$.
Si ha $p<0$ ed $r<0$ 1.ª condizione: poi

$$\sqrt{\tfrac{1}{6}p}\,(=2)=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{64}=\sqrt[4]{16}.\ \text{Dunque}\ x=2,=2,=2,=-6.$$

Fatto il confronto di $\sqrt{\tfrac{1}{6}p}$, $\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{q}$ come al §. 1, si trova che f dev'essere un numero razionale. Dunque *un' equazione di 4.° grado, che abbia tre risolventi eguali, le ha tutte razionali.*

§. 9. Pongasi che le risolventi eguali sieno due, e però

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2\pm 2fx+f^2)(x^2\mp 2fx+g)$$

$$=x^4+(g-3f^2)x^2\pm 2(fg-f^3)x+gf^2\ \ ...\ (B).$$

Ne deriva $gf^2=r$, $\pm 2(fg-f^3)=q$, $g-3f^2=p$, dove i segni inferiori hanno luogo quando le risolventi eguali sono positive. Dalla 1.ª $f^2=\frac{r}{g}$: la 3.ª diviene $g^2-pg=3r$ e dà $g=\frac{p\pm\sqrt{12r+p^2}}{2}$, valore razionale, perchè razionali debbon essere f, g, onde tale sia l'equazione (B) e però la proposta. Trovato g si deduce $f=\sqrt{\frac{r}{g}}$, e se i valori di f, g, verificano l'equazione $\pm 2(fg-f^3)=q$, la proposta ha due risolventi eguali, il di cui valore è f. Le altre si ricavano da $x^2\mp 2fx+g=0$.

Tre sono pertanto i criterj che decidono dell' esistenza di due risolventi eguali: 1.° che $12r+p^2$ sia un quadrato; 2.° che tale sia $\frac{r}{g}$ ed inoltre un numero intiero; 3.° che i valori di g, f, cioè $\frac{p\pm\sqrt{(12r+p^2)}}{2}$, $\sqrt{\frac{2r}{p\pm\sqrt{(12r+p^2)}}}$ verifichino l' equazione $\pm 2(fg-f^3)=q$.

Moltiplicando per f l'equazione $g-3f^2=p$ si deduce $f^3=\frac{f}{3}(g-p)$. Pongasi questa espressione in $-2f^3+2fg=q$, dove si prendono per maggior comodo i segni superiori, e si avrà $f=\frac{3q}{2(p+2g)}$. Dunque *due risolventi di un' equazione di 4.° grado non posson essere uguali senza che sieno razionali*.

Sia $x^4-41x^2+72x+112=0$. Avendo riconosciuto che si ha $12r+p^2=1344+1681=3025=55^2$, deduco $g=-\frac{41}{2}\pm\frac{55}{2}=7$, $f=\sqrt{\frac{112}{7}}=4$, e siccome questi valori sostituiti in $\pm 2(fg-f^3)=q$ danno $\pm 8(7-16)=72$, equazione identica se si prende il segno inferiore, concludo che la proposta ha le due risolventi $x=4$, $x=4$. Le altre due sono comprese in $x^2+8x+7=0$.

Se nella proposta mancasse anche il 3.° termine, il metodo sarebbe anche più spedito. Abbiasi $x^4+4x+3=0$. Siccome $12\times 3+0^2=6^2$ deduco $g=\pm\frac{\sqrt{36}}{2}=\pm 3$, $f=\pm\sqrt{\frac{r}{g}}=\pm 1$, e l'equazione $\pm 2(3-1)=4$ resta verificata con prendere il segno superiore. Dunque $x=-1$, $x=-1$ e poi $x^2+2x+3=0$.

Questo metodo, è come ognun vede, molto più semplice di quello che dipende dalla ricerca del massimo comune divisore, perchè la non esistenza delle risolventi eguali viene spesso indicata dalla mancanza del primo criterio, quasi sempre dalla mancanza de' primi due, e sì l'uno che l'altro con somma facilità si sperimentano.

§. 10. Prima di accingerci alla ricerca delle risolventi razionali diseguali, crediamo a proposito di stabilire le due seguenti proposizioni.

I. Che il metodo generale relativo alla soluzione di un' equazione di 4.° grado, non è atto a somministrare il valore delle risolventi razionali, che nei casi in cui queste sieno due o quattro.

II. Che la soluzione ricavata dal metodo generale è difettosa in tutti quei casi, in cui niuna risolvente della ridotta è un numero quadrato.

Per concepire la verità della prima proposizione, basta osservare che ciascuno de' fattori quadratici componenti la proposta, non può dare che due risolventi razionali, o due risolventi irrazionali. Se la proposta contenga una sola risolvente razionale, non si può dunque averne il valore mediante il metodo generale. È chiaro poi che le risolventi razionali non possono esser tre, altrimenti la proposta sarebbe sotto una forma irrazionale, contro l'ipotesi.

Passando alla seconda proposizione convien riflettere, che quando nessuna risolvente della ridotta è un numero quadrato, i coefficienti de' fattori quadratici sono numeri decimali indefiniti. Eccettuato il caso rarissimo che questi sieno tutti periodici, l'inesattezza de' coefficienti debbe influire nel valore dell' incognita x, valore che risulta anche più inesatto, quando il valore di s non possa ottenersi esattamente.

§. 11. Essendoci assicurati che la proposta equazione di 4.° grado non abbia risolventi eguali, suppongasi che ne abbia una di razionali, e si faccia

$$x^4+px^2+qx+r=(x^3\pm fx^2+gx+h)(x\mp f)=$$
$$x^4+(g-f^2)x^2+(h\mp fg)x\mp fh=0.$$

Dal confronto de' termini simili si ritrae

$$g-f^2=p,\ h\mp fg=q,\ \mp fh=r.$$

Dalla 1.ª $g=p+f^2$. La 2.ª diviene $h\mp pf\mp f^3-q=0$, ossia $f^3+pf\pm(q-h)=0$ . . . (C) dove il segno superiore si riferisce alla risolvente positiva $x=f$: l'inferiore alla negativa $x=-f$. Si divida r in due fattori e si pongano in (C), uno per f, l'altro per h. S'ella resta verificata, il valore di f è una risolvente razionale della proposta; e se niuna coppia di divisori reciproci di r, presi co' segni + e —, la verifica, non esiste alcuna risolvente razionale. Trovato f ed h si ha $g=p+f^2$, e però si conosce anche il fattore di 3.° grado.

Sia $x^4-2x^2+16x-15=0$. Abbiamo $f^3-2f\pm(16-h)=0$, e i divisori reciproci di 15 sono 3, 5; 1, 15. Pongo $f=3$, $h=-5$; $f=-3$, $h=5$ ed ho
$27-2\times3\pm(16+5)=0$, $-27+2\times3\pm(16-15)=0$. Siccome nella prima si debbon prendere i segni inferiori, e questi danno $0=0$, inferisco $x=-3$. La seconda, perchè si debbon prendere i segni superiori non resta soddisfatta.

Pongo quindi $f=-1$, $h=15$; $f=1$, $h=-15$, e trovo che l'equazione (C) mediante la prima sostituzione diventa $-1+2-(16-15)=0$. Dunque $x=1$. Le altre due risolventi si hanno con dividere la proposta per $(x+3)(x-1)$.

Sia $x^4-3x^2-42x-40=0$. I divisori reciproci di 40 sono 1, 40; 2, 20; 4, 10; 5, 8. Posto $f=1$ suppongo $x+f=0$ e però $h=-40$. Preso il segno inferiore, perchè la risolvente ipotetica è negativa, l'equazione (C) diviene

$$1-3-(-42+40)=-3+3=0.$$

Dunque $x=-1$.

Abbiasi $x^4-25x^2+60x-36=0$. Essendo $36=1\times36=2\times18=3\times12=4\times9=6\times6$, pongo $f=1$ ed $x-1=0$. Preso il segno inferiore perchè r è negativo ed f si suppone positivo, l'equazione (C) diviene

$$1-25+(60-36)=-24+24=0$$

e però si ha $x=1$. Facendo $f=2$ ed $x-2=0$, l'equazione (C) si cangia in $8-50+(60-18)=-42+42=0$. Dunque $x=2$. Divisa la proposta per $(x-1)(x-2)$ si trova $x^2+3x-18=0$, cioè $x=3$, $=-6$.

Per

Per far uso del metodo generale sarebbe stato necessario calcolare la ridotta $s^3 - 50s^2 + 769s - 3600 = 0$: cercare i divisori quadrati di 3600, e sperimentare qual di essi la verifica. La seconda di queste operazioni è laboriosa, e molto più lo è la terza, qualora non si ottenga presto l'intento, come fortunatamente succede nel caso attuale in cui $s = 9$.

§. 12. Gli esempj addotti erano diretti a dimostrare, che il metodo da noi proposto è per ordinario assai comodo e vantaggioso. I due esempj che seguono serviranno a dare una riprova della proposizione I del §. 10, ed a stabilire per conseguenza il pregio maggiore del metodo di cui si tratta.

Sia proposta l'equazione $x^4 - 86x^2 + 600x - 1280 = 0$. Esclusi i divisori 1, 2, che sono manifestamente troppo piccoli, pongo $f = 4$ e però $h = 320$, e trovo che l'equazione (C) si cangia in $64 - 4 \times 86 + 600 - 320 = 0$, cioè in $64 + 280 - 344 = 344 - 344 = 0$. Dunque $x = 4$.

Divisa la proposta per $x-4$ si ottiene $x^3+4x^2+70x+320=0$, per cui è molto incomodo il metodo de' divisori. Inerendo al metodo del §. 2, dopo aver osservato che qualunque sua risolvente reale dev'esser negativa, e che per g non può assumersi alcun numero negativo, veggo che è necessariamente $f < 10$, perchè $32 - 4 < 10^2$. Escluso il divisore -1 che è troppo piccolo, pongo dunque $f = -2, -4, -8$, e siccome la caratteristica $g - 4 = f^2$ non resta mai verificata, concludo che la proposta non ha verun' altra risolvente razionale.

Vediamo adesso qual risultato si avrebbe, applicando alla proposta il metodo generale.

La prima operazione che si presenta, ha per oggetto la formazione de' coefficienti $2p, p^2-4r, q^2$, onde aver la ridotta

$$s^3 - 172s^2 + 125165 - 360000 = 0.$$

Convien quindi cercare i divisori quadrati dell'ultimo termine, che sono

1, 4, 9, 16, 25, 36, 100, 144, 225, 324, 400, 900, 1600, 2500, 3600, 10000, 14400.

La verificazione de' divisori ottenuti, o mediante la sostituzione di ciascuno in luogo di s, o per mezzo del metodo de' divisori, costituisce una terza operazione molto più laboriosa delle altre, da cui risulta che niuno degli addotti divisori è atto a verificare la ridotta, raccogliendosi unicamente che una sua risolvente reale cade fra 36 e 100. Dunque bisogna togliere il 2.° termine con fare $s = t + \frac{172}{3}$, e siccome 172 non è divisibile per 3, è d' uopo liberare la trasformata dalle frazioni. Ciò posto convien dedurre il valore di t, e quindi quello di s: ma perchè il valore di s non è un quadrato, tutti i coefficienti dei due fattori quadratici della proposta provengono espressi per numeri decimali indefiniti. Dunque il valore d' x si trova doppiamente o triplicatamente inesatto, secondo che il valore di t sia razionale o irrazionale.

Infatti, l' inesattezza di t influisce in quella di s, questa in quella di f, g, g'. Questi coefficienti sono dunque doppiamente inesatti, e perchè espressi per numeri indefiniti, e perchè ricavati da valori inesatti. Un terzo fonte d' inesattezza, che immediatamente influisce nel valore d' x, deriva dalla soluzione dell' equazioni somministrate dai fattori quadratici. È dunque impossibile avere per mezzo del metodo generale il valore esatto della risolvente razionale della proposta, e neppure se ne può avere un valore assai prossimo al vero. Tal è il risultato di un calcolo estremamente lungo, complicato e laborioso.

Per vedere con un esempio semplicissimo la verità enunciata nella Proposizione I del §. 10 abbiasi l' equazione $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 13x - 4 = 0$, che ha la sola risolvente razionale $x = 4$. Tolto il 2.° termine si ottiene $z^4 - 9z^2 - z + 3 = 0$, e quindi la ridotta $s^3 - 18s^2 + 69s - 1 = 0$. Ma questa non è soddisfatta da $s = \pm 1$, e non ha nessuna risolvente razionale. Dunque non può condurre al richiesto valore razionale di $z = 3$, $x = 4$.

Prima d'intraprendere la ricerca delle risolventi razionali di un'equazione di 4.° grado, conviene assicurarsi ch' ella non abbia tutte le risolventi immaginarie: il che speditamente si ottiene per mezzo de' seguenti criterj, dalla di cui simultanea sussistenza dipende l'immaginarietà di tutte le risolventi.

1.° $\frac{7}{3}p^2 - \frac{8}{3}p^3 - 4r < 0$;

2.° $-\frac{1}{27}\left\{\frac{7}{3}p^2 - \frac{8}{3}p^3 - 4r\right\}^3 > \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{27}p^3 + \frac{8}{3}pr - q^2\right\}^2$;

3.° $p^2 - 4r$ del segno stesso di p.

§. 13. Dovendosi risolvere un'equazione di 5.° grado $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, si tenti s' ella abbia una risolvente razionale, e facciasi

$$= (x^4 \pm Fx^3 + Gx^2 + Hx + I)(x \mp F) = x^5 + (G - F^2)x^3 + (H \mp FG)x^2 + (I \mp FH)x \mp FI = 0.$$

Il paragone somministra

$$G - F^2 = p,\ H \mp FG = q,\ I \mp FH = r,\ \mp FI = s.$$

Dalla 3.ª $H = \frac{I - r}{\pm F} \ldots$ (D). Dalla 1.ª $G = p + F^2$, e la 2.ª diviene $F^3 + pF \pm (q - H) = 0 \ldots$ (C), e coincide coll'equazione (C) del §. 11. L'equazioni (C), (D) decidono dell' esistenza di una risolvente razionale F. La seconda dee dare per h un valore intiero; la prima un risultato identicamente $= 0$.

Sia $x^5 - x^3 - 2x^2 - 3x - 10 = 0$. Pongo $F = 2$, $I = 5$. L' equazione (D) somministra $H = \frac{5 + 3}{2} = 4$, e l'equazione (C), prendendo il segno superiore diviene $8 - 2 - 4 - 2 = 0$. Dunque $x = 2$.

Il tentativo è sempre molto semplice, perchè tal è l'equazione (C); è sempre molto limitato, perchè i divisori reciproci di s, i quali danno per $\frac{I - r}{\pm F}$ un numero fratto, restano subito esclusi.

§. 14. Avendo scoperto che la proposta non abbia alcuna risolvente razionale, può cercarsi s'ella sia risolubile in due fattori razionali, l'uno di 2.°, l'altro di 3.° grado.

Pongasi

$x^5+px^3+qx^2+rx+s=(x^3\pm Fx^2+Gx+H)(x^2\mp Fx+I)=0$. Risulta $G-F^2+I=p$, $H\pm F(I-G)=q$, $GI\mp FH=r$, $IH=s$. Dalla 1.ª $G=p+F^2-I$. La 2.ª diviene $F^3+(p+2I)F\pm(q-H)=0$ . . . (1) e la 3.ª $I(p+F^2-I)=r\pm FH$ . . . (2).

Se il valore assunto per H, I è giusto, l'equazione (2) dee dare per F un valore razionale ed intiero, e questo dee verificare l'equazione (1). Si vedrà però facilmente, che siccome la massima potenza di F nell'equazione (1) è libera dal coefficiente, ed il metodo del §. 2 le si applica con molta prontezza, meglio è cercare la risolvente razionale dell'equazione (1) e verificar poscia l'equazione (2). Sia $x^5-25x^3+23x^2+58x+20=0$. Facendo $H=5$, $I=4$ l'equazione (1) diviene $F^3-33F\pm18=0$, e preso il segno superiore si trova (§. 2) che la caratteristica $g+33=f^2$ resta verificata con fare $g=3$, $f=-6$. Mediante la sostituzione di H, I, F nell'equazione (2) si ottiene $(-25+36-4)4=58-30$, cioè $7\times4=28$. Dunque $H=5$, $I=4$, $F=-6$, $G(=p+f^2-i)=7$, ed i fattori cercati sono x^3-6x^2+7x+5, x^2+6x+4.

Se s sia un numero primo, o se le condizioni (1), (2) non possono verificarsi, la proposta non è risolubile in due fattori razionali, e convien ricorrere al metodo delle sostituzioni successive.

Articolo IV.

Si vuol dimostrare, che inoltrando quanto basta la serie de' numeri positivi decrescenti A, B, C, D. ec. ottenuti col metodo del Sig. Lagrange, *relativo alla soluzione in numeri razionali di un' equazione quadratica indeterminata, si giunge sempre ad un numero eguale all' unità.*

La proposizione enunciata nel titolo dell' Articolo attuale, essendo una base del metodo del Sig. *Lagrange*, e non trovando noi adequata la ragione su cui suole stabilirsi, ci proponiamo di darne una rigorosa dimostrazione: ed affinchè niuno debba cercare altrove la teoria che serve all' intelligenza del nostro calcolo, riassumiamo qui l' insigne metodo del Geometra Torinese, modificandone in una guisa forse non disacconcia, i dettagli e le simboliche indicazioni.

Assunta l' equazione generale

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

se ne deduca $2ax+by+d=\surd[(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)]$, espressione, che facendo $b^2-4ac=\mathrm{B}$, $bd-2ae=g$, $d^2-4af=h$ si cangia in $2ax+by+d=\surd[\mathrm{B}y^2+2gy+h]$.

Siccome per x, y si vogliono de' numeri razionali, la funzione $\mathrm{B}y^2+2gy+h$ dev' essere un quadrato. Sia t^2 questo quadrato, e moltiplicando per B l'equazione $\mathrm{B}y^2+2gy+h=t^2$, si avrà $\mathrm{B}y+g=\surd[\mathrm{B}t^2+g^2-\mathrm{B}h]$. Pongasi $g^2-\mathrm{B}h=\mathrm{A}$, $\surd[\mathrm{B}t^2+\mathrm{A}]=u$, e non si tratterà che di risolvere l' equazione $\mathrm{B}t^2+\mathrm{A}=u^2$. Trovate tutte le soluzioni di questa in numeri razionali, si hanno tutti i valori d' x, y per mezzo dell' equazioni

$$x=\frac{t-by-d}{2a},\quad y=\frac{u-g}{\mathrm{B}},$$

dove le indeterminate t, u posson prendersi con quel segno che si vuole.

Avendo ridotti i numeri t, u al medesimo denominatore, pongasi $u = \frac{\phi}{\omega}$, $t = \frac{\psi}{\omega}$, onde l' equazione da risolversi sia $\phi^2 - B\psi^2 = A\omega^2$, dove ϕ, ψ, ω debbon esser numeri intieri. Noi diciamo:

1.° Che i numeri ϕ, ψ, ω, si possono supporre tali, che non abbiano alcun divisore comune; perchè se questi avesse luogo, si toglierebbe con la divisione.

2.° Che i coefficienti A, B si possono supporre liberi da ogni fattore quadrato. Infatti, se $A = A'k^2$, $B = B'l^2$, basta fare $k\psi = \psi$, $l\omega = \omega'$, e la proposta diviene $\phi^2 - B'\psi'^2 = A'\omega'^2$, in cui A', B' hanno la proprietà divisata.

Dalle due proposizioni precedenti ne segue, che due qualunque de' numeri ϕ, ψ, ω possono riguardarsi come primi fra di loro, e la ragione si è, che se ϕ^2, ψ^2 contenessero il fattore θ^2, $A\omega^2$ dovrebbe esser divisibile per θ^2; cosa impossibile, perchè non è tale nè ω^2 nè A: non ω^2 per essere ϕ, ψ, ω numeri primi fra loro: non A perchè A non contiene alcun fattore quadrato. Nella stessa maniera si prova che ϕ, ω; ψ, ω non sono divisibili per θ^2.

Restano due osservazioni e sono 1.° che A, ψ debbon essere numeri primi fra loro, perchè se A, ψ^2 avessero un comune divisore θ, anche ϕ^2 dovrebb' esser divisibile per θ, e ϕ, ψ non sarebbero più numeri primi fra di loro.

2.° Che i numeri A, B sempre si possono supporre positivi. Infatti se si combinano i segni di A e di B in tutte le maniere possibili, si ottengono le seguenti formole:

$$\phi^2 - B\psi^2 = + A\omega^2,\quad \phi^2 - B\psi^2 = - A\omega^2,$$
$$\phi^2 + B\psi^2 = + A\omega^2,\quad \phi + B\psi = - A\omega^2,$$

l' ultima delle quali è assurda, la terza coincide colla seconda, e si rende simile alla prima con moltiplicarla per A, e con fare $A\omega = \omega'$, $AB = B'$, poichè risulta $\omega'^2 - B'\psi'^2 = A\phi'^2$.

Premesse queste nozioni preliminari eccoci alla soluzione.

Sia nel 2.° membro il termine affetto dal coefficiente maggiore, e nell' ipotesi di $A > B$ abbiasi $\phi^2 - B\psi^2 = A\omega^2$. Se la proposta è solubile, nel qual caso esiste almeno un determinato valore di φ e di ψ, per esempio $\varphi = m$, $\psi = n$, si può sempre (Teoria dell'equazioni indeterm. di 1.° gr.) soddisfare all'equazione $m = \alpha n - A\psi'$, dove m, n, A son numeri dati primi fra loro, perchè primi sono φ, ψ ed A, ψ; e dove α, ψ' sono due indeterminate. Senza conoscere i valori m, n, si può dunque supporre $\varphi = \alpha\psi - A\psi'$. Così la proposta diviene

$$\left(\frac{\alpha^2 - B}{A}\right)\psi - 2\alpha\psi\psi' + A\psi'^2 = \omega^2$$

ed $\alpha^2 - B$ dev'essere divisibile per A, poichè A, ψ sono primi fra di loro. Sia $\frac{\alpha^2 - B}{A} = A'k^2$, essendo k^2 il massimo quadrato che può dividere il numero $\frac{\alpha^2 - B}{A}$, e l'equazione da sciogliersi sarà

$$A'k^2\psi^2 - 2\alpha\psi\psi' + A\psi'^2 = \omega^2 \;\ldots\ldots (\alpha)$$

dove A' non contiene alcun fattore quadrato.

Qualunque sia il valore di α che rende $\alpha^2 - B$ divisibile per A, è certo che assumendo un numero qualunque μ, deesi avere anche $(\mu A \pm \alpha)^2 - B$ divisibile per A. Ma nell'espressione $\mu A \pm \alpha$ si può prendere il segno di α ed il valore di μ tale, che $\mu A \pm \alpha$ cada fra i limiti $\frac{A}{2}$, $-\frac{A}{2}$. Dunque se vi è un valore di α che renda $\alpha^2 - B$ divisibile per A, debb'esservi un valore di α compreso fra i limiti $\frac{A}{2}$, $-\frac{A}{2}$, ovvero $= \pm\frac{A}{2}$, che soddisfi alla medesima condizione; altrimenti la proposta non è solubile in numeri razionali.

Si moltiplichi l'equazione (α) per $A'k^2$, e facendo

$$\{\, A'k^2\psi - \alpha\psi' = \varphi',\ k\omega = \omega' \,\} \;\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

si avrà $\varphi'^2 - B\psi'^2 = A'\omega'^2$. Risoluta questa si ha φ, ψ, ω per mezzo delle ausiliari (I) e della proposta $\varphi^2 - B\psi^2 = A\omega^2$. Osservisi che avendo preso $\alpha < \frac{A}{2}$, il numero $\frac{\alpha^2 - B}{Ak^2}$ cioè A', risulta positivo e $< \frac{A}{4}$: positivo, perchè se fosse $\alpha^2 < B$, per una più forte ragione sarebbe $\alpha^2 - B < B$, e però $\alpha^2 - B$ non sarebbe divisibile per A che è $> B$, cioè $\frac{\alpha^2 - B}{A}$ non sarebbe divisibile per A che è $> B$, cioè $\frac{\alpha^2 - B}{A}$ non sarebbe un numero intiero qual dev'essere: è $A' < \frac{A}{4}$, perchè nell' ipotesi la più svantaggiosa, che sia cioè $\alpha = \frac{1}{2} A$, $B = 0$, $k = 1$, si ha $\frac{\alpha^2 - B}{Ak^2} = \frac{1}{4} A$. Si può dunque concludere, che in virtù del calcolo precedente, la soluzione della proposta dipende da quella di una trasformata del tutto simile, nella quale il coefficiente A', che tien luogo di A, è $< \frac{A}{4}$.

Posto che sia $A' > B$, dalla $\varphi'^2 - B\psi'^2 = A'\omega'^2$ deducasi collo stesso metodo una 2.ª trasformata $\varphi''^2 - B\psi''^2 = A''\omega''^2$, e si avrà $A'' < \frac{A'}{4}$ e però $< \frac{A}{16}$, essendo A'' un numero positivo che non contenga verun fattore quadrato. Infatti, per giungere alla 2.ª trasformata convien trovare un numero α' tale, che $\frac{\alpha'^2 - B}{A'}$ sia un numero intiero $A''k'^2$; ma siccome si è ottenuto $\frac{\alpha^2 - B}{A'} = Ak^2$, la 2.ª condizione $\frac{\alpha'^2 - B}{A'} =$ n.° int.° resta compresa nella 1.ª $\frac{\alpha^2 - B}{A'} =$ n.° int.°. Ora se vi è un valore di α che renda $\alpha^2 - B$ divisibile per A', debb'esser tale anche il numero $\alpha' = \mu' A' \pm \alpha$. Dunque se si prendono il segno di α ed il valore di μ' tali, che α' cada fra i limiti $\frac{A'}{2}$, $-\frac{A'}{2}$, o sia $= \pm \frac{A'}{2}$, il numero $\frac{\alpha'^2 - B}{A'k'^2}$ $(= A'')$ dee risultare intiero, positivo e $< \frac{A'}{4}$; numero che si può supporre

libero

libero da ogni fattore quadrato, per esser compresi in k'^2 tutti i fattori quadrati di $\frac{a'^2-B}{A'}$.

Se $A''>B$ deducasi una 3.ª trasformata $\varphi'''^2-B\psi'''^2=A'''\omega'''^2$, in cui $A'''<\frac{A''}{4}$ e così ec. Si ottiene in questa guisa il seguente sistema di trasformate secondarie

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi'^2-B\psi'^2=A'\omega'^2\,,\\
\varphi''^2-B\psi''^2=A''\omega''^2\,,\\
\varphi'''^2-B\psi'''^2=A'''\omega'''^2\,,\\
\dots\dots\dots\\
\varphi^{(n)2}-B\psi^{(n)2}=A^{(n)}\omega^{(n)2}
\end{array}\right\}\;\dots\dots\;(a)$$

nell'ultima delle quali dee necessariamente aversi $A^{(n)}<B$. Posto $A^{(n)}=C$ si trasponga nel 2.° membro il termine affetto dal coefficiente maggiore, e facendo $\varphi^{(n)}=\varphi_1$, $\psi^{(n)}=\psi_1$, $\omega^{(n)}=\omega_1$, si tratterà di risolvere $\varphi_1^2-C\omega_1^2=B\psi_1^2$, per lo che giova procedere alla diminuzione di B per mezzo di un secondo sistema di trasformate secondarie

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi_1'^2-C\omega_1'^2=B'\psi_1'^2\,,\\
\varphi_1''^2-C\omega_1''^2=B''\psi_1''^2\,,\\
\varphi_1'''^2-C\omega_1'''^2=B'''\psi_1'''^2\,,\\
\dots\dots\dots\\
\varphi_1^{(m)2}-C\omega_1^{(m)2}=B^{(m)}\psi_1^{(m)2}
\end{array}\right\}\;\dots\dots\;(b)$$

dove $B'<\frac{B}{4}$, $B''<\frac{B'}{4}$ ec., finchè giungasi ad una trasformata in cui si abbia $B^{(m)}\,(=D)<C$.

Sia nel 2.° membro il termine affetto dal coefficiente maggiore, e fatto $\varphi_1^{(m)}=\varphi_2$, $\psi_1^{(m)}=\psi_2$, $\omega_1^{(m)}=\omega_2$, il problema sarà ridotto alla soluzione di $\varphi_2^2-D\psi_2^2=C\omega_2^2$.

Proseguendo si forma la serie A, B, C, D ec. composta di numeri intieri positivi decrescenti, e la corrispondente serie di trasformate primarie:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi^2 - B\psi^2 = A\omega^2,\\ \varphi_1{}^2 - C\omega_1{}^2 = B\psi_1{}^2,\\ \varphi_2{}^2 - D\psi_2{}^2 = C\omega_2{}^2,\\ \varphi_3{}^2 - E\omega_3{}^2 = D\psi_3{}^2,\\ \ldots\ldots\ldots\\ \varphi^2{}_{(r)} - U\omega^2{}_{(r)} = T\psi^2{}_{(r)} \text{ ovvero}\\ \varphi^2{}_{(r)} - U\psi^2{}_{(r)} = T\omega^2{}_{(r)}\end{array}\right\} \;\ldots\ldots\; (A).$$

dalla 1.ª delle quali si passa alla 2.ª per mezzo de' rapporti

$$\alpha^2 - B = AA'k^2,\ \alpha \text{ ossia } \mu A \pm \alpha < \frac{A}{2},$$

$$\alpha'^2 - B = A'A''k'^2,\ \alpha' \text{ ossia } \mu' A' \pm \alpha < \frac{A'}{2},$$

$$\alpha'' - B = A''A'''k''^2,\ \alpha'' \text{ ossia } \mu'' A'' \pm \alpha' < \frac{A''}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha^{(n-1)2} - B = A^{(n-1)}A^{(n)}k^{(n-1)2},\ \alpha^{(n-1)} \text{ ossia } \mu^{(n-1)}A^{(n-1)} \pm \alpha^{(n-2)} < \frac{A^{(n-1)}}{2}$$

$$A' < \frac{A}{4},\ A'' < \frac{A'}{4},\ A''' < \frac{A''}{4} \ldots\ldots A^{(n)} < \frac{A^{(n-1)}}{4},$$

Dalla 2.ª si passa alla 3.ª per mezzo di questi altri rapporti

$$\beta^2 - C = BB'l^2,\ \beta \text{ ossia } \gamma B \pm \beta < \frac{B}{2},$$

$$\beta'^2 - C = B'B''l'^2,\ \beta' \text{ ossia } \gamma' B' \pm \beta < \frac{B'}{2},$$

$$\beta'' - C = B''B'''l''^2,\ \beta'' \text{ ossia } \gamma'' B'' \pm \beta' < \frac{B''}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta^{(n-1)2} - C = B^{(n-1)}B^{(n)}l^{(n-1)2},\ \beta^{(n-1)} \text{ ossia } \gamma^{(n-1)}B^{(n-1)} \pm \beta^{(n-2)} < \frac{B^{(n-1)}}{2}$$

$$B' < \frac{B}{4},\ B'' < \frac{B'}{4},\ B''' < \frac{B''}{4} \ldots\ldots B^{(n)} < \frac{B^{(n-1)}}{4},$$

e così in seguito.

Il 1.° quoziente $A'k^2 \left(= \frac{\alpha^2 - B}{A}\right)$, estraendone il massimo quadrato, dà il valore di A'; e dall'equazione $\alpha' = \mu' A' \pm \alpha$

si deduce α', il valore arbitrario di μ' dovendo cadere fra i limiti $\frac{A'}{2}, -\frac{A'}{2}$. Il 2.° quoziente $A''k'^2 \left(= \frac{\alpha'^2 - B}{A'}\right)$, estraendone il massimo quadrato, dà il valore di A'', e quello di α'' si ha dall'equazione $\alpha'' = \mu''A'' \pm \alpha'$, il valore arbitrario di μ'' dovendo cadere fra i limiti $\frac{A''}{2}, -\frac{A''}{2}$, e così in seguito.

Dicasi lo stesso relativamente ai rapporti (b). Siccome le trasformate secondarie (a), (b) ec. sono talmente legate fra loro e colle primarie (A), che prese insieme formano un solo ed unico sistema, qualora sappiasi sciogliere una delle (A), si può risalire alla soluzione delle precedenti sino alla proposta, come dalla 2.ª delle (A) si risalì alla 1.ª.

Per mostrare che il metodo esposto effettivamente conduce alla soluzione del problema, quando questi è possibile, basta dunque provare che fra le (A) ve n'è sempre una, che ammette una sicura e facile risoluzione. A tal effetto noi passiamo a dimostrare 1.° che prolungando quanto bisogna la serie delle (A) si giunge ad un'equazione $\varphi^2_{(p)} - R\omega^2_{(p)} = Q\psi^2_{(p)}$ dove $R = 1$; 2.° che l'equazione $\varphi^2_{(p)} - \omega^2_{(p)} = Q\psi^2_{(p)}$ ammette una sicura e facile soluzione.

Cominciando dalla 2.ª proposizione, suppongasi che la trasformata di cui si tratta sia sotto la forma $\pi^2 - \zeta^2 = M\sigma^2$. Si sciolga M in due fattori m', m'', che saranno primi fra loro perchè M non contiene alcun fattore quadrato, e si sciolga σ ne' fattori s', s'', onde si abbia $M = m'm''$, $\sigma = s's''$. Risulta $(\pi + \zeta)(\pi - \zeta) = m'm''s'^2s''^2$; equazione a cui si soddisfa generalmente con fare $\pi + \zeta = m's'^2$, $\pi - \zeta = m''s''^2$. Quindi $\pi = \frac{m's'^2 + m''s''^2}{2}$, $\zeta = \frac{ms'^2 - m''s''^2}{2}$, $\sigma = s's''$; formole che danno π, ζ, σ per mezzo de' numeri cogniti m', m'' e delle arbitrarie s', s''; ed è chiaro che il numero delle soluzioni in questa guisa ottenute, eguaglia quello delle maniere con le quali il coefficiente M si può decomporre in due fattori.

Passando alla proposizione 1.ª (*) suppongasi di esser giunti all'equazione (I) $\varphi^2_{(p)} - R\omega^2_{(p)} = Q\psi^2_{(p)}$ dove sia $R = o < 7$, $Q > R$ e tale, che procedendo alla diminuzione di Q mediante la formola $\frac{\varepsilon^2 - R}{Q\lambda^2} = Q'$ si trovi $Q' < R$. Noi diciamo che se la proposta è solubile, la prima o la seconda trasformata dedotta dall'equazione (I) dev'essere della forma $\pi^2 - \zeta^2 = M\sigma^2$.

La supposizione che sia $R = o < 7$ e $Q' < R$ non porta eccezione alcuna alla dimostrazione, perchè l'ipotesi di $R > 7$ si riduce a quella da noi assunta, con diminuire i coefficienti Q, R uno dopo l'altro, finchè il più piccolo divenga $= o < 7$, e l'altro sia qual noi supponiamo il coefficiente Q. Infatti se $Q = 8, 9, 10, 11, 12$, affinchè la formola $\frac{\varepsilon^2 - R}{Q\lambda^2}$, dove $\varepsilon < \frac{R}{2}$, dia un numero intiero, deesi respettivamente avere $R = 1, 7, 6, 5, 4$.

Se $Q < 12$ ed $R = o < 7$, affinchè la proposta sia risolubile, dee potersi dedurre $\frac{\varepsilon^2 - R}{Q\lambda^2} = Q'$, dove sia $Q' < \frac{Q}{4}$; poi $\frac{Z^2 - R}{Q'\lambda'^2} = Q''$, dove $Q'' < \frac{Q'}{4}$ e così ec. fino a $Q^{(n-1)}$, essendo $Q^{(n-1)}$ tale, che $Q^{(n)}$ risulti $< R$.

Se finalmente sia $Q > 12$ ed $R > 7$, s' inoltri la serie

(*) Il Sig. *Legendre* (*Théor. des Nomb.* §. 20) rende ragione di questa proposizione dicendo = *La suite des nombres positifs et décroissants* A, B, C, D ec. *ne sauroit aller à l'infini: elle se terminera necessairement par l'unité*; ed il Sig. *Paoli* (*Elem. d'Alg. T. I, p.* 169) si esprime così: *Siccome i numeri* A, B, C, D ec. *formano una serie decrescente di numeri intieri, questa non potrà andare all' infinito, ma sarà sicuramente limitata. Onde se il problema non ammette soluzione in numeri razionali, giungeremo ad una condizione impossibile a soddisfarsi: ma se il problema è risolubile, arriveremo ad un' equazione, in cui uno de' coefficienti sarà un quadrato, e risoluta questa potremo rimontare retrocedendo sino alla prima.* Noi però non restiamo persuasi di un simile ragionamento, perchè in astratto non vediamo impossibile che la serie A, B, C, D ec. sia composta di numeri non quadrati, e termini con uno de' numeri 3, 2; ipotesi nelle quali la serie non dà luogo al conseguimento di un numero = 1.

Q', Q'', Q''' ec. $Q^{(n')}$ finchè sia $Q^{(n')} = 0 < 7$, e se R non sia tale che R' risulti $< Q^{(n)}$, si deduca R', R'', R''' .... finchè giungasi al numero desiderato. Con una simile operazione deesi arrivare ad una trasformata, i due coefficienti V, W sieno tali, che il più piccolo V sia $= 0 < 7$, l'altro essendo tale che W' provenga $< V$. Ciò posto la dimostrazione è semplicissima. Noi sappiamo che se la proposta è solubile, tal è l'equazione (I), e che la formola $\frac{\varepsilon^2 - R}{Q\lambda^2}$ dee dare un intiero $Q' < \frac{Q}{4}$ e $< R$, onde ne derivi la trasformata

$$\text{(II)} \quad \varphi^2(p+1) - Q'\psi^2(p+1) = R\varpi^2(p+1).$$

Dunque $\frac{\varepsilon^2 - Q'}{R} =$ n.° int.°; e perchè $\varepsilon < \frac{R}{2}$ si ha

$$\frac{3^2 - Q'}{R} \text{ ovvero } \frac{2^2 - Q'}{R} = \text{n.° int.°}$$

La 1.ª formola dà un numero intiero in tre ipotesi distinte e sono:
1.° che sia $Q' = 2$, $R = 7$; 2.° $Q' = 3$, $R = 6$; 3.° $Q' = 4$, $R = 5$, e queste conducono tutte ad un nuovo quoziente $R' = 1$.

La 2.ª formola dà un intiero se $Q' = 1$, $R = 3$.

Dunque o si ha $Q' = 1$ e la trasformata (II) è quale si richiede: ovvero R, Q' sono tali, che la trasformata dedotta dall'equazione (II) risulta della forma

$\varphi^2(p+2) - \varpi^2(p+2) = Q'\psi^2(p+2)$, cioè della forma richiesta.

ARTICOLO V

Sull'Integrazione dell'equazioni a differenze, i di cui coefficienti sieno costanti, e l'ultimo termine della forma α^x.

§. 1. Essendo proposta l'equazione

$$y_{x+n} = By_{x+n-1} + Cy_{x+n-2} \dots + Ty_{x+1} + Uy_x + \alpha^x \dots \text{(I)}$$

si faccia $y_x = z_x + H\alpha^x$, dove z_x sia un integrale particolare della solita equazione ansiliare

$$z_{x+n}=Bz_{x+n-1}+Cz_{x+n-2}\,\ldots\,+Tz_{x+1}+Uz_x\,.$$

Siccome il valore espresso per z_x riduce l'equazione (I) all' ultimo suo termine a^x, altro non resta che verificare l'equazione

$$Ha^n-BHa^{n-1}-CHa^{n-2}\ldots-THa-UH=1$$

il che si ottiene con prendere $H=\frac{1}{a^n-Ba^{n-1}\ldots-Ta-U}$.

Sia per esempio $y_{x+3}=y_{x+2}+8y_{x+1}-12y_x+6^x$, e si cominci dal soddisfare all' equazione

$$z_{x+3}=z_{x+2}+8z_{x+1}-12z_x,\text{ con assumere } z_x=m^x.$$

Ne proviene $m^3-m^2-8m+12=0$, equazione le di cui risolventi sono $m'=2$, $m''=2$, $m'''=-3$. Posto -1 per B, ed i respettivi valori di m nella formola

$$z_x=m^x\Sigma^2\left[-\left(\frac{2m+B}{m}\right)\right]^x.A$$

da noi esposta nel *T. XI della Soc. Ital.* §. 4, per servire alla completa integrazione dell' equazioni di 3.° ordine, le quali abbiano due risolventi eguali, si ottiene

$$z_x=2^x\Sigma^2(-\tfrac{3}{2})^xA,\quad z_x=-3^x\Sigma^2(\tfrac{7}{3})^xA\,.$$

La 1.ª di queste formole equivale a

$z_x=\frac{a^2A}{(3-a)^2}\left(\frac{3}{a}\right)^x+A_1x+A_2$, e per brevità può mettersi sotto la forma $z_x=k.3^x+k_1.x2^x+k_2.2^x$.

Pongasi $y_x=k.3^x+k_1.x2^x+k_2.2^x+H6^x$, e perchè $B=+1$, $C=+8$, $D=-12$, si avrà

$$H=\frac{1}{6^3-6^2-6.8+12}=\frac{1}{144}:$$

e per essere $\frac{6^x}{144}=\frac{6^{x-2}}{4}$, si dedurrà

$$y_x=k.3^x+k_1.x.2^x+k_2.2^x+\frac{6^{x-2}}{4}\,.$$

Abbiasi $y_{x+3}=4y_{x+2}-y_{x+1}-6y_x+6^x$, la di cui equazione ausiliare $z_{x+3}=4z_{x+2}-z_{x+y}-6z_x$ somministra $m^3-4m^2+m-6=0$. Le risolventi di questa essendo $m'=-1$, $m''=2$,

Fig. 2

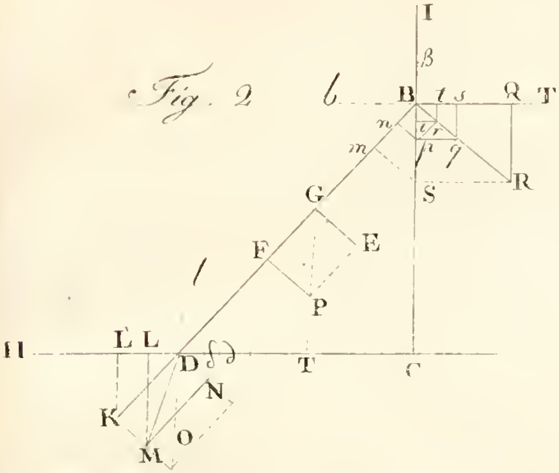

I
β
b
B
t
s
Q
T
n
m
r
p
q
R
S
G
F
E
P
l
H
L
L
D
δ
∂
T
C
K
M
N
O

Fig. 4

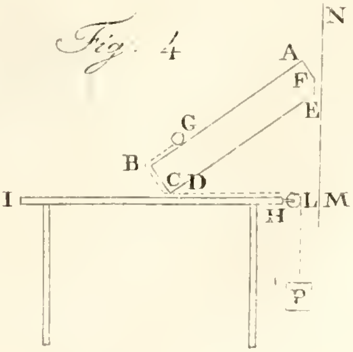

N
A
F
E
G
B
C
D
I
L
M
H
P

Fig. 6

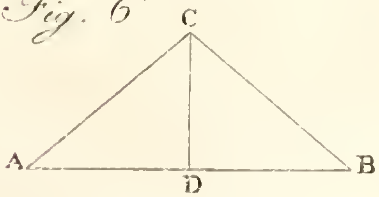


Fig. 1

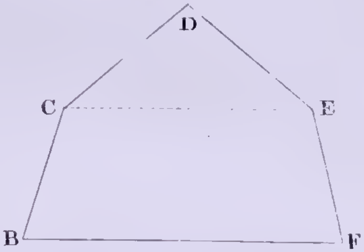


Fig. 2

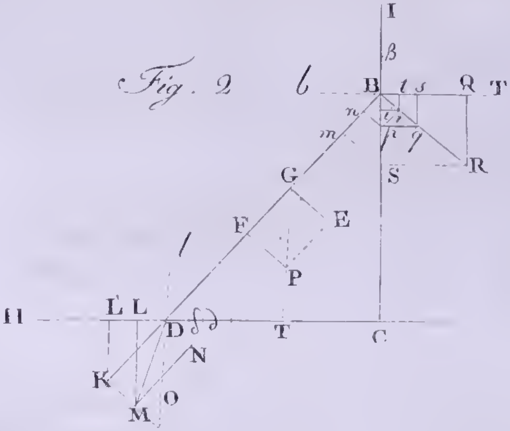

I
β
b
B
t
s
Q
T
n
m
r
p
q
R
S
G
E
F
P
l
H
L
L
D
δ
∂
T
C
K
N
M
O

Fig. 3

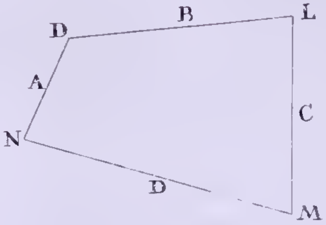


Fig. 4

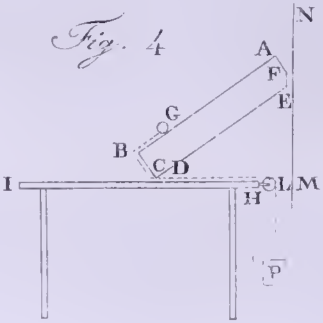

N
A
F
E
G
B
C
D
I
L
M
H
P

Fig. 5

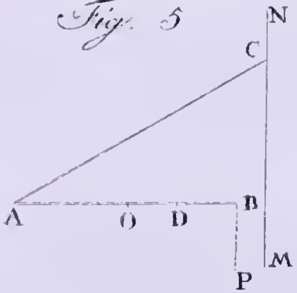
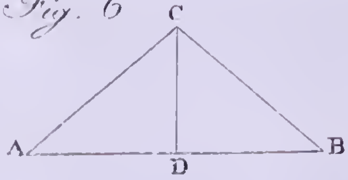


Fig. 6



$m'''=3$, si ha $z_x=k3^x+k_1 2^x \pm k_2$. Pongasi $y_x=k3^x+k_1 2^x \pm k_2 + \mathrm{H}6^x$, e fatta la sostituzione si avrà

$$6\mathrm{H}\,(6^x+6^x-4\,.\,6\,.\,6^x+6^2\,.\,6^x)=6^x\text{, cioè } \mathrm{H}=\frac{1}{84}$$

ed $\mathrm{H}6^x=\frac{6^x}{84}=\frac{6^{x-1}}{14}$: per conseguenza

$$y_x=k\,.\,3^x+k_1\,.\,2^x \pm k_2+\frac{6^{x-1}}{14}\,.$$

Sia per ultimo es. $y_{x+3}=9y_{x+2}-26y_{x+1}+24y_x+5^x$. Si ha $m^3-9m^2+26m-24=0$, $m'=2$, $m''=3$, $m'''=4$: e però $y_x=k\,.\,2^x+k_1\,.\,3^x+k_2\,.\,4^x+\mathrm{H}5^x$.

Sostituendo si trova

$$5^3\mathrm{H}=9\mathrm{H}5^2-26\mathrm{H}\,.\,5+24\mathrm{H}+1\,.$$

Dunque $\mathrm{H}=\frac{1}{5^3-9\,.\,5^2+26\,.\,5-24}=\frac{1}{125-225+130-24}=\frac{1}{6}$.

Supponghasi che i tre primi termini della serie a cui la proposta si riferisce, sieno 1, 2, 4. Siccome i respettivi valori d' x sono 0, 1, 2, ne deriva

$$\begin{aligned}1&=k+k_1+k_2+\tfrac{1}{6}\\ 2&=2k+3k_1+4k_2+\tfrac{5}{6}\\ 4&=4k+9k_1+16k_2+\tfrac{25}{6}\end{aligned}$$

e quindi $k=\frac{5}{6}$, $k_1=\frac{3}{6}$, $k_2=-\frac{3}{6}$. Dunque il termine generale della serie 1, 2, 4, 9, 30, 157 ec. è

$$y_x=\frac{5\,.\,2^x+3\,.\,3^x+3\,.\,2^x+5^x}{6}\,.$$

L'integrale completo delle tre equazioni sopra esposte erasi da altri ottenuto, ma con un metodo sommamente laborioso e prolisso.

DISQUISIZIONE SU I VARJ METODI DI ELIMINAZIONE CON IL COMPONIMENTO DI UN NUOVO

MEMORIA

Del Signor Pietro Cossali.

Ricevuta li 20 Marzo 1812.

ARTICOLO I.

Metodo di uguagliamento del Newton *e del* Bezout.

§. I

Via dal Bezout *tenuta non sicura dai fattori alteranti.*

Newton fu il primo a dare nella sua *Aritmetica universale* formole di eliminazione in simboli generali, e sino al quarto grado si estese. Sebbene poi, non recandone dimostrazione, occultato abbia il metodo, per cui ad esse giunse, credesi cionondimeno comunemente, che servito siasi del metodo di uguagliamento; anzi, due essendo le vie che in esso batter si possono, pare, ignoro su qual fondamento, all'*Eulero* di poter assegnar quella dal grande uomo tenuta. Questa, a serbar l'ordine de' tempi, dovrebbe essere nella esposizione la prima: torna però meglio cominciare dall'altra, che il *Bezout* scelse; ed è ciò tanto più permesso, quanto che del cammino del *Newton* non si ha certezza. Date le due equazioni

(I) $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$. (II) $Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0$, nelle quali A, B, C, D, P, Q, R, S comprendono quantità note, ed un'altra incognita y non più elevata che al terzo grado:

grado: in breve sono funzioni al terzo grado non superiori di y, ma tali che A non sia divisore di tutte tre insieme le B, C, D, nè P di tutte tre insieme le Q, R, S. Sottraendo dalla (I) moltiplicata per P la (II) moltiplicata per A, si ha per l'uguagliamento, ed abbattimento dei termini primi un' equazion di secondo grado: un'altra se ne cava sottraendo dalla (I) moltiplicata per $Pz+Q$ la (II) moltiplicata per $Az+B$; ed una terza se ne conseguisce sottraendo dalla (I) moltiplicata per Pz^2+Qz+R la (II) moltiplicata per Az^2+Bz+C. Ponendo per brevità $DP-AS=G$, $BP-AQ=H$, $DQ-BS=K$, $CP-AR=L$, $CQ-BR=M$, $DR-CS=N$, le tre equazioni di secondo grado sono

$$(1)\quad Hz^2+Lz+G=0$$

$$(2)\quad Lz^2+(G+M)z+K=0$$

$$(3)\quad Gz^2+Kz+N=0\,.$$

Da queste combinate a due a due, moltiplicando reciprocamente per i coefficienti di z^2, e sottraendo poscia un'equazione dall'altra si traggono le tre di primo grado, che seguono

$$(a)\quad [L^2-H(G+M)]z+GL-HK=0,$$

$$(b)\quad (GL-HK)z+G^2-HN=0,$$

$$(c)\quad [G(G+M)-KL]z+GK-LN=0,$$

dalle quali ricavasi le tre espressioni di

$$z=\frac{HK-GL}{L^2-H(G+M)}=\frac{HN-G^2}{GL-HK}=\frac{LN-GK}{G(G+M)-LK},$$

le quali ordinatamente si rappresentin per (α), (β), (γ). Combinandole a due a due si ottengono tre equazioni libere da z, e in sola y, e quantità note.

La combinazione della (α) e della (β) somministra

$$(\varphi)\ HG^3+HMG^2-HG(HN+2KL)+H^2(K^2-MN)+HL^2N=0.$$

La combinazione della (α) colla (γ) porge

$$(\psi)\ LG^3+LMG^2-LG(HN+2KL)-LH(K^2-MN)+L^3N=0.$$

La combinazione delle due (β), (γ) produce

$$(\omega)\ G^3+MG^2-G(HN+2KL)+H(K^2-MN)+L^2N=0.$$

Si vede a primo colpo d'occhio che $\varphi=H(\omega)$, e $(\psi)=L(\omega)$.

I fattori H, L sono di quelli, che dir si sogliono superflui, inutili: io li chiamerò alteranti, riserbandomi ad esaminar poi se abbiano, o no qualche utilità. Si commenda per altra parte l'esposto metodo di *Bezout* siccome esente da fattori alteranti, anzi siccome il migliore di quanti se ne siano sino ad ora escogitati. Ma se esso dona l'equazione finale (ω) al dovuto grado, esso medesimo ci offre eziandio le due alterate (φ), (ψ). E ciò, che più contraddice alla lode, si è, che la equazione immune da alteramento si è quella che proviene dalla combinazione della espressione prima di z colla terza tratta dalla equazione terza di primo grado, che comunemente non si calcola.

E chi dubiterà che il simile non sia per produr questo metodo in equazioni più alte? Che nel crescere il numero delle finali non cresca la moltitudine delle alterate? Laonde necessario si fa il conchiudere, che esso metodo non è da fattori sicuro, in quanto che non n'è per ogni lato immune.

Applichiamo ora la finale (ω) alle due equazioni
(C) $z^3 - pz + y(y^2 - p) = 0$. (D) $3yz^2 + 3y^2z - q = 0$.
Sono queste le due equazioni che dalla $x^3 - px - q = 0$, trasformata in $z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 - pz - py - q = 0$ si tirano con uno spezzamento inverso a quello detto Cardanico. Paragonandosi (C) alla (I) si ha $A = 1$, $B = 0$, $C = -p$, $D = y(y^2 - p)$.

E richiamandosi (D) alla (II) con moltiplicarla per z, si avrà paragonando $P = 3y$, $Q = 3y^2$, $R = -q$: onde si cava $G = 3y^2(y^2 - p)$, $H = -3y^2$, $K = 3y^3(y^2 - p)$, $L = q - 3py$, $M = -3py^2$, $N = -qy(y^2 - p)$: sostituiti i quali valori nell' equazione (ω), ne proviene

$$y^9 - \frac{7}{3}py^7 + \frac{5}{3}p^2y^5 - \frac{2}{3^2}pqy^4 - \frac{3^2p^3 - q^2}{3}y^3 + \frac{2}{3^2}p^2qy^2 - \frac{1}{3^3}pq^2y = 0.$$

Or tosto si vede esser questa divisibile per y. Ma di più si può anche divider per $y^2 - p$, e per quoziente n'esce la equazione

$$\text{(N)}\ y^6 - \frac{4}{3}py^4 + \frac{1}{3}p^2y^2 - \frac{2}{3^2}pqy + \frac{1}{3^3}q^2 = 0$$

come in altra mia Operetta fu da me trovato.

Anche dunque la finale (ω), che in generale non ha fattori che l' alteri, applicata alle particolari equazioni (C), (D) riesce avvolta di due fattori y, y^2-p i quali dal grado 6.°, proprio della giusta finale di esse (C), (D), la sollevano al grado 9.°. Se ne presenterà evidente agli occhi la ragione, sotto di essi schierando le tre espressioni (α), (β), (γ) di z particolari al caso nostro; e sono

$$z=\frac{3y^2(y^2-p)[-q-3y(y^2-p)]}{(q-3py)^2+3^2y^4(y^2-p)-3^2py^4}=\frac{3y^2(y^2-p)[qy-3y^2(y^2-p)]}{3y^2(y^2-p)[q+3y(y^2-p)]}=$$
$$\frac{y(y^2-p)[q^2+3^2y^4(y^2-p)-3pqy]}{3y^2(y^2-p)[qy-3y^2(y^2-p)]}.$$

Che anzi combinando la seconda e la terza di quest' espressioni, siccome per formare la generale equazione (ω) combinate si sono le generali espressioni (α), (γ), pare, che provenir ne dovrebbe un' equazione in y di grado 12.°; ma i termini di y^{12}, y^{10} spariscono distruggendosi i loro coefficienti, e il termine y^{11} non nasce.

Ma i fattori alteranti, de' quali esce avviluppata la finale (ω) nella particolare applicazione, che si viene dal farne, sono ad essa imputabili? possono volgersi eglino ad accusa del metodo? Sarà questo un altro punto, che dilucidero a suo luogo. A tal dilucidamento apparecchierò intanto strada con osservare, che oltre al richiamare l' equazione particolare (D) alla generale (II) con moltiplicare, come è più in costume, essa (D) per z, vi ha un altro modo di applicazione, qual è di richiamare inversamente la (II) alla (D) facendo $P=0$; con che si ha $Q=3y$, $R=3y^2$, $S=-q$, sussistendo i valori $A=1$, $B=0$, $C=-p$, $D=y(y^2-p)$: con questo inverso modo di condur l' una all' altra le equazioni (II), (D) cangiati i valori di P, Q, R, S, divenuto $G=-AS=q$, $H=-AQ=-3y$, $K=DQ=3y^2(y^2-p)$, $L=-AR=-3y^2$, $M=CQ=-3y$, $N=DR-CS=3y^3(y^2-p)-pq$, anche le tre espressioni di z si cangiano così:

$$z=\frac{3y[qy-3y^2(y^2-p)]}{3y[q+3y(y^2-p)]}=\frac{q^2+3^2y^4(y^2-p)-3pqy}{3y[qy-3y^2(y^2-p)]}=\frac{3y^2[2pq-3y^3(y^2-p)-qy^2]}{q^2+3^2y^4(y^2-p)-3pqy}$$

delle quali si ha una combinazione, quella cioè della seconda e terza, relativa alla generale (ω), che dona l' equazione (N) senza verun fattore in y che ne alteri il grado; e la combinazion della prima con la seconda altera (N) con il fattore y; e quella della prima con la terza con il fattore di secondo grado y^2; ma niuna con il fattore $y^2 - p$.

§. II.

Via al parer dell' Eulero *tenuta dal* Newton *producente fattori alteranti.*

Eulero nella sua *Memoria su la eliminazione*, inserita negli atti dell' Accademia di Berlino anno 1764, espone un metodo, con il quale pare, a suo dire, che il *Newton* determinasse le formole di eliminazione, che primo ci diede sino alle equazioni di quarto grado, che perciò giusta al parere di *Eulero* io denominerò Newtoniano. Consiste esso in rendere eguali per reciproca moltiplicazione i termini primi delle due equazioni, ed i termini ultimi, con che sottraendo dopo l' uguagliamento un' equazione dall' altra si avranno due equazioni di un grado più basso delle date, e replicando l' operazione ne proverrà un pajo parimenti di un grado ancor inferiore, e così via via sino a giunger a due di semplice primo grado. Vediamolo nelle equazioni di terzo grado:

$$\text{(I)}\ Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0\,.\ \text{(II)}\ Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0\,.$$

Rendendo uguali i primi termini ne nascerà per sottrazione la stessa equazione che nel metodo di *Bezout*, essendo stessissimo l' operare. Avremo dunque, compendiate come là le espressioni,

$$(1)\ Hz^2 + Lz + G = 0\,.$$

Si rendano ora uguali gli ultimi termini moltiplicando la equazione (I) per S, e la (II) vicendevolmente per (D): sottraendo questa da quella troveremo la

$$(3)\ Gz^2 + Kz + N = 0\,,$$

avuta nel metodo del *Bezout* alla terza reciproca moltiplica di (I) per Pz^2+Qz+R, e di (II) per Az^2+Bz+C. E chi porrà un po' d'attenzione agli effetti di quelle e di queste moltiplicazioni ne rileverà da sè, senza che io mi dilunghi a dimostrarla, la ragione.

Si trattino in simil modo le due equazioni (1), (3); cioè si uguaglino prima i termini di z^2, e si avrà, sottraendo, non altrimenti che nel metodo Bezoutiano per la combinazione medesima,

$$(b)\quad (GL-HK)z+G^2-HN=0 .$$

Ma rendendo uguali gli ultimi termini ne sortirà con la sottrazione un'equazione, che segnerò (*d*)

$$(d)\quad (HN-G^2)z+LN-GK=0 .$$

Finalmente rendendo uguali i primi termini delle due equazioni (*b*), (*d*) si conseguirà per finale equazione libera da z, $(HN-G^2)^2+(LN-GK)(GL-HK)=0$ cioè svolgendo

$$(\Delta)\quad G^4-G^2(2HN+KL)+G(HK^2+L^2N)+HN(HN-LK)=0 .$$

Ecco una equazione di quarto grado in G, e che per conseguenza è certamente alterata da un fattore, poichè la finale (ω) del metodo Bezoutiano parimenti in G è di terzo. *Eulero* dice, che è divisibile per G, e si vede tosto che questa quantità deve certamente entrar nel fattore; ma non apparisce come essa sola esser possa il fattor tutto: soggiugne *Eulero* scoprirsi ciò sviluppando l'equazione, effettuando cioè dopo rimessi in luogo delle specie compendiose G, H, K ... che io uso, i valori loro, le potenze, ed i prodotti. Ma senza tutta questa pena io osservo essere $HN-KL=-MG$, cioè

$$(BP-AQ)(DR-CS)-(CP-AR)(DQ-BS)=-(CQ-BR)(DP-AS):$$

dunque avremo

$$G^4-G^2(2HN+KL)+G(HK^2+L^2N)-HMNG=0,$$

vale dire

$$G[G^3-G(2HN+KL)+H(K^2-MN)+L^2N]=0$$

e nel moltiplicatore del termine in G, in luogo di un HN ponendo, $KL-MG$ verrà

$G[G^3 - G(HN + KL - MG + KL) + H(K^2 - MN) + L^2N] = 0$, per conseguenza $(\Delta) = G(\omega)$, siccome nel metodo Bezoutiano $(\varphi) = H(\omega)$, $(\psi) = L(\omega)$.

Presentando dunque il metodo Newtoniano l' equazion finale alterata dal fattore G, egli è quindi che *Eulero* il rigetta, e ne deduce la necessità di proporre il suo, che poi vedremo. Qui permesso mi sia un riflesso sul calcolo, che *Eulero* medesimo fa del grado dell' equazione (Δ), ommesso il fattore G, che viene poi ad essere il grado della (ω). Dice che essendo G di secondo grado, sarà l' equazione (ω) che monta a G^3 di grado 6.° Ma io osservo, che $G = DP - AS$, e D, P possono contenere ambedue y^3, e similmente contener lo possono le due A, S; dunque G può essere di grado 6.°, e per conseguenza G^3, e quindi l' equazione (ω) salire al grado 18°. Nel caso delle equazioni (C), z (D), $G = 3y^2(y^2 - p)$ è di grado 4.°, e l' equazione (ω), che risultar dovrebbe di grado 12.°, risulta di 9.° sol perchè a ragione dei particolari rapporti delle quantità A, B, C, D, P, Q, R, S, e conseguentemente delle funzioni loro G, H, K.... si annullano i coefficienti di y^{12}, y^{10}, e non risulta termine in y^{11}.

Se tratto dall' equazione $HN - KL = - MG$ il valore $HN = KL - MG$ s' introduca nell' equazion (d), questa coinciderà con la (c) del metodo Bezoutiano, e per finale equazione invece di (Δ) proverrà a dirittura la Bezoutiana (ω). Dunque la equazion (d) non differisce dalla (c) che in aspetto, essendo in fondo la stessa, ed il metodo Bezoutiano non è in sostanza diverso da quello che sul parere di *Eulero* io ho chiamato Newtoniano, e non è che un' utile estensione di esso, la quale all' uguagliamento dei soli termini estremi sostituisce un ordinato uguagliamento continuo dai primi agli ultimi, e la quale moltiplica le finali equazioni, e ne produce una di giusto grado.

I tre fattori H, L, G, i due primi dal metodo Bezoutiano prodotti, il terzo dal Newtoniano, nell' applicazione alle due equazioni (C), (D) ricevono differenti valori secondo il differente modo di far convenire tra loro la (II), e la (D), o elevando questa, con moltiplicarla per z, al grado della (II), il che porta $S = o$, od inversamente abbassando (II) al grado della (D), con porre a dirittura $P = o$.

Nel primo modo

$$H = -3y^2 ;\ L = q - 3py ;\ G = 3y^2 (y^2 - p) .$$

Nel secondo modo

$$H = -3y ;\ L = -3y^2 ;\ G = q .$$

Apparisce, che sebbene in genere G sia un fattor alterante, in qualche caso particolare però, rimanendo privo di termine in y, e non comprendendo che quantità nota, può perdere il carattere di fattor alterante, e la equazione (Δ) può riuscire affatto identica alla Bezoutiana (ω), e così accade nel caso delle equazioni (C), (D) applicando la (II) alla (D) nel secondo modo. Chi sa estendere le idee, e spingerle per le infinite diverse combinazioni, comprenderà di leggieri, che l' avvenimento non ristringesi al caso delle due equazioni, una di terzo, l' altra di secondo grado, ma che può aver eziandio luogo in due di terzo. Similmente i fattori Bezoutiani H, L possono convertirsi in quantità date e costanti, e perder la forza di alterare le equazioni (φ), (ψ), cosicchè queste riescano identiche di grado alla (ω). Non lascierò per questo di chiamar fattori di tal sorta alteranti, non attesi nella general considerazione i rari accidenti concorsi, ma avuto riguardo ai casi ordinarj più semplici, e più estesi. Poichè $(\Delta) = G\ (\omega)$, essa (Δ) rispetto alle due (C), (D) darà nel primo modo di applicazione $3y^2(y^2 - p)$; $y(y^2 - p)$(N); e nel secondo q (N), che non differisce in essenza da (N), poichè q, siccome quantità data, non induce alterazione.

Sin qui si son veduti gli effetti del riferire alle due (C), (D) tutto il calcolo delle due (I), (II) e del trarre la finale dell' eliminamento di z particolare dalle finali dell' eliminamento fatto in generale. Ma in vero essendo l'equazione (D) di secondo grado, dopo, che ugguagliati i primi termini di (C), z(D), ricavata siasi, sottraendo, l'equazione di secondo grado (1), non vi ha ragione di procurarsi altra equazione di secondo grado, potendosi a dirittura dalla (1), e da essa (D) ottenere le equazioni di primo grado necessario a compiere la eliminazione. Or eguagliando i primi termini di (1), e (D), e sottraendo si ha

$$(e)\quad (3yL - 3y^2H)z + 3yG + qH = 0$$

e moltiplicando la (1) per $3yz + 3y^2$, e la (D) per $Hz + L$ giusta il metodo Bezoutiano, ovver semplicemente per $-q$ la (1), e per G la (D), a norma del metodo Newtoniano: nell'uno e nell'altro modo, sottratto un prodotto dall'altro, si trova

$$(f)\quad (Hq + 3yG)z + Lq + 3y^2G = 0$$

dalle quali due equazioni di primo grado si cava

$$(3yL - 3y^2H)(Lq - 3y^2G) - (Hq + 3yG)^2 = 0,$$

che, per esser $G = 3y^2(y^2 - p)$, $H = -3y^2$, $L = q - 3py$, porge svolta

$$y^7 - \frac{4}{3}py^5 + \frac{1}{3}p^2y^3 - \frac{2}{3^2}pqy^2 + \frac{1}{3^3}q^2y = 0,$$

cioè y(N).

Dunque il fare per le due equazioni (C), (D) un calcolo particolare più ristretto ed accomodato, sia giusta il Bezoutiano, sia giusta il Newtoniano metodo, non serve ad ischivare nella finale di eliminamento ogni alterante fattore. E non è maraviglia, partendo il calcolo particolare dall'innalzamento di (D) a z(D), nel qual modo la stessa final Bezoutiana (ω) produce $y(y^2 - p)$(N): la particolarità pertanto, e contrazione del calcolo fa sfuggire il fattore $y^2 - p$. Ma non vi ha altra via di ottener col metodo Bezoutiano esattamente la finale (N) che di discendere dalla (II) alla (D) con fare $P = 0$; via, che ha del pari esito felice nel metodo Newtoniano, convertendosi per la posizione di $P = 0$ il G in q, e la (Δ) essenzialmente nella (ω), nella (N). Si renderà manifesta allo lo sguardo tal differenza dei due distinti modi di applicare alle equazioni (C), (D) le finali (ω), (Δ) con lo sviluppo che procedo a fare.

§. III

Doppio ordinato sviluppo della finale Bezoutiana (ω), e doppia finale indi dedotta per il caso di due equazioni, una di terzo, l'altra di secondo grado.

Per isviluppo della equazione (ω) è chiaro altro non volersi significare che lo estenderla nei coefficienti proprj delle equazioni (I), (II), dalle quali fu derivata, rimettendo in luogo delle compendiose specie G, H, K .... i loro valori. Una farragine di termini ne nasce: a toglier la confusione, e rendere lo sviluppo utile conviene disporlo con qualche ordine. Primieramente io lo ordino così

$$(\omega')\ \begin{array}{lllll}
P^3D^3-P^2QCD^2 & +PQ^2BD^2 & -Q^3AD^2 & +R^3A^2D & -S^3A^3 \\
+P^2R(C^2D-2BD^2) & -PR^2(2ACD-B^2D) & +Q^2RACD & -R^2SA^2C & \\
-P^2S(C^3-3BCD+3AD^2) & -PS^2(3ABC-B^3-3A^2D) & -Q^2S(AC^2-2ABD) & +RS^2A^2B & \\
 & -PQR(BCD-3AD^2) & -QR^2ABD & & =0 \\
 & +PQS(BC^2-2B^2D-ACD) & -QS^2(AB^2-2A^2C) & & \\
 & -PRS(B^2C-2AC^2-ABD) & +QRS(ABC-3A^2D) & &
\end{array}$$

Il secondo ordine è di questo inverso

$$(\omega'')\ \begin{array}{lllll}
S^3A^3-S^2RA^2B & +SR^2A^2C & -R^3A^2D & +Q^3AD^2 & -P^3D^3 \\
+S^2Q(AB^2-2A^2C) & +SQ^2(AC^2-2ABD) & +R^2QABD & -Q^2PBD^2 & \\
+S^2P(3ABC-B^3-3A^2D) & +SP^2(C^3-3BCD+3AD^2) & +R^2P(2ACD-B^2D) & +QP^2CD^2 & \\
 & -SRQ(ABC-3A^2D) & -RQ^2ACD & & =0 \\
 & +SRP(B^2C-2AC^2-ABD) & -RP^2(C^2D-2BD^2) & & \\
 & -SQP(BC^2-2B^2D-ACD) & +RQP(BCD-3AD^2) & &
\end{array}$$

Dal primo ordinato sviluppo fatto $P=0$, annullandosi i tre primi membri, per finale delle equazioni

$$\text{(I)}\ Az^3+Bz^2+Cz+D=0 \quad \text{(III)}\ Qz^2+Rz+S=0$$

si trae

$$\begin{array}{ll}
-Q^3AD^2 & +R^3A^2D-S^3A^3 \\
+Q^2RACD & -R^2SA^2C \\
-Q^2S(AC^2-2ABD) & +RS^2A^2B \\
-QR^2ABD & \qquad\qquad\qquad =0 \\
-QS^2(AB^2-2A^2C) & \\
+QRS(ABC-3A^2D) &
\end{array}$$

che è divisibile per A, fattore che nel caso delle due equazioni (C), (D) è $=1$. Intendendo questa finale divisa per A la segnerò (Θ).

Dal secondo ordinato sviluppo, supposto $S=0$, a finale delle due

(I) $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$ (III) $Pz^3+Qz^2+Rz=0$

si tira

$$\begin{array}{ll}
-R^3A^2D & +Q^3AD^2 \quad -P^3D^3 \\
+R^2QABD & -Q^2PBD^2 \\
+R^2P(2ACD-B^2D) & -QP^2CD^2 \\
-RQ^2ACD & \qquad\qquad\qquad =0 \\
-RP^2(C^2D-2BD^2) & \\
+RQP(BCD-3AD^2) &
\end{array}$$

che ha il fattore D, il quale nel caso delle due equazioni (C) $z^3-pz+y(y^2-p)=0$, z(D) $3yz^3+3y^2z^2-qz=0$, è $=(y^2-p)$. Divisa questa finale per D segnisi (Θ').

Torneranno utili queste osservazioni su i fattori alteranti, allor che di essi tratterò di proposito.

ARTICOLO II.

Metodo di continuo inserimento del Bezout, *producente o divisore inutile, o fattore alterante.*

Prescrive il *Bezout* per il caso, che delle due equazioni date una sia di grado più basso che l'altra, una modificazion del suo general metodo, che viene ommessa nei libri di Analisi, e che io, riguardando come un metodo a parte, chiamo *metodo d' inserimento*, e premetto qui al metodo di *continua divisione*, avendo questi due metodi qualche cosa in che si congiungono, siccome in altro vincolo si legan quei di *continua divisione*, e di *continua condizione*. Qualora pertanto le due equazioni date sieno differenti di grado, l' una di grado maggiore n, l' altra di minor grado m, ordina *Bezout*, che dopo aver moltiplicato la seconda per z^{n-m}, e dopo d' aver procurato, con l' esposto metodo di uguagliamento ordinato e continuo, un numero m di equazioni di grado $n-1$ si sostituisca in ciascheduna di queste il valore di z^m tirato dalla men alta delle equazioni date, e si rinnovi la sostituzione sino a che in tutte le procurate equazioni z si abbassi alla potenza z^{m-1}, con che si verrà ad avere un numero m di equazioni di grado $m-1$, nelle quali considerando le potenze di z, z^{m-1}, z^{m-2}..... come tante incognite diverse di primo grado, si compierà con l' andamento di eliminazione usato per queste l' operazione. La rinnovata sostituzione del valore di z^m tratto dalla equazione data di grado minor m nelle procurate di grado $n-1$ sino ad abbassar queste al grado $m-1$ è ciò che io chiamo continuo inserimento.

Nel caso di $n=3$, $m=2$ ingiunge il *Bezout* di sostituir subito nell' equazione di terzo grado il valor di z^2 cavato da quella di secondo, con che essa di terzo discenderà a grado secondo, e di tornar a sostituire per deprimerla al primo: il che fatto, se traggasi da questa equazione di primo grado il valor di z, e si ponga nella data di secondo, la eliminazione di z sarà speditamente ottenuta.

Sieno in generale le due equazioni una di terzo, l' altra di secondo grado:

(I) $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$. (III) $Qz^2+Rz+S=0$.

Inserendo nella (I) il valore di $z^2=\frac{-Rz-S}{Q}$ tratto dalla (III), si ha $\frac{-ARz^2}{Q}+\left(C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}\right)z+D-\frac{BS}{Q}=0$, ed inserendo di nuovo viene

$$\left(C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}\right)z+D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}=0,$$

onde $z=-\dfrac{D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}}{C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}}$

il qual valore di z inserito nella (III) dona

$$\frac{Q\left(D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}\right)^2}{\left(C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}\right)^2}-\frac{R\left(D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}\right)}{C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}}+S=0,$$

che riducesi a

$$Q\left(D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}\right)^2+\left(CS-\frac{AS^2}{Q}-DR\right)\left(C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}\right)=0;$$

ed eseguito, e moltiplicato per Q il quadrato, effettuato il prodotto, che gli vien dietro, scancellati i termini che si distruggono, trovasi resultare $\frac{1}{Q^2}(\Theta)$; dove il divisore Q^2 non reca alcun vantaggio, poichè a supporre che deprimesse il grado dell' equazione Θ, dividendone tutti i termini, converrebbe in radice supporre per Q divisibili R, S, cioè l' equazione (III) alla sua più semplice espression non ridotta. Se dopo ciascun inserimento, invece di conservar le frazioni, tolte le avessi, riuscito sarebbe $Q^2(\Theta)$.

ARTICOLO III.

Metodo di continua divisione promosso nella teoria. Produce tutt' insieme e divisore comunemente inutile e fattore alterante.

Il *d' Alembert* nella *Enciclopedia* all' articolo *Evanouir* non accenna che due metodi, uno che dir si può di alternativo paragone ed inserimento; l' altro che di *continua divisione* io chiamo, e di cui mi propongo ad un tempo promover la teoria, e notar il diffetto. Suppone il celebre Enciclopedista, che le due equazioni date sieno di grado differente, oppure, essendo dello stesso, che con la liberazione, e separazione delle massime potenze dell'incognita da eliminarsi, e col paragone dei valori loro, se ne sia procurata una d'inferior grado. Si divida l'equazione di grado più alto per quella di minore data o procurata, questa per il residuo, questo trasferito di divisore in dividendo per il residuo secondo, e così via via il residuo secondo dividasi per il terzo, il terzo per il quarto ec. sino a giungere ad un residuo senza l'incognita che si vuol eliminata, e sarà appunto tal residuo uguagliato a zero l'equazione libera da essa incognita, che si desiderava. Questo metodo, che è in sostanza quello del ritrovamento del comun massimo divisore, ha sopra quelli sinora esposti il pregio di camminare ad una più chiara luce del principio intrinseco ad un problema comprendente due incognite, ed espresso per due equazioni. Queste equazioni sono due condizioni del problema che si devono insieme avverare, così che se espongasi per Y una funzione di y, che esprima il valore di z soddisfacente al problema, sostituito Y in luogo di z nelle due equazioni deve render vera sì l'una che l'altra. Dunque entrambe saran divisibili per $z-Y$ ossia $z-Y$ sarà comune lor divisore. Se il problema ammette diversi valori di y, ed altrettanti valori diversi di z corrispondenti, l'equazione $z-Y=0$ darà per ciascheduno dei valori di y introdotto in Y il corrispondente valore di z; rappresenterà per conseguenza $z-Y=0$ tutte le corrispondenti soluzioni, e ritenendo per qualunque delle determinazioni di y la proprietà di esser comune divisore delle due equazioni date ne sarà un comun divisore di primo grado, ma *vario*, o dir si voglia *multipollente*. Nella continuata divisione sarà esso l'ultimo divisore, ed il residuo della divisione per esso fatta, il qual sarà privo di z, essendo uguagliato a zero verrà ad essere l'equazione in sola y, che di questa determinerà i diversi valori. Se per la natura del problema ad un valore di y potrà corrispondere un valor doppio di z, il divisor comune delle due equazioni sarà un' equazion di secondo grado $z^2 + Yz + Y' = 0$; e se i valori di y possano essere più di uno, questa equazione sarà un divisor comune delle due del problema doppiamente vario, o multipollente. Così vadasi discorrendo se per natura del problema ad ogni valor diverso di y corrisponder potessero tre quattro . . . . . n valori di z: il divisor comune sarà di grado n, e sarà esso l'ultimo divisore della continua divisione, cioè là si fermerà l'operazion del dividere, inaspettatamente e di repente da un dividendo a z^n saltandosi ad un residuo senza z, annullandosi da lor medesimi ad un tratto tutti i coefficienti delle potenze di z inferiori ad n.

Veggo esser mestieri, che dopo aver così, con distinguer i possibili diversi gradi del comun divisore, promossa la teoria del metodo, la rischiari con gli esempj. Incominciamo ad applicare esso metodo alle due equazioni.

(I) $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$. (III) $Qz^2 + Rz + S = 0$.

Dividendo (I) per (III) sarà il residuo

$$(r') \quad \left[C - \frac{AS}{Q} - \frac{R}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)\right] z + D - \frac{S}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right).$$

Dividendo (III) per (r') il residuo secondo senza z da porsi uguale a zero sarà

$$(r'') \quad S - \frac{R\left[D - \frac{S}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)\right]}{C - \frac{AS}{Q} - \frac{R}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)} + \frac{Q\left[D - \frac{S}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)\right]}{\left[C - \frac{AS}{Q} - \frac{R}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)\right]^2} = 0.$$

Questa è a puntino la equazione, che si è veduto sortire dal continuo inserimento, e si è osservato essere $= \frac{1}{Q^2}(\Theta)$. E ben penetrando si scopre la ragione dell'identico successo. Il continuo inserimento altro non è che una continua division compendiata. Se nella divisione di (I) per (III) si disponga (I) così: $(Az + B)z^2 + Cz + D = 0$, il quoziente del primo atto di divisione essendo $\frac{Az + B}{Q}$, moltiplicato per (III) produce a residuo di esso primo atto di divisione l'effetto del primo inserimento, e con il secondo atto di divisione si ha il residuo (r') corrispondente all' effetto dell' inserimento secondo. Similmente l' inserimento del valore di z nella (III) è un compendio della divisione di (III) per (r'). Ecco il vincolo, che io da principio accennai essere tra i due metodi.

Procediamo a determinare per mezzo del metodo di continua divisione la finale dell' eliminamento di z dalle due equazioni ambe di terzo grado.

(I) $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$. (II) $Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0$.
Liberando, e lasciando soli in un membro li cubi z^3, e paragonandone i due valori, si otterrebbe l' equazione di secondo grado

$$\frac{1}{AP}\Big((BP-AQ)z^2+(CP-AR)z+DP-AS\Big)=\frac{1}{AP}(Hz^2+Lz+G)=0,$$

essendo $Hz^2 + Lz + G = 0$, l' equazione (1) conseguita col metodo Bezoutiano, e col Newtoniano, uguagliando per la reciproca moltiplica di (I) per P, di (II) per A i primi loro termini. Serviamoci della semplice $Hz^2 + Lz + G = 0$. Dividendo per questa la (I) si avrà un residuo (R') simile affatto al (r') cangiato Q in H, R in L, S in G, sarà dunque

$$(R')\left[C-\frac{AG}{H}-\frac{L}{H}\left(B-\frac{AL}{H}\right)\right]z+D-\frac{G}{H}\left(B-\frac{AL}{H}\right),$$

e dividendo per questo (R') la $Hz^2 + Lz + G = 0$, si avrà a residuo (R''), ossia ad equazione finale

$$(R'')\left(CG-\frac{AG^2}{H}-DL\right)\left[C-\frac{AG}{H}-\frac{L}{H}\left(B-\frac{AL}{H}\right)\right]+$$
$$H\left[D-\frac{G}{H}\left(B-\frac{AL}{H}\right)\right]^2=0$$

che con pazienza sviluppando, e confrontando si trova

$$=\frac{A^2}{H^2}(\omega)=\frac{A^2}{(BP-AQ)^2}(\omega).$$

Ecco una combinazione di fattore alterante, e di fattore deprimente, ossia divisore. Ma egli è evidente essere il deprimente H^2 inutile, se tutti i termini di ω non sieno per esso divisibili, che è un singolarissimo caso.

Avanziamoci ad un esempio, in cui le due equazioni date

abbiano un divisor comune di secondo grado per esser il problema di tal natura, che ad ogni valor di y ne corrispondano due di z. Di sì fatta indole sono le due equazioni
(IV) $z^3+yz^2-yz+b-2ay=0$. (V) $z^3+(y-f)z^2-yz+b-(2a-f)y=0$.
Avendosi qui $A=1$, $B=y$, $C=-y$, $D=b-2ay$; $P=1$, $Q=y-f$, $R=-y$, $S=b-(2a-f)y$, e per le generali posizioni essendo $H=BP-AQ$, $L=CP-AR$, $G=DP-AS$, ne verrà $H=B-Q=f$, $L=C-R=0$, $G=D-S=-fy$, e quindi il primo divisore $Hz^2+Lz+G=fz^2-fy$, ed il primo residuo

$$(R')=\left(-y+\frac{fy}{f}\right)z+b-2ay+y.y,\text{ vale dire } b-2ay+y^2.$$

Dunque l'equazione $y^2-2ay+b=0$ sarà l'equazione finale libera da z, che ci darà i valori di y, e l'equazione $fz^2-fy=0$, ossia $z^2-y=0$ sarà il divisor comune di secondo grado delle due date equazioni (IV), (V), il quale per ciascun dei valori di y ci somministrerà due valori di z. Che z^2-y sia divisor comune delle equazioni (IV), (V) si vedrà cogli occhi instituendo le divisioni: la divisione di (IV) darà per quoziente $z+y$, e per residuo $y^2-2ay+b$; e la divisione di (V) darà di quoziente $z+y-f$, e di residuo $y(y-f)+b-(2a-f)y$, che per la elisione dei due termini $-fy$, $+fy$ ricade nell'antecedente $y^2-2ay+b$, il quale, essendo per ipotesi $=0$, rende ambe le divisioni perfette, e dimostra z^2-y comune divisore delle due equazioni.

Accennerò eziandio la maniera di costituire in genere le forme di due equazioni di terzo grado dell'esposta natura, ammettenti cioè un comun divisore di secondo grado, qual è $z^2+Yz+Y'=0$, intendendo per Y, Y', funzioni di y anche frazionarie. Supponendo le due equazioni desiderate essere

(I) $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$. (II) $Pz^3+Qz^2+Rz+S=0$, si cerca il conveniente rapporto tra le funzioni di y, A, B, C, D, P, Q, R, S.

Per render la determinazione di tal rapporto più agevole, le, e più chiara, si suppongano $A = P = 1$; e per non pregiudicar al tempo stesso alla generalità si concepiscano, se piace, le altre funzioni di y, cioè B, C, D, Q, R, S frazionarie. Confrontando $z^2 + Yz + Y'$ con $Hz^2 + Lz + G$, e modificando giusta l'ipotesi di $A = P = 1$ i generali valori H, L, G, si vedrà essere $1 = H = B - Q$; $Y = L = C - R$; $Y' = G = D - S$.

Ad esser poi $z^2 + Yz + Y'$ esatto divisore delle due equazioni (I), (II), dovendo nel residuo (R'') annullarsi da sè il coefficiente di z, ed essere l'altro termine una funzione di y (che segnerò Y'') da potersi costituire in equazione, si avrà

$$C - Y' - Y(B - Y) = 0. \quad D - Y'(B - Y) = Y''.$$

Cinque sono le equazioni, e sei le determinazioni da farsi, onde una resta libera, ed arbitraria: sciegliamo a fare $B = Y'''$: saranno quindi

$$B = Y'''; \; C = Y' + Y(Y''' - Y); \; D = Y'(Y''' - Y) + Y''$$

$$Q = Y''' - 1; \; R = Y' + Y(Y''' - Y) - Y; \; S = Y'(Y''' - Y) + Y'' - Y';$$

e perciò le due ricercate equazioni saranno

$$z^3 + Y'''z^2 + [Y' + Y(Y''' - Y)]z + Y'(Y''' - Y) + Y'' = 0,$$

$$z^3 + (Y''' - 1)z^2 + [Y' + Y(Y''' - Y) - Y]z + Y'(Y''' - Y) - Y' + Y'' = 0.$$

Il comun lor divisore sarà $z^2 + Yz + Y'$, ed il residuo di ambe le divisioni determinante i valori di y sarà $Y'' = 0$; e per ciascun di questi valori di y l'equazione $z^2 + Yz + Y' = 0$ darà due valori di z.

ARTICOLO IV.

Metodo di continua condizione dell' Eulero, *di nuove viste, e finali equazioni arricchito producente fattori alteranti.*

Da quello del metodo di continua divisione non è diverso il fondamento del metodo dall'*Eulero* proposto nel volume dell'Accademia di Berlino per l'anno 1764. Ma *Eulero* vi aggiugne un nuovo luminoso riflesso, e ne fa un nuovo maneggio, di cui dà un esempio in due equazioni, una di terzo, l'altra di secondo grado. Sieno

$$(\mathrm{I})\ z^3+\frac{B}{A}z^2+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0 \quad (\mathrm{III})\ z^2+\frac{R}{Q}z+\frac{S}{Q}=0.$$

Dovendo le due equazioni verificarsi insieme, cioè l'una e l'altra per un certo valor di z, qual esprimasi per Y, dovendo per conseguenza ambedue le equazioni contener a fattore $z-Y$, d'altro non si tratta in cercare una equazione senza z, e solo composta dei coefficienti $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{Q}$, che di determinare il rapporto di questi tutti in fra di loro, onde la condizione esposta abbia realmente luogo, cioè sia effettivamente $z-Y$ fattor comune delle due equazioni. Ecco in fondo, ed in ultima analisi l'oggetto della eliminazione di z: determinar l'equazione, che leghi in tal continuo rapporto i detti coefficienti tutti, che si avveri la condizione accennata; egli è di qui che io ho preso il titolo dato a questo metodo di *Eulero* di *continua condizione*.

Si ponga pertanto

$$(\mathrm{I})\ z^3+\frac{B}{A}z^2+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=(z^2+gz+h)(z-Y).$$

$$(\mathrm{III})\ z^2+\frac{R}{Q}z+\frac{S}{Q}=(z+f)(z-Y).$$

Moltiplicando reciprocamente (I) per $z+f$, e (III) per z^2+gz+h, dovranno i prodotti riuscir uguali, siccome ambedue $=z-Y$.

Paragonando quinci i coefficienti dei termini simili di essi prodotti, si avranno le quattro equazioni

$$1.^a\ \frac{R}{Q}+g=\frac{B}{A}+f. \qquad 2.^a\ \frac{S}{Q}+\frac{R}{Q}g+h=\frac{C}{A}+\frac{B}{A}f.$$

$$3.^a\ \frac{S}{Q}g+\frac{R}{Q}h=\frac{D}{A}+\frac{C}{A}f. \quad 4.^a\ \frac{S}{Q}h=\frac{D}{A}f,$$

per mezzo delle quali, discacciate f, g, h, si otterrà l'equazione desiderata: e siccome il discacciamento si fa con un continuo processo, che va continuamente legando fra loro nel rapporto alla mentovata condizion necessario i divisati coefficienti; così giusto mi par, che sempre meglio apparisca il titolo di *continua condizione*, onde questo metodo ho distinto. Il calcolo poi per giugnere alla bramata equazione, espulse $f, g, h,$ è agevole e senza ostacolo veruno, non avendosi a maneggiare che equazioni semplici. Tratta dalla 1.ª la espressione di f, e trasportatala nella 2.ª, e da questa cavata l'espressione di h, ed introdotte le espressioni di f, e di h nella 3.ª si troverà

$$g=\frac{B}{A}-\frac{\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)+\frac{D}{A}}{\frac{R}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)-\left(\frac{S}{Q}-\frac{C}{A}\right)},\text{ che porrò }=\frac{B}{A}-\frac{t}{u}.$$

E con le medesime espressioni di f, ed h introdotte nella 4.ª proviene

$$g=\frac{B}{A}-\frac{\frac{S}{Q}\left(\frac{S}{Q}-\frac{C}{A}\right)+\frac{R}{Q}\cdot\frac{D}{A}}{\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)+\frac{D}{A}},\text{ che porrò }=\frac{B}{A}-\frac{v}{t};$$

onde ne deriva

$$(\Sigma)\left[\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)+\frac{D}{A}\right]^2-\left[\frac{R}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)-\left(\frac{S}{Q}-\frac{C}{A}\right)\right]\left[\frac{S}{Q}\left(\frac{S}{Q}-\frac{C}{A}\right)+\frac{DR}{AQ}\right]=0.$$

Che se confrontisi, trovasi essere la equazione fornitaci dal continuo inserimento divisa per A^2Q; onde $(\Sigma)=\frac{1}{A^2Q^3}(\Theta)$.

Ommette l'*Eulero* la determinazione di Y rappresentante il valor di z soddisfacente ad ambe insieme le equazioni, giusta che il problema esige. Prendendo a supplirvi, per maggior comodo, in luogo dei coefficienti fratti sostituite delle spezie intere, rappresenterò le date equazioni (I), (III) così:

$$\text{(I) } z^3+\alpha z^2+\beta z+\gamma=0. \quad \text{(III) } z^2+\delta z+\varepsilon=0.$$

Or si osservi che essendosi supposto

$$z^2+\delta z+\varepsilon=(z+f)(z-Y)=z^2+(f-Y)z-fY,$$

si ha conseguentemente $f-Y=\delta$, $-fY=\varepsilon$; onde

$$Y=f-\delta=\frac{-\varepsilon}{f}.$$

Ma $f=\delta-\alpha+g=\delta-\alpha+\alpha-\frac{t}{u}=\delta-\alpha+\alpha-\frac{v}{t}=\delta-\frac{t}{u}=\delta-\frac{v}{t}$.

Dunque $Y = -\frac{t}{u} = -\frac{v}{t} = \frac{-\varepsilon u}{\delta u - t} = \frac{-\varepsilon t}{\delta t - v}$.

Devesi riflettere, che $\frac{t}{u} = \frac{\varepsilon(\delta - \alpha) + \gamma}{\delta(\delta - \alpha) - (\varepsilon - \beta)}$; $\frac{v}{t} = \frac{\varepsilon(\varepsilon - \beta) + \delta\gamma}{\varepsilon(\delta - \alpha) + \gamma}$. Per lo che trovasi, che la quarta espression di Y, vale dire $\frac{-\varepsilon t}{\delta t - v}$, coincide con la prima $\frac{-t}{u}$: cosicchè di quattro si riducono a tre: $Y = -\frac{t}{u} = -\frac{v}{t} = -\frac{\varepsilon u}{\delta u - t}$; e più distesamente

$$Y = -\frac{\varepsilon(\delta - \alpha) + \gamma}{\delta(\delta - \alpha) - (\varepsilon - \beta)} = -\frac{\varepsilon(\varepsilon - \beta) + \delta\gamma}{\varepsilon(\delta - \alpha) + \gamma} = -\frac{\varepsilon[\delta(\delta - \alpha) - (\varepsilon - \beta)]}{\delta^2(\delta - \alpha) - \delta(\varepsilon - \beta) - \varepsilon(\delta - \alpha) - \gamma}$$

La terza espressione, se ben attendasi, nasce dalle due antecedenti, moltiplicando il numerator della prima per δ, e dal prodotto sottraendo il numerator della seconda, con che si ha il numerator della terza; moltiplicando il denominator della prima parimenti per δ, e poi sottraendo dal prodotto il denominator della seconda, e la differenza costituisce il denominator della terza. La ragione s'intende da una equazione, a cui ci conduce la già notata coincidenza di $\frac{-\varepsilon t}{\delta t - v}$ con $\frac{-t}{u}$. Di qui cavasi $\varepsilon u = \delta t - v$: dunque $\frac{-\varepsilon u}{\delta u - t} = -\frac{\delta t - v}{\delta u - t}$, cioè la struttura della terza espressione, che ho descritto. Dalla equazione $\varepsilon u = \delta t - v$ tirasi anche reciprocamente $v = \delta t - \varepsilon u$; onde $\frac{v}{t} = \frac{\delta t - \varepsilon u}{t}$. Per la qual cosa essendo $\frac{t}{u} = \frac{v}{t}$ sarà $\frac{t}{u} = \frac{\delta t - \varepsilon u}{t}$, e quindi $t^2 = u(\delta t - \varepsilon u)$.

Ecco in breve forma la finale equazione (Σ) costrutta pella sola frazione $\frac{t}{u}$, senza che vi entri il numeratore v della frazione $\frac{v}{t}$.

Poichè per Y abbiamo indicato il valor di z, avremo di questa tre espressioni

$$z = -\frac{t}{u} = -\frac{\delta t - \varepsilon u}{t} = -\frac{\varepsilon u}{\delta u - t}.$$

Combinandole a due a due si scopre tosto che la combinazione della prima con la seconda, e quella della prima con la terza coincidono in dare $t^2 - u(\delta t - \varepsilon u) = 0$. E la combinazione della seconda con la terza si trova produrre $\delta[t^2 - u(\delta t - \varepsilon u)] = 0$: laonde abbiamo da tutte e tre insieme le combinazioni

$$(\Sigma)\ t^2 - u(\delta t - \varepsilon u) = 0. \quad (\Sigma') = \delta(\Sigma).$$

L'equazione (Σ) darà i valori di y. Giusta il numero loro ciaschedusa delle tre espressioni di z prenderà un numero di determinazioni diverse, ma per ciascuno ciascuna la determinazione medesima, ossia il medesimo valore. Le tre espressioni di z pei primitivi coefficienti delle equazioni (I), (III) saranno

$$z = \frac{\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) + \frac{D}{A}}{\frac{R}{Q}\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) - \left(\frac{S}{Q} - \frac{C}{A}\right)} = -\frac{\frac{S}{Q}\left(\frac{S}{Q} - \frac{C}{A}\right) + \frac{DR}{AQ}}{\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) + \frac{D}{A}} = -\frac{\frac{S}{Q}\left[\frac{R}{Q}\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) - \left(\frac{S}{Q} - \frac{C}{A}\right)\right]}{\left(\frac{R^2}{Q^2} - \frac{S}{Q}\right)\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) - \frac{R}{Q}\left(\frac{S}{Q} - \frac{C}{A}\right) - \frac{D}{A}}.$$

Applicando il trovato sin qui alle due equazioni (C), (D), si avrà

$$t = \frac{-q + 3y(y^2 - p)}{3};\quad u = \frac{q + 3y(y^2 - p)}{3y};\quad \delta t = \frac{-qy + 3y^2(y^2 + p)}{3};$$

$$\delta u = \frac{q + 3y(y^2 - p)}{3};\quad \delta u - t = \frac{2}{3}q;\quad \varepsilon u = \frac{-q^2 - 3qy(y^2 - p)}{3^2 y^2};$$

$$\delta t - \varepsilon u = \frac{q^2 + 3^2 y^4(y^2 - p) - 3pqy}{3^2 y^2};\ \text{onde}$$

$$z = \frac{\frac{1}{3}\left(-q + 3y(y^2 - p)\right)}{\frac{1}{3y}\left(q + 3y(y^2 - p)\right)} = -\frac{\frac{1}{3^2 y^2}\left(q^2 + 3^2 y^4(y^2 - p) - 3pqy\right)}{\frac{1}{3}\left(-q + 3y(y^2 - p)\right)} = -\frac{q + 3y(y^2 - p)}{6y^2}$$

l' equazione

$$(\Sigma)\left(\frac{-q+3y(y^2-p)}{3}\right)^2-\left(\frac{q+3y(y^2-p)}{3y}\right)\left(\frac{q^2+3^2y^4(y^2-p)-3pqy}{3^2y^2}\right)=0\,.$$

E svolgendo si vedrà essere $(\Sigma)=\frac{1}{3^3y^3}(N)$ e quinci $(\Sigma')=y(\Sigma)$

$=\frac{1}{3^2y^2}(N)$.

Si può trasferire il calcolo fatto per le due equazioni (I), (III), la prima di terzo grado, l'altra di secondo alle due di terzo (I), (II), deducendo prima da esse la più volte usata di secondo grado (1) $Hz^2+Lz+G=0$.

Trasportando dunque il calcolo dalle due (I), (III) alle due

$$(I)\ z^3+\frac{B}{A}z^2+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0\,.\quad (1)\ z^2+\frac{L}{H}z+\frac{G}{H}=0,$$

con sostituire $\frac{L}{H}$ in luogo di $\frac{R}{Q}$; $\frac{G}{H}$ in luogo di $\frac{S}{Q}$ si otterrà

$$(\Lambda)\left[\frac{G}{H}\left(\frac{L}{H}-\frac{B}{H}\right)+\frac{D}{A}\right]^2-\left[\frac{L}{H}\left(\frac{L}{H}-\frac{B}{A}\right)-\left(\frac{G}{H}-\frac{C}{A}\right)\right]\left[\frac{G}{H}\left(\frac{G}{H}-\frac{C}{A}\right)+\frac{DL}{AH}\right]=$$

che si uguaglia al (R''), a cui il metodo di continua division terminò, diviso per HA^2; e perciò $(\Lambda)=\frac{1}{H^3}(\omega)$.

Se si desiderano le tre espressioni di z, esse sono:

$$z=\frac{\frac{G}{H}\left(\frac{L}{H}-\frac{B}{A}\right)+\frac{D}{A}}{\frac{L}{H}\left(\frac{L}{H}-\frac{B}{A}\right)-\left(\frac{G}{H}-\frac{C}{A}\right)}=-\frac{\frac{G}{H}\left(\frac{G}{H}-\frac{C}{A}\right)+\frac{DL}{AH}}{\frac{G}{H}\left(\frac{L}{H}-\frac{B}{A}\right)+\frac{D}{A}}=-\frac{\frac{G}{H}\left[\frac{L}{H}\left(\frac{L}{H}-\frac{B}{A}\right)-\left(\frac{G}{H}-\frac{C}{A}\right)\right]}{\left(\frac{L^2}{H^2}-\frac{G}{H}\right)\left(\frac{L}{H}-\frac{B}{A}\right)-\frac{L}{H}\left(\frac{G}{H}-\frac{C}{A}\right)-\frac{D}{A}}\,.$$

La combinazione della seconda con la terza espressione dona $(\Lambda')=\frac{L}{H}(\Lambda)=\frac{L}{H^4}(\omega)$.

Ma cerchiamo la finale di eliminamento per le equazioni

$$(I)\ z^3+\frac{B}{A}z^2+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0\,.\quad (II)\ z^3+\frac{Q}{P}z^2+\frac{R}{P}z+\frac{S}{P}=0,$$

applicando loro il metodo di *Eulero* immediatamente.

A maggior comodo però si faccia

$$\frac{B}{A}=B',\ \frac{C}{A}=C',\ \frac{D}{A}=D',\ \frac{Q}{P}=Q',\ \frac{R}{P}=R',\ \frac{S}{P}=S'$$

onde sieno

$$\text{(I)}\ z^3+B'z^2+C'z+D'=0\,.\quad \text{(II)}\ z^3+Q'z^2+R'z+S'=0\,.$$

E si ponga inoltre $D'-S'=G'$, $B'-Q'=H'$, $C'-R'=L'$. Dopo ciò concepiscasi

$$\text{(I)}\ z^3+B'z^2+C'z+D'=(z^2+gz+h)(z-Y)\,.$$
$$\text{(II)}\ z^3+Q'z^2+R'z+S'=(z^2+ez+f)(z-Y)\,,$$

si avrà per conseguenza

$$(z^3+B'z^2+C'z+D')(z^2+ez+f)=(z^3+Q'z^2+R'z+S')(z^2+gz+h)\,.$$

Eseguiti i prodotti, il paragone dei coefficienti di ciascuna podestà di z nell'uno e nell'altro somministrerà le cinque equazioni

1.ª $B'+e=Q'+g$.
2.ª $C'+B'e+f=R'+Q'g+h$.
3.ª $D'+C'e+B'f=S'+R'g+Q'h$.
4.ª $D'e+C'f=S'g+R'h$.
5.ª $D'f=S'h$.

dalla 1.ª ricavasi $e=-H'+g$;
dalla 2.ª $f=-L'+B'H'-H'g+h$;
dalla 3.ª $H'h=C'H'-G+B'(L'-B'H')-(L'-B'H')g$;
dalla 4.ª $g=B'-\dfrac{D'H'^2+G'(L'-B'H')}{L'(L'-B'H')+H'(C'H'-G')}$ che porrò $=B'-\dfrac{t}{u}$,
dalla 5.ª $g=B'-\dfrac{D'H'L'-G'(C'H'-G')}{D'H'^2+G'(L'-B'H')}$ che porrò $=B'-\dfrac{v}{t}$; onde

$t^2-uv=0$.

È cosa degna di osservazione, che se invece di trarre dalla 3.ª equazione il valor di h, si tragga quello di g, e poi dalla 4.ª e dalla 5.ª si cavino due valori di h, e dal loro confronto si derivi l'equazion finale, riesce essa $\dfrac{L'-B'H'}{H'}(t^2-uv)=0$.

Di fatto dalla 3.ª

$$g=\frac{C'H'-G'-H'h}{L'-B'H'}+B',$$

dalla 4.ª

$$h=\frac{C'H'-G'}{H'}+\frac{(L'-B'H')\left(D'H'-B'G'+\frac{L'G'}{H'}\right)}{L'(L'-B'H')+H'(C'H'-G')}=\frac{C'H'-G'}{H'}+\frac{\frac{1}{H'}\left(L'-B'H'\right)t}{u}$$

dalla 5.ª

$$h=\frac{C'H'-G'}{H'}+\frac{(L'-B'H')\left(D'L'-C'G'+\frac{G'^2}{H'}\right)}{D'H'^2+G'(L'-B'H')}=\frac{C'H'-G'}{H'}+\frac{\frac{1}{H'}\left(L'-B'H'\right)v}{t}$$

Dunque uguagliando, proviene $\left(\frac{L'-B'H'}{H'}\right)(t^2-uv)=0$.

Si scorge, che la via migliore, vale dir conducente ad una finale più semplice, è quella, che più ritarda le frazioni di denominator complesso.

Farò osservare che $v=\frac{L}{H}t-\frac{G}{H}u$, onde $\frac{v}{t}=\frac{Lt-Gu}{Ht}$, e quindi l'equazione $\frac{t}{u}=\frac{v}{t}$, dalla quale fu inferito $t^2-uv=0$, si converte in $Ht^2-u(Lt-Gu)=0$.

Dal supposto $z^3+B'z^2+C'z+D'=(z^2+gz+h)(z-Y)=z^3+(g-Y)z^2+(h-gY)z-hY$ si traggono tre espressioni di Y

$$Y=g-B'=\frac{h-C'}{g}=\frac{-D'}{h}.$$

Abbiam veduto sopra cavarsi dalla terza equazione la relazion di g, h, cioè $H'h=C'H'-G'+B'(L'-B'H')-(L'-B'H')g$. Secondo i due valori di g si tireranno i due corrispondenti di h

$$h=\frac{1}{H'}(C'H'-G')+\frac{1}{H'}(L'-B'H').\frac{t}{u};$$

$$h=\frac{1}{H'}(C'H'-G')+\frac{1}{H'}(L'-B'H').\frac{v}{t}.$$

Distinguendo i due valori di g per g, g', e i due corrispondenti di h per h, h', sei pare che ne dovrebbero provenire le espressioni di Y; ma la sesta $\frac{-D'}{h'}$ coincide con la prima $g-B'$, onde ristringonsi a cinque

$$Y=g-B'=\frac{h-C'}{g}=\frac{-D'}{h}=g'-B'=\frac{h'-C}{g'}.$$

Rimettendo in luogo delle spezie accentate B', C', D' ..... i coefficienti fratti $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$ .... si troverà $G' = \frac{D}{A} - \frac{S}{P} = \frac{DP - AS}{AP} = \frac{G}{AP}$; $H' = \frac{H}{AP}$, $L' = \frac{L}{AP}$, e la compendiosa equazione $t^2 - uv = 0$, si stenderà nella

$$(\Omega) \left[\frac{DH^2}{A} + G\left(L - \frac{BH}{A}\right)^2\right] - \left[L\left(L - \frac{BH}{A}\right) + H\left(\frac{CH}{A} - G\right)\right]\left[\frac{DH}{A} + G\left(\frac{CH}{A} - G\right)\right] = 0$$

la quale è $= \frac{H^3}{A^2}(R'') = H(\omega)$,

l'altra equazion $\frac{1}{H'}(L' - B'H')(t^2 - uv) = 0$ diverrà

$\frac{1}{H}\left(L - \frac{BH}{A}\right)(\Omega) = \left(L - \frac{BH}{A}\right)(\omega)$: segnisi (Ω').

Le cinque espressioni di Y, e conseguentemente di z, saranno

$$z = Y = -\frac{\frac{DH^2}{A} + G\left(L - \frac{BH}{A}\right)}{L\left(L - \frac{BH}{A}\right) + H\left(\frac{CH}{A} - G\right)} =$$

$$\frac{\left(\frac{DH}{A} - \frac{BG}{A}\right)\left(L - \frac{BH}{A}\right) + G\left(\frac{CH}{A} - G\right)}{\frac{BL}{A}\left(L - \frac{BH}{A}\right) - LG + \frac{CBH^2}{A^2} - \frac{DH^2}{A}} =$$

$$-\frac{\frac{DL}{A}\left(L - \frac{BH}{A}\right) + \frac{DH}{A}\left(\frac{CH}{A} - G\right)}{\left(\frac{DH}{A} + \frac{CL}{A} - \frac{BG}{A}\right)\left(L - \frac{BH}{A}\right) + \left(\frac{CH}{A} - G\right)^2} =$$

$$-\frac{\frac{DHL}{A} - G\left(\frac{CH}{A} - G\right)}{\frac{DH^2}{A} + G\left(L - \frac{BH}{A}\right)} =$$

$$\frac{\left(\frac{DL}{A} - \frac{CG}{A}\right)\left(L - \frac{BH}{A}\right) - \frac{DHG}{A}}{\left(\frac{BG}{A} - \frac{DH}{A}\right)\left(L - \frac{BH}{A}\right) + G\left(\frac{CH}{A} - G\right)}.$$

La combinazione della prima, e della quarta dona la equazione (Ω); e la combinazione della prima con la terza produce la equazion (Ω'): poichè la espressione prima è la $g - \frac{B}{A}$, con cui si è notato coincider la $\frac{\frac{-D}{A}}{h'}$ per tal motivo qui ommessa; e la terza è la $\frac{\frac{-D}{A}}{h}$; dunque la combinazione della prima con la terza è quanto prendere $\frac{\frac{-D}{A}}{h'}=\frac{\frac{-D}{A}}{h}$; donde $h=h'$, che è l'ugnagliamento, da cui si cavò sopra la (Ω'). È chiaro che il numero delle combinazioni delle cinque espressioni di z a due a due monta a 10, ed altrettante offerirannosi equazioni finali. È di più a riflettersi che similmente dall' equazione

$$z^3+Q'z^2+Rz+S=(z^2+ez+f)(z-Y)=z^3+(e-Y)z^2+(f-eY)z-fY$$

si posson trarre cinque diverse espressioni di Y, ossia di z; e per conseguenza altre 10 finali equazioni. Che anzi congiungendo queste cinque nuove espressioni con le altre cinque, il numero delle combinazioni di tutte e dieci fra loro a due a due, e del pari il numero delle finali equazioni ascenderà a 45. Io non mi prenderò la pena di formarle, e sott' occhio stenderne la schiera. Bastano al mio scopo le due (Ω), (Ω') rendendosi per esse a sufficienza palese che questo metodo di *Eulero*, scorto da una luminosa considerazione su l'ultimo oggetto dell' eliminamento, non gode però il pregio dall' esimio Autore creduto, di schivare i fattori alteranti; che anzi la finale (Ω') reca seco un fattore più complesso, che qualunque altro, da cui affetta presentata si sia la finale di qualsivoglia dei metodi superiori.

ARTICOLO V.

Metodo di prodotto non producente che divisori, ma comunemente inutili.

§. I.

Fondamenti del metodo per l' Eulero. *Calcolo di lui. Cose desiderate alla perfezione di esso.*

Se bella e profonda idea su l' intento della eliminazione, e l' uffizio dell' equazion finale produsse l' *Eulero* nel volume dell' Accademia di Berlino per l' anno 1764, belle e profonde viste sul rapporto delle due equazioni a due incognite premesse avea nel volume per l' anno 1748, e metodo più felice aveane ordito. L' argomento della Memoria non è espressamente l' eliminazione, ma un argomento affine, e porta essa il titolo: *Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper*. Ciò che vi è d' incidente, divenendo l' essenziale al mio proposito, è ciò che io debbo estrarne. Sieno le equazioni

$$(\xi)\quad z^m + \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} + \gamma z^{m-3} + \delta z^{m-4} \ldots\ldots + \theta = 0$$

$$(\mathrm{K})\quad z^n + \alpha' z^{n-1} + \beta' z^{n-2} + \gamma' z^{n-3} + \delta' z^{n-4} \ldots\ldots + \tau' = 0$$

le quali faccia mestieri combinar di modo, che ne risulti una, la quale non contenga più la lettera z. Si comprende tosto che il valor di z risultante da una di codeste equazioni deve essere uguale al valore di z risultante dall' altra. Dunque se l' una e l' altra equazione dia più valori di z, le due equazioni proposte potranno sussistere insieme, se un valore qualunque di z dato dall' una sia uguale ad un valore qualunque di z dell' altra. Supponiamo che tutte le radici della prima equazione sieno $a, b, c, d, \ldots.$ al numero m, e le radici dell' altra sieno $a', b', c', d' \ldots..$ al numero n: egli è chiaro, che l' una e l' altra delle due equazioni proposte avrà luogo in tutti i casi, che una delle radici della prima equazione (ξ) sarà uguale ad una dell' altra (K).

Esse due equazioni si possono rappresentare così:

$$(\xi)\ (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)\ldots\ldots=0$$
$$(\mathrm{K})\ (z-a')(z-b')(z-c')(z-d')\ldots\ldots=0.$$

E da tal rappresentazione rendesi manifesto, che se $a=a'$, il valor $z=a=a'$ soddisferà all'una e all'altra equazione, e che accaderà lo stesso se $a=b'$ od $a=c'$, od $a=d'$ ..... Similmente il valor $z=b$ soddisferà all'una ed all'altra se $b=a'$, se $=b'$, se $=c'$ .... ed il valor $z=c$ soddisferà ad ambedue le equazioni se $c=a'$, se $=b'$, se $=c'$, se $=d'$ .... Ed è evidente, che tutte queste combinazioni insieme raccolte rappresentano tutti i casi possibili, ne' quali le due proposte equazioni possono sussistere ad un tempo.

Poichè dunque l'equazion, che si cerca per mezzo dell' eliminamento, comprender deve tutti i casi possibili, ne' quali un medesimo valore posto in luogo di z soddisfa ad un tempo all'una ed all'altra equazione, egli è palese dover essa contenere tutti i casi notati, e perciò sarà ella composta di tutti questi fattori,

$$\left.\begin{array}{l}(a-a')(a-b')(a-c')(a-d')\ldots\\(b-a')(b-b')(b-c')(b-d')\ldots\\(c-a')(c-b')(c-c')(c-d')\ldots\\(d-a')(d-b')(d-c')(d-d')\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=0,\ \text{ec.}$$

E poichè in questa equazione non si trova più z, dunque essa stessa sarà la equazion cercata per l'eliminazione, racchiudente tutti i casi, ne' quali le due equazioni proposte possono avere una radice medesima.

Avendo pertanto supposto

$$(\mathrm{K})z^n+\alpha'z^{n-1}+\beta'z^{n-2}+\gamma'z^{n-3}\ldots+\tau'=(z-a')(z-b')(z-c')(z-d')\ldots=0.$$

Sostituendo successivamente in luogo di z nell'uno, e nell' altro membro a, b, c, d .... avremo, siccome dal secondo la serie dei fattori esposta, così dal primo questa

$$\left.\begin{array}{l}(a^n+\alpha'a^{n-1}+\beta'a^{n-2}+\gamma'a^{n-3}+\delta'a^{n-4}\ldots+\tau')\\(b^n+\alpha'b^{n-1}+\beta'b^{n-2}+\gamma'b^{n-3}+\delta'b^{n-4}\ldots+\tau')\\(c^n+\alpha'c^{n-1}+\beta'c^{n-2}+\gamma'c^{n-3}+\delta'c^{n-4}\ldots+\tau')\\(d^n+\alpha'd^{n-1}+\beta'd^{n-2}+\gamma'd^{n-3}+\delta'd^{n-4}\ldots+\tau')\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=0,\ \text{ec.}$$

che saranno in numero m giusta il numero delle radici della prima equazione (ξ), e il cui prodotto comporrà parimenti la cercata equazione finale dell' eliminamento .

Egli è altresì evidente, che siccome scambiando le equazioni invertir si può il calcolo; così la stessa equazion finale rappresentar si può sotto la forma del prodotto

$$(a'^m + \alpha a'^{m-1} + \beta a'^{m-2} + \gamma a'^{m-3} + \delta a'^{m-4} \ldots\ldots + \theta)$$
$$(b'^m + \alpha b'^{m-1} + \beta b'^{m-2} + \gamma b'^{m-3} + \delta b'^{m-4} \ldots\ldots + \theta)$$
$$(c'^m + \alpha c'^{m-1} + \beta c'^{m-2} + \gamma c'^{m-3} + \delta c'^{m-4} \ldots\ldots + \theta)$$
$$(d'^m + \alpha d'^{m-1} + \beta d'^{m-2} + \gamma d'^{m-3} + \delta d'^{m-4} \ldots\ldots + \theta) \text{ ec.}$$

Il numero de' fattori essendo n, quale il numero delle radici a', b', c', d' .... dell' equazione (K) . Scielgasi ad effettuare il prodotto primo . Vi nasceranno varie potenze, e varie combinazioni delle sconosciute radici a, b, c, d .... moltiplicate fra loro . Ma per la teoria delle equazioni si ha

$$-\alpha = a + b + c + d \ldots.$$
$$\beta = ab + ac + ad \ldots\ldots + bc + bd \ldots + cd \ldots$$
$$-\gamma = abc + acd \ldots\ldots\ldots + bcd \ldots$$
$$\delta = abcd \ldots.$$

E per mezzo di α, β, γ, δ .... si troverà di poter esprimere le somme delle altre potenze, o degli altri prodotti di esse sconosciute radici, come il dimostreranno gli esempj . S' incominci da due equazioni di secondo grado

$$\begin{array}{l|c} & \text{le radici supposte} \\ z^2 + \alpha z + \beta = 0 & a\,,\ b \\ z^2 + \alpha' z + \beta' = 0 & a'\,,\ b' \end{array}$$

dunque per esser $m = n = 2$, l' equazione, a cui l' eliminamento condur deve, sarà

$$(a^2 + \alpha' a + \beta')\,(b^2 + \alpha' b + \beta') = 0,$$

che sviluppata darà

$$a^2 b^2 + \alpha' ab(a+b) + \beta'(a^2+b^2) + \alpha'^2 ab + \alpha'\beta'(a+b) + \beta'^2 = 0.$$

Or avendo $a + b = -\alpha$, $ab = \beta$, sarà $a^2 + b^2 = \alpha^2 - 2\beta$; per conseguenza la equazion cercata sarà

$$\beta^2 - \alpha'\alpha\beta + \beta'(\alpha^2 - 2\beta) + \alpha'^2\beta + \alpha'\beta'\alpha + \beta'^2 = 0.$$

Sieno al presente le due equazioni proposte di terzo grado

	le radici supposte
$z^3+\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$	$a\,,\ b\,,\ c$
$z^3+\alpha' z^2+\beta' z+\gamma=0$	$a'\,,\ b'\,,\ c'$

l'equazion cercata priva di z sarà

$$(a^3+\alpha' a^2+\beta' a+\gamma')(b^3+\alpha' b^2+\beta' b+\gamma')(c^3+\alpha' c^2+\beta' c+\gamma')=0\,,$$

che per lo sviluppo diverrà

$$a^3b^3c^3+\alpha' a^2b^2c^2(ab+ac+bc)+\beta' abc(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+\gamma'(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)$$
$$+\alpha'^2a^2b^2c^2(a+b+c)+\alpha'\beta' abc(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+\alpha'^3a^2b^2c^2$$
$$+\beta'^2abc(a^2+b^2+c^2)+\alpha'\gamma(a^3b^2+a^2b^3+a^3c^2+a^2c^3+b^3c^2+b^2c^3)+\beta'^3abc$$
$$+\gamma'^2(a^3+b^3+c^3)+\beta'\gamma'(a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3)+\gamma'^3$$
$$+\alpha'^2\beta abc(ab+ac+bc)+\alpha'\beta'\gamma'(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)$$
$$+\alpha'^2\gamma(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+\beta'^2\gamma(ab+ac+bc)+\alpha'\beta'^2abc(a+b+c)$$
$$+\beta'\gamma'^2(a+b+c)+\alpha'\gamma'^2(a^2+b^2+c^2)=0$$

intorno al quale bisogna osservare che $a+b+c=-\alpha$; $ab+ac+bc=\beta$; $abc=-\gamma$; e le altre espressioni si troveranno formate degli stessi coefficienti α, β, γ nella guisa che segue

$$a^2+b^2+c^2=\alpha^2-2\beta\,;\ a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2=-\alpha\beta+3\gamma$$
$$a^3+b^3+c^3=-\alpha^3+3\alpha\beta-3\gamma\,;\ a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3=\alpha^2\beta-\alpha\gamma-2$$
$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\beta^2-2\alpha\gamma\,;\ a^3b^2+a^2b^3+a^3c^2+a^2c^3+b^3c^2+b^2c^3=-\alpha\beta^2+2\alpha^2\gamma+\gamma$$
$$a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3=\beta^3-3\alpha\beta\gamma+3\gamma^2\,.$$

Applicando il tutto alle due

$$\text{(I)}\ z^3+\frac{B}{A}z^2+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0\,.\quad \text{(II)}\ z^3+\frac{Q}{P}z^2+\frac{R}{P}z+\frac{S}{P}=0$$

con fare

$$\alpha=\frac{B}{A},\ \beta=\frac{C}{A},\ \gamma=\frac{D}{A},\ \alpha'=\frac{Q}{A},\ \beta'=\frac{R}{P},\ \gamma'=\frac{S}{P},$$

si trova $\frac{1}{A^3P^3}(\omega)$.

Mi sono dal principio ristretto a dire ordito questo metodo da *Eulero*. Perchè 1.° si desidera in esso una teorìa sugli effetti del prodotto, la quale insegni a trovarli con certo ordine perspicuo, senza la meccanica moltiplica, e senza avvolgersi in una farragine di termini; 2.° perchè vi si desiderano le formole generali per ridurre ad essere espresse con i coefficienti α, β, γ, δ.... le somme delle potenze, e dei prodotti varj delle supposte radici a, b, c, d.... Prima che io vi supplisca vediamo i tentativi del *Cramer*.

§. II.

Calcolo del Cramer *mancante di una esatta general dimostrazione*.

Il *Cramer* dando l'anno 1750 in luce la sua preclara opera *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques*, vi aggiunse un'appendice per esporre un nuovo suo artificio, ad isfuggire nella eliminazione i troppi imbarazzi, la lunghezza laboriosa de'calcoli, e la soverchia altezza dell'equazion finale. Comincia dal presentare sotto una nuova forma le funzioni di y, che fanno da coefficienti ai termini delle due date equazioni ordinate per le potenze di z. Ecco come

$$(V)\ z^m+[1]z^{m-1}+[1^2]z^{m-2}+[1^3]z^{m-3}+[1^4]z^{m-4}\ldots\ldots+[1^m]=0$$
$$(W)\ (0)z^0+(1)z'+(2)z^2+(3)z^3+(4)z^4\ldots\ldots\ldots\ldots+(n)z^n=0$$

significando cioè con 1, 1^2, 1^3.... chiuse tra le parentesi quadrate le funzioni razionali di y, che moltiplicano a modo di coefficienti le potenze di z in una delle equazioni date (V), corrispondendo i numeri posti in capo all' 1 ai numeri sottratti da m, ossia co'quali vanno abbassandosi le potenze di z; e significando con i numeri progressivi 0, 1, 2, 3..... chiusi tra le parentesi rotonde i coefficienti delle potenze corrispondenti 0^a, 1^a, 2^a, 3^a.... di z nell'altra equazione (W). Suppongansi ora a, b, c, d.... le radici in numero m dell'equazione (V). Trasportata ciascuna nell'equazion (W) ne nasceranno numero m equazioni

$$(0)\ a^0+(1)\,a^1+(2)\,a^2+(3)\,a^3+(4)\,a^4\ldots\ldots+(n)\,a^n=0$$
$$(0)\ b^0+(1)\,b^1+(2)\,b^2+(3)\,b^3+(4)\,b^4\ldots\ldots+(n)\,b^n=0$$
$$(0)\ c^0+(1)\,c^1+(2)\,c^2+(3)\,c^3+(4)\,c^4\ldots\ldots+(n)\,c^n=0$$
$$(0)\ d^0+(1)\,d^1+(2)\,d^2+(3)\,d^3+(4)\,d^4\ldots\ldots+(n)\,d^n=0\ \text{ec.}$$

il prodotto delle quali costituirà l'equazion finale di eliminamento. La prova che *Cramer* ne adduce, non è che un ristretto della dottrina dell'Eulero sopra recata. Ma qual sarà il contenuto di tal prodotto? come assegnarne senza l'attuale moltiplica l'effetto? Ciò è in che si adopera il *Cramer*.

Si distinguano in ogni termine del desiderato prodotto il *fattor primario*, ed il *fattor secondario*, intendendo per fattor primario il prodotto dei coefficienti (0), (1), (2) . . . . . e per fattor secondario il prodotto delle radici a, b, c . . . .

In quante maniere possono combinarsi a due, a tre, a quattro ec. le potenze da 1 ad m dei coefficienti (0), (1), (2), (3) . . . . con legge, che il prodotto sia sempre del grado m, tanti saranno i fattori primarj.

A determinar con ordine queste combinazioni si cominci dal prender la potenza m^{esima} del coefficiente (0) scrivendola così (0^m); si combini poi la sua potenza $m-1^{esima}$ con ciascun altro coefficiente scrivendo $(0^{m-1}1)$, $(0^{m-1}2)$ . . . indi si combini la potenza $m-2^{esima}$ di esso con due qualunque degli altri in questo modo $(0^{m-2}1.2)$, $(0^{m-2}1.3)$ . . . . così sino a non restarvi tra le parentesi che un 0 combinato con un numero $m-1$ degli altri coefficienti. Si passi mano mano a far il simile su ciascun altro coefficiente con ordine, avvertendo di ommettere le combinazioni già avute in altra serie. A ciascun fattor primario corrisponderà il suo secondario, poichè supponendo farsi la moltiplica delle numero m equazioni, ogni coefficiente nell'andare a combinarsi o seco lui, o con qualunque altro da una in altra equazione, e dal prodotto di due in una terza, e così via via, porta seco la potenza corrispondente della radice a, b, c . . . . a cui fa da coefficiente. Acciò meglio s'intenda, sia $m=n=3$. Il fattor primario $(0.0.1)$ avrà seco unito il secondario $a^1b^0c^0+a^0b^1c^0+a^0b^0c^1=a+b+c$. Al fattor primario $(1.2.2)$ sarà accoppiato il secondario $a^1b^2c^2+a^2b^1c^2+a^2b^2c^1$; e per il fattor primario $(1.2.3)$ sarà moltiplicato il secondario $a^1b^2c^3+a^2b^1c^3+a^3b^1c^2+a^1b^3c^2+a^2b^3c^1+a^3b^2c^1$. Ma come espel-

espellere generalmente le sconosciute radici $a, b, c, d \ldots\ldots$ constituenti nelle varie combinazioni delle potenze loro i fattori secondarj? Riflette primieramente *Cramer* che, essendo per ipotesi $a, b, c, d \ldots\ldots$ le radici dell'equazione (V), per la teorìa delle equazioni ne segue essere $a+b+c\ldots=[1]$ coefficiente di z^{m-1} in essa (V), cioè il fattor secondario del primario $(0^{m-1}1)=[1]$; il fattor secondario del primario $(0^{m-2}1.1)=ab+ac+ad\ldots\ldots+bc+bd\ldots\ldots+cd\ldots\ldots=[1^2]$; il fattor secondario del primario $(0^{m-3}1.1.1)=abc+abd\ldots\ldots+acd\ldots\ldots+bcd\ldots\ldots=(1^3)$, e così di seguito, in modo che ottengonsi immediatamente e senza calcolo per i coefficienti dell'equazione data (V) tutti i fattori secondarj che hanno a primarj loro non altro che la potenza 0^{m-h} ed un numero di volte h l'1. Dopo di che l'Autore insegna ad ottenere con ordine per i medesimi coefficienti le espressioni degli altri fattori secondarj tutti col mezzo di un teorema che spiega con un esempio.

Sia da trovarsi il fattor secondario del primario $(0^{m-3}1.2.3)$; si scomponga questo in due parti, una delle quali sia $(0^{m-2}2)$ fornita di una sola cifra significativa, qual è 2 minore di una unità della massima 3, che vi ha nel proposto fattor primario; l'altra parte sia $(0^{m-3}1.1.2)$, che da esso non differisce se non in quanto la massima cifra 3 è cangiata in 1; onde ne viene, che la somma delle cifre significative nelle due parti, cioè $2+1+1+2$ riesce uguale alla somma delle cifre significative $1+2+3$ del fattor primario proposto. Prendendo ora i fattori primarj per indici dei secondarj rispettivi si avrà l'equazione

$$(0^{m-3}1.1.2)\times(0^{m-1}2)=(0^{m-3}1.1.4)+(0^{m-3}1.2.3)+2(0^{m-4}1.1.2.2)$$

il cui vero senso è: il prodotto dei due fattori secondarj dei primarj $(0^{m-3}1.1.2)$, $(0^{m-2}2)$ è uguale al fattor secondario del primario $(0^{m-3}1.1.4)$, più il fattor secondario del primario $(0^{m-3}1.2.3)$, più due volte il fattor secondario del primario $(0^{m-4}1.1.2.2)$. Il numero de' fattori primarj nel secondo membro dipende dal numero delle qualunque cifre diverse, che sono nel *fattor primario moltiplicando* del primo membro: distinguendo con tal nome quello de' due di esso membro, al quale date si sono tante cifre significative, quante ne aveva il fattor primario proposto; e chiamando quello, a cui attribuita se n'è una sola, *fattor primario moltiplicatore*. Nell'esempio recato il moltiplicando è $(0^{m-3}1.1.2)$, in cui vi sono tre cifre diverse 0, 1, 2; perciò tre sono nel secondo membro dell'equazione i fattori primarj. Per ogni cifra di esso moltiplicando se ne determina uno accrescendola del 2, che è la cifra unica significativa del moltiplicatore $(0^{m-1}2)$, ed accoppiando essa cifra così accresciuta alle altre o semplici o iterate del moltiplicando lasciate nell'esser loro. La cifra 2 accresciuta di 2 dona 4, che associata alle due 1.1 del moltiplicando forma il primo fattor primario del secondo membro $(0^{m-3}1.1.4)$; aggiungendo 2 alla cifra del moltiplicando 1 ne viene 3, ed accoppiandolo all'altro 1 ed al 2 di esso moltiplicando si ha il secondo fattor primario $(0^{m-3}1.2.3)$; l'aggiugnere 2 alla cifra del moltiplicando 0 rende 2, il cui associamento alle cifre di esso 1.1.2 porta una replica del 2, e produce il terzo fattor primario $(0^{m-4}1.1.2.2)$. Questo vien preso due volte, ossia moltiplicato per 2, perchè contiene duplicata la cifra 2, che nel moltiplicando è semplice. E generalmente se nel moltiplicando vi fosse numero K di volte una cifra, e riuscisse numero K + 1 di volte in uno dei fattori primarj del secondo membro formati nel modo esposto, dovrebbe questo fattor primario moltiplicarsi per K + 1. Il secondo dei fattori primarj del secondo membro è, come si sarà di già avvertito, il fattor primario proposto, di cui si cercava il fattor secondario; e così ben penetrando la regola comprendesi dover sempre avvenire, cioè che tra i fattori primarj del secondo membro dell'equazione vi cada il fattor primario, di cui fu proposto trovare il fattor secondario. Trasportandolo solo da una parte si avrà l'intento, come nell'esempio

$$(u)(0^{m-3}1.2.3)=(0^{m-3}1.1.2)\times(0^{m-1}2)-(0^{m-3}1.1.4)-2(0^{m-4}1.1.2.2).$$

Il significato della quale equazione è: il fattor secondario del primario $(0^{m-3}1 . 2 . 3)$ è eguale al prodotto dei due fattori secondarj spettanti ai due primarj $(0^{m-3}1 . 1 . 2)$, $(0^{m-1}2)$, meno il fattor secondario del primario $(0^{m-3}1 . 1 . 4)$, meno in oltre il doppio del fattor secondario, cui per primario compete $(0^{m-4}1 . 1 . 2 . 2)$. Nel caso, ad esempio, di $m = 3$ sarà

$$ab^2c^3 + a^2bc^3 + a^3bc^2 + ab^3c^2 + a^2b^3c + a^3b^2c =$$
$$(abc^2 + ab^2c + a^2bc)(a^2 + b^2 + c^2) - (a^4bc + ab^4c + abc^4),$$

essendo la serie dei prodotti nel primo membro il fattor secondario del primario $(1 . 2 . 3)$, a cui riducesi in tal caso di $m = 3$ il generale $(0^{m-3}1 . 2 . 3)$; essendo l'aggregato $abc^2 + ab^2c + a^2bc$ il fattor secondario attinente al primario $(1 . 1 . 2)$; $a^2 + b^2 + c^2$ il secondario del primario $(0 . 0 . 2)$; e l'aggregato $a^4bc + ab^4c + abc^4$ il fattor secondario relativo al primario $(1 . 1 . 4)$. Il termine $-2(0^{m-4}1 . 1 . 2 . 2)$ non ha luogo posto $m = 3 < 4$, e si vede chiara la ragione, richiamando a memoria la generazione di esso termine formato coll' aggiunta del 2 cifra unica significativa del moltiplicatore $(0^{m-1}2)$ alla cifra 0 del moltiplicando $(0^{m-3}1 . 1 . 2)$, la qual cifra 0 da esso moltiplicando sparisce nel caso di $m = 3$ restando solo $(1 . 1 . 2)$. Che l'equazione sia vera, si toccherà con mano eseguendo la moltiplica, e la sottrazione, che nel secondo membro sono indicate. Mi è piaciuto di sciegliere a prova della verità dell'equazione (u) questo esempio in luogo dell'esempio, a cui l'Autore l'appoggia, affine che dal termine ommesso apparisse la regola da tenersi in casi simili. Conformemente a ciò, che si è fatto sul fattor primario $(0^{m-3}1 . 2 . 3)$ operando su qualunque altro, del quale si desideri il fattor secondario, cominciando dal fattore primario più semplice, e ordinatamente procedendo ai più composti, si determineranno tutti i fattori secondarj, e si verrà a capo di ottener l'equazione finale dell'eliminamento. Ma non cercando *Cramer* del suo teorema una general dimostrazione, il suo calcolo manca di un matematico sostegno, ed ha bisogno di essere esso pure perfezionato;

per la qual cosa non è per ogni parte idoneo a perfezionare quello dell' *Eulero*.

§. III

Calcolo composto di quelli di Eulero *e* Cramer *perfezionati*.

È dimostrato comunemente dietro il *Newton* il Teorema seguente

TEOREMA I. Data l' equazione

$$(\mathrm{M})\quad Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + Dz^{m-3} \ldots\ldots + O = 0,$$

o dividendo per A

$$(\mathrm{M})\quad z^m + \frac{B}{A}z^{m-1} + \frac{C}{A}z^{m-2} + \frac{D}{A}z^{m-3} \ldots\ldots + \frac{O}{A} = 0$$

se le sue radici suppongansi $a, b, c, d \ldots\ldots$ e si faccia

$$\Pi^{(1)} = a + b + c + d \ldots\ldots$$

$$\Pi^{(2)} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ldots\ldots$$

$$\Pi^{(3)} = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \ldots\ldots$$

generalmente $\Pi^{(r)} = a^r + b^r + c^r + d^r \ldots\ldots$

sarà $\Pi^{(r)} = -\frac{B}{A}\Pi^{(r-1)} - \frac{C}{A}\Pi^{(r-2)} - \frac{D}{A}\Pi^{(r-3)} \ldots\ldots \frac{rF}{A} \ldots\ldots$

intendendo per $\frac{F}{A}$ il coefficiente del termine z^{m-r} sino a tanto che $r <$ od $= m$, poichè al di là, divenendo cioè $r > m$ la formola finirà da sè in $\frac{O}{A}\Pi^{(r-m)}$.

Da questo Teorema si tira

TEOREMA II. Se per $\Pi^{(s,\,t)}$ si concepisca rappresentata la somma $a^sb^t + a^tb^s + a^sc^t + a^tc^s \ldots\ldots$

Sarà $\Pi^{(s,\,t)} = \Pi^{(s)}.\Pi^{(t)} - \Pi^{(s+t)}$. Poichè moltiplicando $\Pi^{(s)}$ cioè $a^s + b^s + c^s \ldots\ldots$ per $\Pi^{(t)}$ vale dire per $a^t + b^t + c^t \ldots\ldots$ ne proverranno tutti i termini della forma a^{s+t}, e tutti quelli della a^sb^t: dunque rimane dimostrato il Teorema.

È facile vedere che nel caso di $s = t$ i prodotti saranno a due a due uguali, cioè $a^s b^t = a^t b^s$, $a^s c^t$ .... dunque non volendosi che la somma dei prodotti dissimili, si dovrà dividere il provento di $\Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} - \Pi^{(s+t)}$ per 2.

E se per $\Pi^{(s,t,u)}$ si rappresenti la somma

$a^s b^t c^u + a^s b^u c^t + a^t b^s c^u + a^t b^u c^s + a^u b^t c^s + a^u b^s c^t \ldots + a^s b^t d^u \ldots$

sarà

$\Pi^{(s,t,u)} = \Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(u)} - \Pi^{(s+t+u)} - \Pi^{(s+t,u)} - \Pi^{(s+u,t)} - \Pi^{(t+u,s)}$.

Poichè dal prodotto $\Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(u)}$ ne nasceranno i termini delle cinque forme a^{s+t+u}, $a^{s+t} b^u$, $a^{s+u} b^t$, $a^{t+u} b^s$, $a^s b^t c^u$; dunque ec.

Se $s = t$ saranno i prodotti uguali a due a due, $a^s b^t c^u = a^t b^s c^u$, $a^s b^u c^t = a^t b^u c^s$ .... onde il provento della formola, desiderando quello solo dei prodotti dissimili, si dovrà divider per due. Che se sia $s = t = u$ saranno i termini uguali a sei a sei, $a^s b^t c^u = a^s b^u c^t = a^t b^s c^u = a^t b^u c^s = a^u b^t c^s = a^u b^s c^t$; per lo che volendo ristrigner il provento ai soli prodotti dissimili si dovrà divider per 6.

Si comprende già il progresso di questa bellissima specie di formole, che diede *Waring* nelle sue *Miscell. Anal. e Medit. Alg.* Probl. III. Or $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(s,t)}$, $\Pi^{(s,t,u)}$ .... rappresentano in genere quelli che il *Cramer* chiama fattori secondarj. Ecco pertanto il modo di perfezionare il metodo dell'*Eulero* con il calcolo del *Cramer* perfezionato. Date le due equazioni

$$\text{(I)} \quad Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + Dz^{m-3} \ldots + O = 0$$

$$\text{(II)} \quad Pz^n + Qz^{n-1} + Rz^{n-2} + Sz^{n-3} \ldots + U = 0,$$

si esprimano i coefficienti delle potenze di z nella equazion (II) alla maniera di *Cramer* dando ad essa equazione la forma

$$(0)\, z^0 + (1)\, z^1 + (2)\, z^2 + (3)\, z^3 + (4)\, z^4 \ldots + (n)\, z^2 = 0.$$

Si formino in ordine i fattori primarj cominciando dal prendere la potenza m^{esima} del coefficiente (0), poi combinando la sua potenza $m - 1^{esima}$ con ciascun degli altri coefficienti, indi combinando la potenza sua $m - 2^{esima}$ con tutti i possibili ambi degli altri ec.; il simile facciasi successivamente su ciascun degli altri coefficienti, ma con rigettare le combinazioni già antecedentemente avute, e notate, notando le sole nuove, il numero delle quali si anderà mano mano scemando sino a ridursi l'operazione combinatoria su l'ultimo coefficiente (n), alla sola combinazione di esso seco lui numero m volte, cioè alla sua potenza m^{esima}. Adoperando per rappresentare i fattori secondarj in genere le specie $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(s,\,t)}$, $\Pi^{(s,\,t,\,u)}$ .... si particolarizzino per i numeri dei primarj fattori i generali indici r, s, t, u ...., e ad ogni fattor primario si accoppj la specie per esso particolarizzata esprimente il suo fattor secondario. Finalmente per i due esposti, e dimostrati teoremi si determini qualunque delle particolari $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(s,\,t)}$, $\Pi^{(s,\,t,\,u)}$ ......, e l'equazion finale di eliminamento desiderata sarà formata.

Sia $m=n=3$, cioè sieno le due equazioni date di terzo grado

$$(\mathrm{I})\ Az^3+Bz^2+Cz+D=0 \quad (\mathrm{II})\ Pz^3+Qz^2+Rz+S=0$$

la seconda delle quali cangiati i coefficienti alla maniera del *Cramer* si esponga così:

$$(\mathrm{II})\ (0)\,z^0+(1)\,z^1+(2)\,z^2+(3)\,z^3=0\,.$$

La schiera ordinata dei fattori primarj, unitivi i rispettivi secondarj espressi colle specie che ho assegnato, sarà

$$\begin{gathered}(0.0.0)+(0.0.1)\Pi^{(1)}+(0.1.1)\Pi^{(1,1)}+(1.1.1)\Pi^{(1,1,1)}+(2.2.2)\Pi^{(2,2,2)}+(3.3.3)\Pi^{(3,3,3)}\\ +(0.0.2)\Pi^{(2)}+(0.2.2)\Pi^{(2,2)}+(1.1.2)\Pi^{(1,1,2)}+(2.2.3)\Pi^{(2,2,3)}\\ +(0.0.3)\Pi^{(3)}+(0.3.3)\Pi^{(3,3)}+(1.1.3)\Pi^{(1,1,3)}+(2.3.3)\Pi^{(2,3,3)}\\ +(0.1.2)\Pi^{(1,2)}+(1.2.2)\Pi^{(1,2,2)}\\ +(0.1.3)\Pi^{(1,3)}+(1.3.3)\Pi^{(1,3,3)}\\ +(0.2.3)\Pi^{(2,3)}+(1.2.3)\Pi^{(1,2,3)}\end{gathered}$$

È evidente potersi invertire; il che sarebbe l'effetto di un ordine di combinazioni rovescio. Per la teoria generale delle equazioni si hanno tosto

$$\Pi^{(1)}=-\frac{B}{A}\,;\ \Pi^{(1,\,1)}=\frac{C}{A}\,;\ \Pi^{(1,\,1,\,1)}=-\frac{D}{A}\,.$$

Per il primo Teorema si trova

$$\Pi^{(2)}=\frac{B^2}{A^2}-\frac{2C}{A}\,;\ \Pi^{(3)}=-\frac{B^3}{A^3}+\frac{3BC}{A^2}-\frac{3D}{A}\ldots.$$

Bisogna giugner sino a $\Pi^{(9)}$, quantunque nell'equazione non vi sia più che $\Pi^{(3)}$; ma $\Pi^{(9)}$ è necessario per determinar con l'uso del Teorema secondo il $\Pi^{(3,3,3)}$ .... Similmente per esso secondo Teorema fa d'uopo premettere il calcolo di parecchj casi, che non entrano propriamente nell'equazione, ma che servono per la determinazione di quelli che vi entrano. Sarebbe troppo lungo ed inutile lo stender qui intero il giro delle determinazioni tutte, e ausiliarie, e principali. Basta offrir queste a' luoghi loro

$$\begin{array}{ll}
(0.0.0)+(0.0.1)\left(\frac{-B}{A}\right) & +(1.1.1)\left(\frac{-D}{A}\right)+(3.3.3)\left(\frac{-D^3}{A^3}\right) \\
\quad +(0.0.2)\left(\frac{B^2}{A^2}-\frac{2C}{A}\right) & +(1.1.2)\left(\frac{BD}{A^2}\right) \\
\quad +(0.0.3)\left(\frac{-B^3}{A^3}+\frac{3BC}{A^2}-\frac{3D}{A}\right) & +(1.1.3)\left(\frac{2CD}{A^2}-\frac{B^2D}{A^3}\right) \\
+(0.1.1)\left(\frac{C}{A}\right) & +(1.2.2)\left(\frac{-CD}{A^2}\right) \\
+(0.2.2)\left(\frac{C^2}{A^2}-\frac{2BD}{A^2}\right) & +(1.3.3)\left(\frac{-C^2D}{A^3}+\frac{2BD^2}{A^3}\right) \qquad = 0 \\
+(0.3.3)\left(\frac{C^3}{A^3}-\frac{3BCD}{A^3}+\frac{3D^2}{A^2}\right) & +(1.2.3)\left(\frac{BCD}{A^3}-\frac{3D^2}{A^2}\right) \\
+(0.1.2)\left(\frac{-BC}{A^2}+\frac{3D}{A}\right) & +(2.2.2)\left(\frac{D^2}{A^2}\right) \\
+(0.1.3)\left(\frac{B^2C}{A^3}-\frac{2C^2}{A^2}-\frac{BD}{A^2}\right) & +(2.2.3)\left(\frac{-BD^2}{A^3}\right) \\
+(0.2.3)\left(\frac{-BC^2}{A^3}+\frac{2B^2D}{A^3}+\frac{CD}{A^2}\right) & +(2.3.3)\left(\frac{CD^2}{A^3}\right)
\end{array}$$

Rimettendo in luogo degli ausiliarj coefficienti (0), (1), (2), (3) i dati S, R, Q, P, e così in luogo di (0.0.0) prendendo S^3, in luogo di (0.0.1) S^2R ec., si troverà questa equazione, che segnerò (Λ) convenir con lo sviluppo (ω'') della Bezoutiana (ω) diviso per A^3, cioè essere $(\Lambda)=\frac{1}{A^3}(\omega)$.

§. IV

Calcolo del La Grange *corretto e semplificato*.

Il celebratissimo *La Grange* nel volume dell' Accademia di Berlino per l' anno 1769, sebben dell' avviso che *Eulero*, *Cramer*, *Bezout* fossero tutti ben riusciti a dare dei mezzi per evitare nella eliminazione l' inconveniente di una equazione finale oltre il dovere elevata; cionulladimeno si accinse egli pure ad esercitare intorno al medesimo oggetto l' esimia sua analitica industria, assumendosi di offerire un metodo godente il vantaggio di ridurre la eliminazione a delle formole generali e semplicissime, quali potessero con facilità gli analisti adattare al bisogno. Lo spirito del suo metodo è questo. Si diano alle date equazioni le seguenti forme

$$(\vartheta)\quad 1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4 \ldots\ldots +\theta z^m=0$$

$$(\lambda)\quad 1+\frac{\alpha'}{z}+\frac{\beta'}{z^2}+\frac{\gamma'}{z^3}+\frac{\delta'}{z^4}\ldots\ldots+\frac{\tau'}{z^n}=0\,.$$

Supponghasi, che $1-az$, $1-bz$, $1-cz$, $1-dz$ ..... al numero di m sieno i fattori dell' equazione (ϑ), di modo che $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ .... al numero m sieno le sue radici. Dunque $(\vartheta)=(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)\ldots\ldots$, e sostituendo ciascheduna delle medesime radici nell' equazione (λ) ne proverranno le numero m equazioni

$$(f)\quad 1+\alpha' a+\beta' a^2+\gamma' a^3+\delta' a^4 \ldots\ldots +\tau' a^m=0$$

$$(g)\quad 1+\alpha' b+\beta' b^2+\gamma' b^3+\delta' b^4 \ldots\ldots +\tau' b^n=0$$

$$(h)\quad 1+\alpha' c+\beta' c^2+\gamma' c^3+\delta' c^4 \ldots\ldots +\tau' c^n=0$$

$$(i)\quad 1+\alpha' d+\beta' d^2+\gamma' d^3+\delta' d^4 \ldots\ldots +\tau' d^n=0 \text{ ec.}$$

Segnando il prodotto di queste tutte (Γ) sarà

$$(\Gamma)=(f)\,(g)\,(h)\,(i)\ldots\ldots=0$$

l' equazion finale di eliminamento.

Questo, che è il fondo del metodo dell' *Eulero*, quello si è pure, su cui il suo alza il *La Grange*. La diversità consiste

siste nel modo di formare il prodotto (Γ). Appoggia il *La Grange* il calcolo suo ad una formola logaritmica, che per comoda citazione in seguito porrò io qui sotto il titolo di Lemma.

Lemma. $l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots.$

Facendo successivamente $x=-az,\ =-bz,\ =-cz\ldots..$ si troverà

$$l(\vartheta)=l(1-az)+l(1-bz)+l(1-cz)+l(1-dz)\ldots.$$
$$=-z(a+b+c\ldots)-\tfrac{1}{2}z^2(a^2+b^2+c^2\ldots)-\tfrac{1}{3}z^3(a^3+b^3+c^3\ldots)$$
$$=-\lambda z-\tfrac{1}{2}\mu z^2-\tfrac{1}{3}v z^3-\tfrac{1}{4}\xi z^4\ldots.$$

compendiando in λ la somma $a+b+c\ldots.$, in μ la somma $a^2+b^2+c^2\ldots.$, in v la somma $a^3+b^3+c^3\ldots.$ ec.

Sarà similmente

$$l(f)=-\lambda' a-\tfrac{1}{2}\mu' a^2-\tfrac{1}{3}v' a^3-\tfrac{1}{4}\xi' a^4\ldots.$$
$$l(g)=-\lambda' b-\tfrac{1}{2}\mu' b^2-\tfrac{1}{3}v' b^3-\tfrac{1}{4}\xi' b^4\ldots.$$
$$l(h)=-\lambda' c-\tfrac{1}{2}\mu' c^2-\tfrac{1}{3}v' c^3-\tfrac{1}{4}\xi' c^4\ldots.$$
$$l(i)=-\lambda' d-\tfrac{1}{2}\mu' d^2-\tfrac{1}{3}v' d^3-\tfrac{1}{4}\xi' d^4\ldots.\ \text{ec.}$$

intendendo per λ', μ', v' ..... delle somme analoghe alle λ, μ, v ...., le quali è evidente dover essere riguardo a tutti li $l(f)$, $l(g)$, $l(h)$ .... le medesime, avendo le (f), (g), (h) .... tutte la costituzione medesima, e diverso solamente il simbolo della incognita, che in (f) è a, in (g) è b.... Per lo che essendo $l(\Gamma)=l(f)+l(g)+l(h)+l(i)\ldots..$ sarà

$$l(\Gamma)=-\lambda'(a+b+c\ldots)-\tfrac{1}{2}\mu'(a^2+b^2+c^2\ldots)-\tfrac{1}{3}v'(a^3+b^3+c^3\ldots)-\ldots$$
$$=-\lambda\lambda'-\tfrac{1}{2}\mu\mu'-\tfrac{1}{3}vv'-\tfrac{1}{4}\xi\xi'\ldots.=0.$$

Ponendo il secondo membro $=-\phi$ si avrà $l(\Gamma)=-\phi$, donde $(\Gamma)=e^{-\phi}$, supposta e la base dei logaritmi iperbolici; e risolvendo in serie la quantità esponenziale,

$$(\Gamma)=1-\phi+\tfrac{1}{2}\phi^2-\frac{1}{2.3}\phi^3\ldots.=0.$$

Per determinar le somme λ, μ, v .... λ', μ', v' .... una via spedita somministra il calcolo differenziale; poichè essendo $l(\vartheta)$ cioè $l(1+\alpha z+\beta' z^2+\delta z^3\ldots)=-\lambda z-\frac{1}{2}\mu z^2-\frac{1}{3}v z^3-\frac{1}{4}\xi z^4\ldots.$, variando z sarà

$$\frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots.}{1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 \ldots.} = -\lambda - \mu z - v z^2 - \xi z^3 \ldots$$

Onde, tolta la frazione, e paragonati i termini si ricaverà

$$\lambda = -\alpha$$
$$\mu = \alpha^2 - 2\beta$$
$$v = -\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\gamma$$
$$\xi = \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2 - 4\alpha\gamma - 4\delta.$$

Similmente differenziando qual più piaccia delle equazioni di $l(f)$, $l(g)$, $l(h)\ldots$ con far variare quella delle radici $a, b, c\ldots$, che le serve da incognita, si troverà

$$\lambda' = -\alpha'$$
$$\mu' = \alpha'^2 - 2\beta'$$
$$v' = -\alpha'^3 + 3\alpha'\beta' - 3\gamma'$$
$$\xi' = \alpha'^4 - 4\alpha'^2\beta' + 2\beta'^2 - 4\alpha'\gamma' - 4\delta' \text{ ec.}$$

Sarà dunque

$$\varphi = \alpha\alpha' + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - 2\beta)(\alpha'^2 - 2\beta') + \tfrac{1}{3}(-\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\gamma)$$
$$(-\alpha'^3 + 3\alpha'\beta' - 3\gamma') + \tfrac{1}{4}(\alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2 - 4\alpha\gamma - 4\delta)$$
$$(\alpha'^4 - 4\alpha'^2\beta' + 2\beta'^2 - 4\alpha'\gamma' - 4\delta') \ldots.$$

quindi si formeranno φ^2, $\varphi^3\ldots$ e si determinerà (Γ).

È però a riflettersi, che essendo fondamentalmente $(\Gamma) = (f)\,(g)\,(h)\,(i)\ldots.$ in ognuna delle quali equazioni cadauno dei coefficienti α', β', γ', $\delta'\ldots.$ non vi è, che nello stato semplice; e non potendo perciò nel prodotto di esse equazioni al numero di m montare ciascuno che alla potenza m, o formare tra loro che un prodotto di grado m; per conseguenza si dovranno dalla serie del valore di φ rigettare come incompetenti quei termini, ne'quali i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ salgono a podestà, o prodotti di grado superiore al m. Ed istessamente rigettar si dovranno i nuovi termini contenenti podestà o prodotti di essi coefficienti oltra il grado m, che verranno a nascere formando φ^2, $\varphi^3\ldots.$ Se si invertisse il calcolo tutto, cioè, se immaginando che le radici dell'equazione (λ), si trasportassero nell'equazione (ϑ), ed ottenute altrettante equazioni, al numero n, se ne formasse il prodotto, si perverrebbe ad una equazione finale

$$(\Gamma') = 1 - \varphi' + \tfrac{1}{2}\varphi'^2 - \tfrac{1}{3}\varphi'^3 + \tfrac{1}{4}\varphi'^4 \ldots.$$

E per esser (Γ') il prodotto di un numero n di equazioni, in ciascheduna delle quali avrebbero i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots.$ stato semplice, si dedurrebbe non poter essi nel prodotto ascendere, che a potenze, o prodotti di grado n al più, e perciò doversi da φ', φ'^2, $\varphi'^3 \ldots.$ rigettare tutti quei termini, che comprendessero potenze, o prodotti de' medesimi coefficienti al grado n superiori. Ma l'effetto di questo calcolo inverso coincider debbe con l'effetto del calcolo primiero, la stessa stessissima equazion finale debbe uscirne, siccome la cosa in sè medesima contemplata dà divedere, e siccome all'occhio apparisce dal determinarsi nell'uno, e nell' altro calcolo le somme $\lambda, \mu, v \ldots. \lambda', \mu', v' \ldots.$ alla stessa maniera; dunque identificandosi φ' con φ, (Γ') con (Γ), possiamo ne' simboli φ, (Γ) concentrare la duplice rappresentazione delle due finali equazioni, ed unendo le due conclusioni formare la regola, che segue.

Regola. Dall' equazione $(\Gamma) = 1 - \varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{6}\varphi^3 \ldots.$ rigettar si debbono tutti quei termini, che contengon potenze o prodotti de' coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots.$ al grado n superiori, o de' coefficienti $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \ldots.$ reciprocamente potenze e prodotti superiori al grado m. E in altra forma di parlare: nella finale equazione (Γ) le potenze o prodotti de' coefficienti di una delle date equazioni non debbono in termine alcuno oltrepassare il grado dell' altra equazione.

Si stimerà forse sconvenevole l'uso del calcolo differenziale in un argomento, che è tutto dell'analisi finita. Io l'ho trascelto per primo tra i due modi, co' quali il *La Grange* determina le somme $\lambda, \mu, v \ldots. \lambda', \mu', v' \ldots.$ siccome il più spedito, intendendo a risparmiar la complicazione del calcolo nell'atto di dilucidarne i principj, a fine che la mente del leggitore meno occupata da intralcj di formole con più di agevolezza potesse chiaro penetrare l'essenza del metodo. Or che spero ottenuto l'intento, ecco anche l'altro modo dall' Autore adoperato il primo, e dal *Lemma* derivato.

Dell' equazione
$l(\vartheta)$ ossia $l(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 \ldots) = l(1 - \alpha z) + l(1 - bz) + l(1 - cz) + l(1 - dz) \ldots$ si è già per mezzo del *Lemma* svolto il secondo membro, e ritrovato
$l(1-az)+l(1-bz)+l(1-cz)+l(1-dz) \ldots = -\lambda z - \frac{1}{2}\mu z^2 - \frac{1}{3}\nu z^3 - \frac{1}{4}\xi z^4 \ldots$
Si svolga di presente con l'ajuto dello stesso *Lemma* eziandio il primo membro, facendo $x = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 \ldots = z(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots)$: si troverà
$l(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 \ldots) = z(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots) - \frac{1}{2} z^2 (\alpha + \beta x + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots)^2 + \frac{1}{3} z^3 (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots)^3 \ldots$
Si eseguiscano le podestà qui indicate, si raccolgano in uno i coefficienti di z, quelli di $z^2 \ldots$ poi si paragoni termine a termine questo svolgimento immediato di $l(\vartheta)$ con lo svolgimento della somma logaritmica de' suoi fattori, e si otterranno le determinazioni bramate di $\lambda, \mu, \nu \ldots$ Per simil maniera sviluppando una qualunque delle equazioni di $l(f)$, $l(g)$, $l(h) \ldots$ per esempio quella di $l(f)$, e ponendo lo sviluppo $= -\lambda' a - \frac{1}{2}\mu' a^2 - \frac{1}{3}\nu' a^3 \ldots$ si determineranno $\lambda', \mu', \nu' \ldots$ Il calcolo però riesce laborioso.

Ma che sono in fine, dico io, le $\lambda, \mu, \nu \ldots$, e le $\lambda', \mu', \nu' \ldots$? Sono $\lambda, \mu, \nu \ldots$ le somme delle semplici quantità, dei quadrati, dei cubi, delle più alte podestà di $a, b, c, d \ldots$ denominatori delle supposte radici dell'equazione (ϑ); supposto essendosi in essa $z = \frac{1}{a}, = \frac{1}{b}, = \frac{1}{c}, = \frac{1}{d} \ldots$ Or da questa ipotesi stessa si tira $\frac{1}{z} = a, = b, = c, = d \ldots$ Se dunque facciasi $\frac{1}{z} = z'$ sarà $z' = a, = b, = c, = d \ldots$ e dividendo l'equazione (ϑ) per z^m, e poi in luogo di $\frac{1}{z}$ sostituendo z', ne nascerà l'equazione inversa, o reciproca

$$(\vartheta') \quad z'^m + \alpha z'^{m-1} + \beta z'^{m-2} + \gamma z'^{m-3} + \delta z'^{m-4} \ldots = 0,$$

che avrà per sue radici $a, b, c, d \ldots$, delle quali λ sarà la somma, e $\mu, \nu \ldots$ le somme dei quadrati, de' cubi ....

Per la qual cosa, richiamando il simbolo generale superiormente nel metodo del *Cramer* introdotto $\Pi^{(r)}$, sono le λ, μ, v . . . le $\Pi^{(r)}$ relative all'equazione (ϑ'), reciproca alla data (ϑ).

Di simil guisa comprendesi dover essere le λ', μ', v' . . . le $\pi^{(r)}$ relative a qualsivoglia delle reciproche delle (f), (g), (h), (i) . . . . relative cioè a qualsivoglia delle

$$1 + \alpha' \cdot \frac{1}{a} + \beta' \cdot \frac{1}{a^2} + \gamma' \cdot \frac{1}{a^3} + \delta' \cdot \frac{1}{a^4} \ldots\ldots = 0$$

$$1 + \alpha' \cdot \frac{1}{b} + \beta' \cdot \frac{1}{b^2} + \gamma' \cdot \frac{1}{b^3} + \delta' \cdot \frac{1}{b^4} \ldots\ldots = 0$$

$$1 + \alpha' \cdot \frac{1}{c} + \beta' \cdot \frac{1}{c^2} + \gamma' \cdot \frac{1}{c^3} + \delta' \cdot \frac{1}{c^4} \ldots\ldots = 0$$

$$1 + \alpha' \cdot \frac{1}{d} + \beta' \cdot \frac{1}{d^2} + \gamma' \cdot \frac{1}{d^3} + \delta' \cdot \frac{1}{d^4} \ldots\ldots = 0 \text{ ec.}$$

le quali tutte vengono rappresentate dalla

$$(\lambda') \quad 1 + \alpha' \cdot \frac{1}{z'} + \beta' \cdot \frac{1}{z'^2} + \gamma' \cdot \frac{1}{z'^3} + \delta' \cdot \frac{1}{z'^4} \ldots\ldots + \tau' \cdot \frac{1}{z'^n} = 0$$

o sia

$$z'^2 + \alpha' z'^{n-1} + \beta' z'^{n-2} + \gamma' z'^{n-3} + \delta' z'^{n-4} \ldots\ldots + \tau' = 0 .$$

Ecco dunque a che riduco io il metodo del *La Grange*. In luogo delle due equazioni

$$(\vartheta) \quad 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 \ldots\ldots + \theta z^m = 0$$

$$(\lambda) \quad 1 + \frac{\alpha'}{z} + \frac{\beta'}{z^2} + \frac{\gamma'}{z^3} + \frac{\delta'}{z^4} \ldots\ldots + \frac{\tau'}{z^n} = 0,$$

si prenda a considerare il pajo di equazioni

$$(\vartheta') \quad z'^m + \alpha z'^{m-1} + \gamma z'^{m-2} + \delta z'^{m-3} \ldots\ldots \theta = 0$$

$$(\lambda') \quad z'^n + \alpha' z'^{n-1} + \gamma' z'^{n-2} + \delta' z'^{n-3} \ldots\ldots + \tau' = 0$$

Si cerchino le $\Pi^{(r)}$ relative alla (ϑ') per mezzo della formola

$$\Pi^{(r)} = -\alpha\Pi^{(r-1)} - \beta\Pi^{(r-2)} - \gamma\Pi^{(r-3)} - \delta\Pi^{(r-4)} \ldots\ldots - r\xi,$$

intendendo per ξ il coefficiente del termine z^{m-r}, sinchè $r <$ od $= m$; poichè al di là, cioè divenendo $r > m$, la formola finirà da sè in θz^{r-m}. Similmente si cerchino le $\pi^{(r)}$ relative alla (λ') per la formola

$$\pi^{(r)} = -\alpha'\pi^{(r-1)} - \beta'\pi^{(r-2)} - \gamma'\pi^{(r-3)} - \delta'\pi^{(r-4)} \ldots\ldots - r\xi'.$$

Se ben però si attenda alla regola di escluder dalla equazion finale tutti i termini, nei quali le potenze, od i prodotti de' coefficienti di un'equazione sorpassino il grado dell'altra, deducesi potersi risparmiar la fatica di una particolar ricerca delle $\pi^{(r)}$. Poichè, supponendo $m < n$, determinate tutte le convenienti $\Pi^{(r)}$, nelle quali conservar si debbono tutti i termini non eccedenti il grado n, si tireranno da esse le convenienti $\pi^{(r)}$, trascegliendo i soli termini non eccedenti il grado m, e cangiando in essi i coefficienti α, β, γ, δ .... negli α', β', γ', δ' .... E nel caso di $m = n$ non si avrà che a cangiar gli uni coefficienti negli altri in tutti i termini. Generalmente dunque il calcolo tutto si riduce alla determinazione delle $\Pi^{(r)}$; e la regola medesima assegna ad esso calcolo il limite. Al giunger ad una $\Pi^{(r)}$, la cui $\Pi^{(r-m)}$ già trovata non abbia termine veruno di grado $n - 1$, si tralasci di determinarla; poichè essendo ogni più basso termine di $\Pi^{(r-m)}$ del grado n, il prodotto $\theta\Pi^{(r-m)}$ ultima parte, e la più bassa di $\Pi^{(r)}$ salirebbe oltre il grado n. Per un altro risparmio di calcolo, in luogo di determinar le $\Pi^{(r)}$ intere, riservandosi a purgarle poscia dei termini incompetenti, si purghino a dirittura tra via, di mano in mano che si van formando, poichè purgate le inferiori minor si renderà il numero de' termini di eccedente grado nelle superiori, e più spedita, quanto più contratta, riuscirà la successiva formazion loro.

Vediamo un esempio nel caso di $m = n = 3$, cioè di due equazioni di terzo grado. Avremo, rigettati passo passo i termini al terzo grado superiori,

$$\begin{array}{ll}
\Pi^{(1)} = -\alpha & \pi^{(1)} = -\alpha' \\
\Pi^{(2)} = \alpha^2 - 2\beta & \pi^{(2)} = \alpha'^2 - 2\beta' \\
\Pi^{(3)} = -\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\gamma & \pi^{(3)} = -\alpha'^3 + 3\alpha'\beta' - 3\gamma' \\
\Pi^{(4)} = -4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 & \pi^{(4)} = -4\alpha'^2\beta' + 4\alpha'\gamma' + 2\beta'^2 \\
\Pi^{(5)} = -5\alpha^2\gamma - 5\alpha\beta^2 + 5\beta\gamma & \pi^{(5)} = -5\alpha'^2\gamma' - 5\alpha'\beta'^2 + 5\beta'\gamma' \\
\Pi^{(6)} = -12\alpha\beta\gamma - 2\beta^3 + 3\gamma^2 & \pi^{(6)} = -12\alpha'\beta'\gamma' - 2\beta'^3 + 3\gamma'^2 \\
\Pi^{(7)} = -7\alpha\gamma^2 - 7\beta^2\gamma & \pi^{(7)} = -7\alpha'\gamma'^2 - 7\beta'^2\gamma' \\
\Pi^{(8)} = -8\beta\gamma^2 & \pi^{(8)} = -8\beta'\gamma'^2 \\
\Pi^{(9)} = -3\gamma^3 & \pi^{(9)} = -3\gamma'^3 .
\end{array}$$

È uopo osservare, che le $\Pi^{(8)}$, $\Pi^{(9)}$ hanno ambedue un sol termine, e così le due $\pi^{(8)}$, $\pi^{(9)}$; onde ingannerebbesi a partito chi arrivando ad una $\Pi^{(r)}$, che, purgata essendo, restasse con un sol termine, la prendesse per l'ultima delle convenienti, e stimasse di non dover andare con il calcolo più oltra. In questo inganno è caduto lo stesso *La Grange* alla pag. 315 del citato volume dell'Accademia di Berlino nel determinare con il calcolo differenziale le somme che io qui esprimo per $\Pi^{(r)}$, ommettendo egli la determinazione della $\Pi^{(9)}$: ommission che rende difettoso tutto il calcolo da lui tessuto per formar la finale equazione di eliminamento, ed in questa stessa produce la mancanza di un termine. Ciò che dapprima non sospettando io, e con piena fiducia seguendo le vestigia dell'esimio Autore, in faticosi iterati calcoli mi avvolsi, in pena ed imbarazzo nel confrontare essa finale equazione con quelle dagli altri metodi ottenute, sinchè con più seria riflessione ai principj, e diligente esame delle operazioni dell'errore mi accorsi.

Le $\Pi^{(r)}$, $\pi^{(r)}$ o per loro stesse, o per il rigetto già libere dei termini incompetenti, cioè al dovuto grado superiori, chiaminsi le $\Pi^{(r)}$, $\pi^{(r)}$ *purgate*. Moltiplicando con ordine ciascuna corretta $\Pi^{(r)}$ con sua simile corretta $\pi^{(r)}$, prendendo intero il prodotto $\Pi^{(1)}.\pi^{(1)}$, la metà del prodotto $\Pi^{(2)}.\pi^{(2)}$, $\frac{1}{3}$ del prodotto $\Pi^{(3)}.\pi^{(3)}$, $\frac{1}{4}$ di $\Pi^{(4)}.\pi^{(4)}$ .... la somma costituirà φ, cioè sarà

$$\varphi = \Pi^{(1)}.\pi^{(1)} + \tfrac{1}{2}\Pi^{(2)}.\pi^{(2)} + \tfrac{1}{3}.\Pi^{(3)}.\pi^{(3)} + \tfrac{1}{4}.\Pi^{(4)}.\pi^{(4)} \ldots.$$

Formando il quadrato φ^2, ed il cubo φ^3 nasceranno nuovi termini incompetenti, e da rigettarsi perchè contenenti podestà o prodotti di α, β, γ ... o di α', β', γ' .... al grado terzo superiori. La quarta potenza φ^4 si vede manifestamente essere da ommettersi interamente, poichè riuscirebbe tutta di termini incompetenti composta. L'equazion finale si ristrignerà dunque alla seguente

$$(\Gamma)\quad 1 - \varphi + \tfrac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2.3}\varphi^3 =$$

$$\begin{aligned}
&1-\alpha\alpha'-\tfrac{1}{2}(\alpha^2-2\beta)(\alpha'^2-2\beta')-\tfrac{1}{3}(-\alpha^3+3\alpha\beta-3\gamma)(-\alpha'^3+3\alpha'\beta'-3\gamma')\\
&-\tfrac{1}{4}(-4\alpha^2\beta+4\alpha\gamma+2\beta^2)(-4\alpha'^2\beta'+4\alpha'\gamma'+2\beta'^2)\\
&\quad-\tfrac{1}{5}(-5\alpha^2\gamma+5\alpha\beta^2+5\beta\gamma)(-5\alpha'^2\gamma'+5\alpha'\beta'^2+5\beta'\gamma')\\
&\quad-\tfrac{1}{6}(-12\alpha\beta\gamma-2\beta^2+3\gamma^2)(-12\alpha'\beta'\gamma'-2\beta'^2+3\gamma'^2)\\
&\quad-\tfrac{1}{7}(-7\alpha\gamma^2-7\beta^2\gamma)(-7\alpha'\gamma'^2-7\beta'^2\gamma')\\
&\quad-\tfrac{1}{8}(-8\beta\gamma^2)(-8\beta'\gamma'^2)-\tfrac{1}{9}(-3\gamma^3)(-3\gamma'^3)\\
&\quad+\tfrac{1}{2}(\alpha\alpha'+2\beta\beta'+3\gamma\gamma')^2+(\beta\alpha'^2+3\gamma\alpha'\beta')(\beta'\alpha^2+3\alpha\beta\gamma')\\
&\quad+(\alpha\alpha'+2\beta\beta'+3\gamma\gamma')(-\beta\alpha'^2-3\gamma\alpha'\beta'-\alpha^2\beta'-3\alpha\beta\gamma'+\tfrac{1}{2}\alpha^2\alpha'^2+3\alpha\beta\alpha'\beta'\\
&\qquad+4\alpha\gamma\alpha'\gamma'+2\alpha\gamma\beta'^2+2\alpha'\gamma'\beta^2+\beta^2\beta'^2+5\beta\gamma\beta'\gamma'+\tfrac{3}{2}\gamma^2\gamma'^2)\\
&-\frac{1}{2.3}(\alpha\alpha'+2\beta\beta'+5\gamma\gamma')^3\\
&\quad=0
\end{aligned}$$

Il termine, che manca nella equazion finale calcolata dal *La Grange* si è il $-\frac{1}{9}(-3\gamma^3)(-3\gamma')$, che dona $-\gamma^3\gamma'^3$. Ad applicare codesta finale alle due equazioni (I), (II) e confrontarla con le finali per gli altri metodi conseguite, primieramente si pongano le (I), (II) sotto l'aspetto delle (ϑ), (λ) così

$$(\mathrm{I})\ 1+\frac{C}{D}z+\frac{B}{D}z^2+\frac{A}{D}z^3=0\,.\ (\mathrm{II})\ 1+\frac{Q}{P}\cdot\frac{1}{z}+\frac{R}{P}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{S}{P}\cdot\frac{1}{z^3}=0.$$

Indi in luogo di queste considerando

$$(\mathrm{I}')\,z'^3+\frac{C}{D}z'^2+\frac{B}{D}z'+\frac{A}{D}=0\,.\ (\mathrm{II}')\,z'^3+\frac{Q}{P}z'^2+\frac{R}{P}z'+\frac{S}{P}=0,$$

corrispondenti alle due (ϑ'), (λ'), e paragonando si avrà

$$\alpha=\frac{C}{D},\ \beta=\frac{B}{D},\ \gamma=\frac{A}{D};\ \alpha'=\frac{Q}{P},\ \beta'=\frac{R}{P},\ \gamma'=\frac{S}{P}.$$

E sostituendo nella finale (Γ) diverrà essa la finale spettante le due equazioni (I), (II). Trovasi pertanto

$$\begin{aligned}
&1-\frac{QC}{PD}\\
&-\tfrac{1}{2}\left(\frac{C^2}{D^2}-\frac{2B}{D}\right)\left(\frac{Q^2}{P^2}-\frac{2R}{P}\right)\\
&-\tfrac{1}{3}\left(-\frac{C^3}{D^3}+\frac{2BC}{D^2}-\frac{3A}{D}\right)\left(-\frac{Q^3}{P^3}+\frac{3QR}{P^2}-\frac{3S}{P}\right)\\
&-\tfrac{1}{4}\left(-\frac{4BC^2}{D^3}+\frac{4AC}{D^2}+\frac{2B^2}{D^2}\right)\left(-\frac{4Q^2R}{P^3}+\frac{4QS}{P^2}+\frac{2R^2}{P^2}\right)
\end{aligned}$$

$-\frac{1}{5}$

$$- \tfrac{1}{5}\left(-\frac{5AC^2}{D^3}-\frac{5B^2C}{D^3}+\frac{5AB}{D^2}\right)\left(-\frac{5Q^2S}{P^3}-\frac{5QR^2}{P^3}+\frac{5RS}{P^2}\right)$$

$$- \tfrac{1}{6}\left(-\frac{12ABC}{D^3}-\frac{2B3}{D^3}+\frac{3A^2}{D^2}\right)\left(-\frac{12QRS}{P^3}-\frac{2R^3}{P^3}+\frac{3S^2}{P^2}\right)$$

$$- \tfrac{1}{7}\left(-\frac{7A^2C}{D^3}-\frac{7AB^2}{D^3}\right)\left(-\frac{7QS^2}{P^3}-\frac{7R^2S}{P^3}\right)$$

$$- \tfrac{1}{8}\left(-\frac{8A^2B}{D^3}\right)\left(-\frac{8RS^2}{P^3}\right)$$

$$- \tfrac{1}{9}\left(-\frac{3A^3}{D^3}\right)\left(-\frac{3S^3}{P^3}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(+\frac{CQ}{DP}+\frac{2BR}{DP}+\frac{3AS}{DP}\right)^2+\left(\frac{DQ^2}{DP^2}+\frac{3AQK}{DP^2}\right)\left(\frac{C^2R}{D^2P}+\frac{3BCS}{D^2P}\right)+$$

$$\left(\frac{CQ}{DP}+\frac{2BR}{DP}+\frac{3AS}{DP}\right)\left(-\frac{BQ^2}{DP^2}-\frac{3AQR}{DP^2}-\frac{C^2R}{D^2P}-\frac{BCS}{D^2P}+\frac{\frac{1}{2}C^2Q^2}{D^2P^2}+\frac{3BCQR}{D^2P^2}+\right.$$

$$\left.\frac{4ACQS}{D^2P^2}+\frac{2B^2QS}{D^2P^2}+\frac{2ACR^2}{D^2P^2}+\frac{B^2R^2}{D^2P^2}+\frac{5ABRS}{D^2P^2}+\frac{\frac{3}{2}A^2S^2}{D^2P^2}\right)+\frac{1}{2.3}$$

$$\left(\frac{CQ}{DP}+\frac{2BR}{DP}+\frac{3AS}{DP}\right)^3$$

$$= 0 .$$

Segnisi questa equazione (Ξ).

Eseguendo i prodotti, ordinando la farragine de' termini, e riducendo, si troverà riuscir in ultimo

$$(\Xi) = \frac{1}{D^3P^3}(\varpi) .$$

Stando al calcolo del *La Grange* vi mancherebbe il termine $\frac{A^3S^3}{D^3P^3}$ datoci da $-\frac{1}{9}\left(\frac{-3A^3}{D^3}\right)\left(\frac{3S^3}{P^3}\right)$. La gloria di un sì grand' uomo è tanto splendida, che un' ommissione non può spargervi intorno nebbia veruna; ed io era in dovere di notarla.

Confronto generale.

Raccogliendo, le finali equazioni che dalle due equazioni (I) $Az^3 + Bz^2 + Cz + Cz + D = 0$. (II) $Pz^3 + Qz^2 + Rz + D = 0$ eliminando per i diversi metodi sino ad óra inventati z, produconsi, sono

Per il metodo di uguagliamento Bezoutiano tre

1.ª più semplice (ω)

della quale vedi Art. I, §. III lo sviluppo in doppio modo ordinato

2.ª $(BP - AQ)(\omega)$. 3.ª $(CP - AR)(\omega)$.

Per il metodo di uguagliamento Newtoniano

$(DP - AS)(\omega)$.

Per il metodo di continua divisione

$$\frac{A^2}{(BP-AQ)^2}(\omega).$$

Per il metodo di *Eulero* di continua condizione a tutta sua ampiezza recato, e per tutti i suoi lati svolto 43, delle quali le due più ovvie

$$1.^a\ (BP - AQ)(\omega) \ldots .\ 2.^a \left((CP - AR) - \frac{B(BP-AQ)}{A}\right)(\omega).$$

Per il metodo di prodotto dell'*Eulero* stesso giusta il calcolo lungo e di ordinatrici regole privo di lui

$$\frac{1}{A^3P^3}(\omega).$$

Giusta il calcolo del *Cramer* di esatta teorìa corredato, o piuttosto a nuova forma trasferito

$$\frac{1}{A^3}(\omega).$$

Giusta il calcolo del *La Grange* semplificato, e corretto

$$\frac{1}{D^3P^3}(\omega).$$

Tutti i metodi si fondano sul concetto, che lo z ad una delle due equazioni soddisfacente soddisfaccia all'altra eziandio; ma il metodo di uguagliamento non considera tal principio che alla prima fronte, passano ad internamente contemplarlo i metodi di continua divisione, e condizione, e si profonda all'ultima analisi di esso il metodo di prodotto. Le diverse operazioni che nei diversi metodi, e nel metodo stesso secondo le combinazioni diverse occorrono, generan o i fattori alteranti, o i divisori. Rispetto a questi, ciò, che sul semplice divisore $\frac{1}{Q^2}$ al fine dell' Art. II, o sul composto $\frac{1}{(BP-AQ)^2}$ verso la metà del III ho già detto basta ad esempio di ciò che pensar se ne dee in generale; riman dunque a dire dei fattori alteranti.

Dei fattori alteranti.

A trattare con chiarezza l'argomento giova incominciar dal particolare, e dei lumi, che usciranno da esso, farsi scorta al generale. Si richiamin pertanto qui dall'Articolo I la equazione

$$x^3 - px - q = 0,$$

la sostituzion di $z+y$ in luogo di x, ed il trasformamento quinci di essa in

$$z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 - pz - py - q = 0,$$

lo spezzamento di questa al consueto contrario nelle due

$$(C)\ z^3 - pz + y(y^2 - p) = 0 \quad (D)\ 3yz^2 + 3y^2z - q = 0,$$

la precisa final equazione dell'eliminamento di y

$$(N)\ y^6 - \tfrac{4}{3}py^4 + \tfrac{1}{5}p^2y^2 - \frac{2}{3^2}pqy + \frac{1}{3^3}q^2 = 0,$$

ed i fattori alteranti verso il fine del §. II schierati $H = -3y^2$, ovvero $= -3y$; $L = q - 3py$, ovvero $= -3y^2$; $G = 3y^2(y^2 - p)$.

Se donisi l'essere di equazione all'uno, o all'altro dei due valori di H, od al secondo di L, o se costituendo in equazione G si ripeta il verificamento di $3y^2(y^2 - p) = 0$ da $3y^2$, in tutte e quattro le supposizioni ne segue $y = 0$. Per il qual annullamento di y la equazion (C) riducesi ai due termini $z^3 - pz = 0$, nell'equazione (D) diviene $-q = 0$, e quinci l'equazione stessa $x^3 - px - q = 0$ ristrignesi ad $x^3 - px = 0$, cangiata l'equazione $z + y = x$ in $z = x$. Rendesi dunque vana la sostituzione, si perde ogni frutto dell'artificio, distrutto il termine noto q dalla contemplazione di una equazion di terzo grado cadesi in una di secondo, al qual si abbassa $z^3-pz=0$, o $x^3-px=0$, dividendo per z, o per x.

Costituiscasi ora in equazione il primo valore di L con porre $q-3py=0$. Avremo $q=3py$, sostituito il qual valore di q nell' equazione (D) prende questa la riduzione $z^2+yz-p=0$, donde si trae $y=\frac{p-z^2}{z}$; e trasferito questo valor di y nell' equazion (C) risulta $z^3-pz+\frac{p-z^2}{z}$ $\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^2-p\right]=0$, la qual divisa per z^2-p, rimane $z-\frac{1}{z}$ $\left[\left(\frac{p-z^2}{z}\right)^2-p\right]=0$, ovvero $z^2-\left(\frac{p}{z}-z\right)^2+p=0$, ed eseguito il quadrato del secondo termine finalmente trovasi divenire $-p+3z^2=0$, che porge $z=\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$. Quinci $y=\frac{p-z^2}{z}=\pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, e $q=3py=\pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$. Si avrà dunque l'equazione

$$x^3-px\mp 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}=0;$$

di cui sarà radice $x=z+y=\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}=\pm 3\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, e la chiameremo la radice prima; nota la quale rendesi facile, dividendo l'equazione per $x\mp 3\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, trovare le altre due. Saranno pertanto le tre radici

$$x=\pm 3\sqrt{\tfrac{1}{3}p},\ x=\mp\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}p}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-5p},\ x=\mp\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}p}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-5p}.$$

Essendo $q-3py$ moltiplicatore dell'equazione (N), bastando per altra parte a rendere effettivamente il prodotto $(q-3py)$ (N) $=0$ la posizione $q-3py=0$, nasce dubbio, se stante tal posizione ritenga o perda (N) il suo diritto di equazione, passando, reciprocamente che $q-3py$, allo stato di mera quantità? Ad acquistar lume su questo dubbio, pongasi che ritenga di fatto (N) il suo essere di equazione, e vi si introduca il valor di $q=\pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$ effetto della posizione $q-3py=0$. L'aspetto particolare che prenderà (N) sarà

$$(\mathrm{N}')\ y^6 - \tfrac{4}{3}py^4 + \tfrac{1}{3}p^2y^2 \mp \frac{2^2}{3}yp^2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + \frac{2^2}{3^2}p^3 = 0 .$$

Or questa equazione trovasi divisibile per $y \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, risultandone a perfetto quoziente $y^5 \pm 2y^4\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + \tfrac{1}{3}p^2y \mp \tfrac{2}{3}p^2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$. Concordano dunque fra loro le posizioni $q - 3py = 0$, $(\mathrm{N}') = 0$, e fatta la prima posizione, non vi ha che osti a conservar contemporaneamente $(\mathrm{N}) = 0$, purchè si dia a q quella modificazione, che la prima posizion importa.

Se inversamente, senza punto pensare alla posizione $q - 3py = 0$, ad arbitrio formata si finga l'equazione

$$x^3 - px \pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0,$$

sarà, sostituendo $z + y$ in luogo di x, la trasformata

$$z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 - pz - py \mp 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0,$$

e le due (C), (D) provenienti per spezzamento al consueto contrario saranno

$$(\mathrm{C})\ z^3 - pz + y(y^2 - p) = 0 \quad (\mathrm{D}')\ 3yz^2 + 3y^2z \mp 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0,$$

e la risultante dall'eliminamento di z precisa troverassi

$$(\mathrm{N}')\ y^6 - \tfrac{4}{3}py^4 + \tfrac{1}{3}p^2y^2 \mp \frac{2^2}{3}yp^2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + \frac{2^2}{3^2}p^3 = 0,$$

ed il fattor alterante $q - 3py = \pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} - 3py$.

Per lo che avendo (N') a suo divisore $y \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, conseguentemente a radice sua $y = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, si ricade, trasferendo, in $\pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} - 3py = \pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} \mp 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0$; laonde per ogni parte confermasi la contemporaneità di $q - 3py = 0$, ed $(\mathrm{N}) = 0$, posto $q = \pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$.

Nella II.ª delle mie Lettere apologetiche dell'analisi stampate l'anno 1783 nei num. XV, XIX, XX del Giornal Letterario di Venezia intitolato *Dai confini d'Italia*, ho addotta la metafisica ragione, perchè spezzandosi la trasformata

$$z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 - pz - py - q = 0,$$

pel modo usitato nelle due

$$(\mathrm{A})\ z^3 + y^3 - q = 0 \quad (\mathrm{B})\ 3z^2y + 3zy^2 - pz - py = 0,$$

la risultante dell'eliminamento di z

$$(\mathrm{E})\ y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{27}p^3 = 0 \text{ riesce di sesto grado.}$$

In compendio la ragion è, perchè 1.° sostituendo $z + y = x$, tal sostituzione non spetta più ad una che alle altre due radici dell'equazione $x^3 - px - q = 0$, onde necessariamente spetta del pari a tutte e tre, e virtualmente racchiude tre sostituzioni, così che distinte per x', x'', x''' le tre radici di $x^3 - px - q = 0$, e per z', y' le parti di x', per z'', y'' le parti di x'', per z''', y''' le parti di x''', la sostituzion sola $z + y = x$ equivale alle tre $z' + y' = x'$, $z'' + y'' = x''$, $z''' + y''' = x'''$, e tutte insieme le comprende. 2.° Perchè essendo le equazioni (A), (B) similmente costituite riguardo a z, e y, di modo che cangiando z in y e reciprocamente non nasce in (A), (B) cangiamento veruno, per conseguenza non vi ha ragione che la risultante contenga piuttosto i valori di y, che di z, onde a comprendere tutti e tre quelli di y, e tutti e tre insieme quelli di z prende il sesto grado. Questa metafisica ragione è intieramente per ugual modo applicabile alle due equazioni (C), (D) di spezzamento al consueto contrario, e quinci intendesi, perchè la finale (N) riesca di sesto grado. Di questa verità ci procura una conferma di fatto, ed oculare il caso di $q = \pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$. Si esperimenti, e si troverà esser (N') non solo divisibile per $y \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, ma del pari per $y \mp \sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, sebbene sia propriamente $\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$ il valore, che, posto in (D') $y = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, risulta per z; a tal che si appalesa

$$(\mathrm{N}') = (y \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p})(y \mp \sqrt{\tfrac{1}{3}p})(y^4 \pm 3y^3\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + py^2 \pm yp\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + \tfrac{2}{3}p^2) = 0.$$

E che è la equazione di quarto grado? Non resta più luogo a dubitare, che siccome la equazione di secondo $(y \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p})(y \mp \sqrt{\tfrac{1}{3}p}) = y^2 \mp 3y\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + \tfrac{2}{3}p = 0$, contiene sotto il simbolo y a radici sue le parti reali $y' = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, $z' = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$ di x' reale; così la equazione di quarto grado sotto lo stesso unico simbolo y comprenda a radici sue le almen due immaginarie parti y'', z'', y''', z''' di x'', x''' immaginarj.

Mi sono alquanto diffuso sul fattore alterante $q - 3py$; potrò trascorrer celere su l'altro $y^2 - p$, lasciando al leggitore d'applicare i riflessi. Costituito questo alterante fattore in equazione $y^2 - p = 0$, si ha tostamente $y = \pm\sqrt{p}$, ed annientato nell'equazione (C) l'ultimo termine, ridotta essa ai termini $z^3 - pz = 0$, divisala per z, si ottiene $z = \pm\sqrt{p} = y$, onde, sostituendo nell'equazione (D), trovasi $q = \pm 6p\sqrt{p}$. Quindi la equazione $x^3 - px - q = 0$, si modifica in

$$x^3 - px \mp 6p\sqrt{p} = 0,$$

la cui prima radice $x = \pm\sqrt{p} \pm \sqrt{p} = \pm 2\sqrt{p}$, e le altre due, dividendo per $x \mp 2\sqrt{p}$, si trovano

$$x = \mp\sqrt{p} + \sqrt{-2p} \qquad x = \mp\sqrt{p} - \sqrt{-2p},$$

la equazion (N) riceve la modificazione

$$(\mathrm{N}'')\; y^6 - \tfrac{4}{3}py^4 + \tfrac{1}{3}p^2y^2 \mp \frac{2^2}{3}yp^2\sqrt{p} + \frac{2^2}{3}p^3 = 0,$$

che rinvienesi

$$= (y \mp \sqrt{p})^2 (y^4 \pm 2y^3\sqrt{p} + \tfrac{5}{3}py^2 \pm \tfrac{4}{3}yp\sqrt{p} + \tfrac{4}{3}p^2).$$

Del rimanente codesti calcoli fondati su le posizioni $q - 3py = 0$, $y^2 - p = 0$, lungi è che dir si possano calcoli di scioglimento dell'equazione $x^3 - px - q = 0$ per la (N), determinando per p, e q le parti z, y di x; che anzi dir si debbono inversamente calcoli di fabbrica dell'una, e dell'altra, determinandosi per le parti z, y di x sapute pria il valor di q; e ben di fabbrica particolare, fissandosi per $q = \pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, $q = \pm 6p\sqrt{p}$ tra q, e p dei rapporti particolari lontani da quella generalità, e indipendenza tra loro, che poteasi prima in essi contemplare. Egli è anzi a riflettere, che l'artificio dello spezzamento al consueto contrario nelle due (C), (D), avendo per oggetto di conseguir per tal via sotto reale aspetto le parti z, y di x, che per lo spezzamento consueto della trasformata nelle due (A), (B) produconsi sotto aspetto immaginario, suppone perciò $\tfrac{1}{4}q^2 < \tfrac{1}{27}p^3$. Or le equazioni $q = \pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, $q = \pm 6p\sqrt{p}$, dando la prima $\tfrac{1}{4}q^2 = 3p^3$, la seconda $\tfrac{1}{4}q^2 = 9p^3$, fassi evidente quanto escan fuori di esso supposto, nel contrario $\tfrac{1}{4}q^2 > \tfrac{1}{27}p^3$ gettandosi, e trascorrendo. Propriamente dunque le posizioni $q - 3py = 0$, $y^2 - p = 0$ ci rimovono dallo scopo, a cui s'intendea, ed altrove ci trasferiscono. Per le quali cose tutta, al più, l'utilità, che loro donar si può, si è di averci condotto ad una conferma di fatto, che l'equazione (N) contiene non solo i tre valori di y, ma sotto questo simbolo medesimo i tre ben anche di z. Dico al più, poichè, senza trasmutar in equazioni i fattori alteranti $q - 3py$, $y^2 - p$, si potevano, e si possono di capriccio fingere simili equazioni in numero infinite, istituire simili calcoli, e lumi simili conseguire.

È già tempo di procedere a considerare i fattori alteranti in generale. Dirigiamo l'attenzione ad $H(\omega) = 0$. Ci si presenta tosto questo punto di ricerca.

1.° Per la teorìa generale delle equazioni la equazione (ω), che è la prima Bezoutiana, concepir deesi composta di un numero di fattori: rappresentiamoli per F', F'', F'''.... si chiameranno questi a differenza del fattor H legittimi? Ma per lo appunto, qual ragione di sì diverse denominazioni? Qual è il carattere che li distingua? Fattore alterante appellar si deve quello, che non abbraccia tutti i coefficienti A, B, C, D.... P, Q, R, S...., o da essi tutti quanti non dipende; e che costituito in equazione induce mutazion nel problema. Esempigrazia il fattor $H = BP - AQ$ non racchiude che i quattro coefficienti A, B, P, Q, e nulla affatto dipende dagli altri. E si osservi non essere la medesima cosa contenere tutti i coefficienti, e contenere la incognita nella eliminazione salvata y con tutte le quantità note: il fattore particolare $q - 3py$ contiene egli la incognita y, e le quantità note p, q, che sono le sole, che nelle equazioni (C), (D) unitamente ad y compongono i coefficienti, e ad onta di ciò egli è un fattore alterante, perchè non è un risultato dipendente da tutti insieme i coefficienti, come il debbon essere, ed esser si troverebbero i fattori legittimi dell'equazione (N). Ritornisi col pensiero alla dottrina dell'*Eulero* nel suo metodo da me appellato di *continua condizione*. La equazione finale di eliminamento altro non ha per oggetto che di fissare il rapporto di tutti insieme i coefficienti A, B, C, D....

P,

P, Q, R, S .... sì che ad un tempo verificar si possano le due equazioni date (I), (II), i fattori legittimi dell'equazione finale, che la rendon ciascuno effettivamente $= 0$, debbono essere conformemente a tal rapporto costrutti, e per conseguenza racchiudere una dipendenza da tutti i coefficienti in generale. Abbastanza, io credo, del primo carattere dei fattori alteranti. La mutazione poi per essi indotta nel problema, dando loro la natura di equazione, può esser varia, esser può di distruzione, ed esser può di modificazione soltanto. Ne abbiamo veduto dell'uno, e dell'altro caso gli esempj nel particolare: si trovò per alcuni fattori alteranti allo stato di equazione recati distruggersi la quantità data q; per altri modificarsi il suo valore con metterla in un rapporto determinato con l'altra quantità nota p.

2.° Qual è egli dunque il naturale essere degli alteranti fattori? Quello di mere funzioni di y insignificanti.

3.° È egli però lecito trasferirli all'ufficio, al senso di equazione? Se sien di quelli, che a tale stato tradotti producono annichilamento della incognita y, distruggimento di alcuna delle quantità date, no certamente. Se sien di quelli, che in equazione costituiti non fanno che produrre tra quantità supposte note un rapporto particolare e determinato, è mestieri distinguere. Poichè se il problema sia generale, e le quantità supposte note sieno indeterminate, allora il rapporto particolare indotto tra loro si potrà riguardare come una modificazione del problema generale, come un caso particolare nella generalità compreso, la equazione arbitraria del fattore alterante formata non inchiuderà ripugnanza, ed introdotto il particolar rapporto per essa determinato nella natural equazione (ω), anderanno l'una con l'altra d'accordo, come sopra particolarmente si è veduto. Ma se le quantità note sieno date in valor numerico, il nuovo rapporto tra esse dall'arbitraria equazione voluto, potrà ai loro numerici valori ripugnare: così se a p, q valori numerici suppongansi, avvenir potrà di leggieri, che ad essi ripugnino il rapporto $q = \pm 6p\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e l'altro $q = \pm 6p\sqrt{p}$ dalle arbitrarie equazioni $q - 3py = 0$, $y^2 - p = 0$ nascenti. Che se le quantità note non sieno no in numerici valori date, ma però nell'oggetto del calcolo si concepiscano astrette ad una legge di rapporto, e l'arbitraria equazione rovesci la legge, e le trasporti ad un rapporto di legge contraria, defraudi l'oggetto del calcolo, e tragga il calcolatore suo malgrado nel caso opposto: come abbiamo osservato appunto fare le due testè citate equazioni, trasferendo q, p dalla legge $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, alla diametralmente contraria $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, in tal evento l'arbitraria equazione riceve il carattere di ripugnanza oggettiva, cioè rispetto all'oggetto di già prefisso.

4.° Può egli tornar utile il dare lo stato di equazione ad un fattor alterante? Per l'intento della diretta soluzione, alla quale si mira, nulla del tutto. Può al più esser modo a scorgere col fatto addentro nella finale equazione (ω), e conoscerne esperimentalmente la struttura.

RICERCHE SULLA LATITUDINE DELL'OSSERVATORIO DI PADOVA

Del Signor Giovanni Santini.

Presentata li 12 Febbrajo 1812 dal Sig. Pietro Cossali ed approvata dal Sig. Cav. Cesaris.

La prima cosa, che in un osservatorio si deve procurare, è di bene stabilire la sua posizione geografica. La ricerca della longitudine è complicata per la lunghezza de' calcoli, se con molte osservazioni si voglia stabilire. Ma la ricerca della latitudine suol portar seco una difficoltà anche più notabile, in quanto che è più intimamente legata alla perfezione degli stromenti astronomici. Così noi vediamo, che anche negli osservatorj più rinomati sovente s' incontrano delle notabili differenze fra i risultatati ottenuti da Astronomi di sommo merito in tempi diversi.

La latitudine dell' Osservatorio di Padova fu determinata dai Signori *Toaldo*, *Chiminello*, e *Rizzi-Zannoni* fino dalla sua prima fondazione mediante le altezze del Sole prese ad un Gnomone, ed il medio di molte osservazioni dà per la latitudine dell' Osservatorio 45° 23′ 40″ (vedansi gli atti dell' Accademia di Padova Tom. I). Ma oltre che le osservazioni citate danno de' risultati molto fra loro discordi, dall' esame delle medesime sembra potersi concludere, che il piano della meridiana non fosse perfettamente di livello, come i chiarissimi citati Autori ne hanno sospettato (ivi pag. 268). Soggiunge poscia il Sig. *Toaldo*, che col quadrante murale di *Ramsden* trovava un risultato presso a poco conforme, cioè 45° 23′ 43″, 4. Non pare per altro, che egli abbia tenuto conto dell' errore, che può essere nel principio di numerazione di quel grande strumento, nè trovo, che sia stato giammai determinato mancando il comodo dell' inversione.

Restava ancora qualche incertezza nella latitudine dell' Osservatorio, allorquando nel Settembre del 1807 passando per Padova il celebre *Barone di Zach*, dal cui zelo l'Astronomìa, e la Geografia ritraggono tanti vantaggi, con un eccellente circolo moltiplicatore osservò l'altezza meridiana del Sole ne' giorni 26, 27, e 29 di Settembre, e da 90 osservazioni risultò la latitudine di 45° 24' 1", 61 più forte di 21", 6 di quella stabilita dai sopralodati Astronomi. Dopo quest'epoca tentai diversi mezzi per verificare questo risultato; ma per la mancanza di buoni strumenti non ero giammai pervenuto ad ottenere un accordo plausibile nelle osservazioni. Fra i diversi metodi praticati non mancai di porre in uso il metodo suggerito dall'insigne Geometra, ed Astronomo D.r *Gauss* nel Vol. XVIII della corrispondenza mensuale, riferito anche dal celebre Sig. Senator *Oriani* nell'Effemeridi di Milano per il 1810 con nuove, ed eleganti dimostrazioni, il quale consiste in osservare il tempo, in cui tre astri di nota posizione pervengono alla medesima altezza, qualunque d'altronde sia questa bene, o male determinata, od anche in alcun modo conosciuta. Per questi primi tentativi mi sono servito d'un quadrante mobile d'*Adams* di due piedi, e mezzo di raggio fornito di un canocchiale acromatico, e di un filo a piombo per stabilire il principio di numerazione. In seguito trovai più sicuro, e più comodo impiegare due livelli a bolla d'aria fabbricati dall'abile Meccanico Sig. *Rodella*, uno paralello al piano dello strumento, e l'altro in un piano a questo perpendicolare. Queste osservazioni sono quelle, che sottopongo al giudizio degli Astronomi unitamente ai risultati, che mi hanno somministrato.

Il metodo d'osservare era il seguente. Si portava fuori lo strumento all'imbrunir della notte, e postolo di livello si osservavano le stelle, che successivamente arrivavano ad una medesima altezza, la quale rimaneva inalterata per tutto il corso dell'operazione. Si notava il tempo dell'appulso ad un filo orizzontale nel pendolo di *Le-Paute* regolato sul tempo sidereo, il cui moto sebbene non affatto regolare, pure non variava sensibilmente nell' intervallo di una o due ore. In tali osservazioni ho avuto per compagno il mio Collega Sig. Abate *Bertirossi-Busatta*, che con molta diligenza coltiva l' Astronomìa.

Posto ciò è facile vedere, che chiamando φ la latitudine dell' Osservatorio, T l' angolo orario osservato, k l' errore del medesimo dipendente dall' errore dell' equazione del pendolo, di modo che il vero angolo orario sia $T + k$, δ la declinazione della stella (supponendo le declinazioni boreali positive, negative le australi) h la sua altezza sopra l' orizzonte, si avrà

$$\text{sen.}\, h = \text{sen.}\, \delta \,.\, \text{sen.}\, \varphi + \cos.\, \delta \,.\, \cos.\, \varphi \,.\, \cos.\, (T + k)\,.$$

(1) Ora se si avrà cura di ridurre il tempo osservato al tempo sidereo prossimamente mediante l' equazione del pendolo d' altronde conosciuta, la quantità k sarà sempre piccolissima, e l' equazione precedente si cangia prossimamente nella seguente

$$\text{sen.}h = \text{sen.}\delta.\text{sen.}\varphi + \cos.\delta.\cos.T.\cos.\varphi - \cos.\delta.\text{sen.}T.k.\cos.\varphi$$

Ciascheduna osservazione somministrando una simile equazione, se molte di queste equazioni si avranno, sottraendole una dall' altra, sparirà l' incognita h, e resteranno delle equazioni con le sole incognite k, e φ, le quali combinate insieme daranno i valori di queste medesime incognite. Affinchè gli errori delle osservazioni abbiano una piccola influenza conviene procurare, che i coefficienti non risultino troppo piccoli, al quale inconveniente si riparerà facilmente scegliendo delle stelle molto fra loro distanti in declinazione.

---

(1) Tre osservazioni, somministrando tre di queste equazioni, sono sufficienti a determinare le incognite h, k, φ, ed a questo oggetto si possono vedere degl' ingegnosi artifizi di calcolo trigonometrico nelle opere citate, mediante i quali la risoluzione delle medesime rendesi assai piana. Frattanto se si avranno molte osservazioni, la risoluzione diretta riesce lunga e penosa, mentre che la esposta soluzione approssimata godendo della necessaria esattezza, riesce molto più spedita.

Questo metodo ha due vantaggi sommamente pregevoli, di essere cioè indipendente dalla divisione dello strumento, e dalla rifrazione, la quale non può variare nell' intervallo di una, o due ore supposta almeno l' altezza delle stelle di qualche grado sopra l' Orizzonte.

I. Passiamo ora ad esporre le osservazioni originali.

2 *Maggio* 1811.

Stelle.	Tempo del Pendolo.	AR appar.	Decl. app. Bor.
1 α Corona	$11^h.28'.26'',8$	$231^\circ.40'.47'',5$	$27^\circ.27'.27'',7$
2 ζ Vergine	$11.46.11,5$	$201.16.35,5$	$0.22.21,8$
3 ζ d'Ercole	$12.20.22,8$	$248.32.52,8$	$31.57.4,3$
4 δ Dragone	$13.0.4,5$	$288.7.31,8$	$67.19.37,8$

L' equazione del pendolo, ossia la quantità da aggiungere al tempo osservato per avere il tempo sidereo era $-34''$ prossimamente. La posizione apparente delle stelle scritta a fronte dei tempi osservati è stata desunta dalle posizioni del celebre Professor *Piazzi* riferite nell' Effemeridi Milanesi per il 1810, e 1811, e per applicarvi l' aberrazione, e la nutazione mi sono servito delle tavole del sopralodato Sig. Dott. *Gauss*. Calcolando con questi dati la formola superiormente esposta per sen. h, trovo i seguenti risultati, ove per brevità ho scritto k', in luogo di k . cos. ϕ.

(1) $\text{sen}.h=0{,}4595444\,.\,\text{sen}.\phi+0{,}4479659\,.\,\cos.\phi-0{,}7669062\,.\,k'$

(2) $\text{sen}.h=0{,}0065049\,.\,\text{sen}.\phi+0{,}9072202\,.\,\cos.\phi-0{,}4206057\,.\,k'$

(3) $\text{sen}.h=0{,}5292015\,.\,\text{sen}.\phi+0{,}3773289\,.\,\cos.\phi-0{,}7599825\,.\,k'$

(4) $\text{sen}.h=0{,}9227208\,.\,\text{sen}.\phi-0{,}0218555\,.\,\cos.\phi-0{,}3848484\,.\,k'$

Sottraendo successivamente ciascuna equazione dalla quarta, dividendo per cos. ϕ, e per il coefficiente numerico di sen. ϕ, riponendo k in luogo di $\frac{k'}{\cos.\phi}$ si formano le tre seguenti equazioni

$$\text{tang}.\,\phi-1{,}014396+0{,}953280\,.\,k=0$$
$$\text{tang}.\,\phi-1{,}014036+0{,}039027\,.\,k=0$$
$$\text{tang}.\,\phi-1{,}014347+0{,}824865\,.\,k=0$$

Per determinare k, sottraggasi la prima più la terza dal doppio della seconda, ed avrassi $-0{,}000671 = 1{,}700091\,.\,k = 0$, donde risulta

$$k = 0{,}0003947$$

Sostituito questo valore nell'espressioni di tang. φ, le tre superiori equazioni si accordano a dare . . . $\varphi = 45^\circ\ 23'\ 56''$. Con questi dati l'altezza comune risulta $39^\circ\ 54'\ 23'',1$.

II. 12 *Maggio* 1811.

	Stelle.	Tempo del Pendolo.	AR appar.	Decl. app. Bor.
1	α Corona	$11^h.35'.56'',0$	$231^\circ.40'.46'',0$	$27^\circ.21'.29'',9$
2	ζ Vergine	11 .59 .29 ,5	201 .16 .35 ,3	0 .22 .23 ,0
3	β Dragone	12 .17 .33 ,5	261 .33 . 2 ,4	52 .26 .54 ,2
4	γ Dragone	12 .46 .24 ,5	268 . 3 .44 ,5	51 .30 .55 ,0
5	δ Dragone	13 .13 .42 ,5	288 . 7 .39 ,4	67 .19 .39 ,2

L'equazione del pendolo per la prima osservazione era $= -1'\ 53''$, e la sua accelerazione per un'ora $= 0'',4$. Con questi dati trovo

$$(1)\ \text{sen}.h = 0{,}4595540\,.\,\text{sen}.\varphi + 0{,}4684510\,.\,\cos.\varphi - 0{,}754562\,.\,k'$$
$$(2)\ \text{sen}.h = 0{,}0065110\,.\,\text{sen}.\varphi + 0{,}9279826\,.\,\cos.\varphi - 0{,}372829\,.\,k'$$
$$(3)\ \text{sen}.h = 0{,}7928047\,.\,\text{sen}.\varphi + 0{,}1305314\,.\,\cos.\varphi - 0{,}595334\,.\,k'$$
$$(4)\ \text{sen}.h = 0{,}7827740\,.\,\text{sen}.\varphi + 0{,}1406996\,.\,\cos.\varphi - 0{,}606192\,.\,k'$$
$$(5)\ \text{sen}.h = 0{,}9227236\,.\,\text{sen}.\varphi - 0{,}0011699\,.\,\cos.\varphi - 0{,}385467\,.\,k'$$

Mediante le seguenti combinazioni formo quindi le equazioni

$$(5)-(2)\ \ldots\ \text{tang}.\,\varphi - 0{,}01379\,.\,k = 1{,}014121$$
$$(5)-(1)\ \ldots\ \text{tang}.\,\varphi + 0{,}79690\,.\,k = 1{,}013929$$
$$\frac{(3)+(4)}{2}-(2)\ \ldots\ \text{tang}.\,\varphi - 0{,}29174\,.\,k = 1{,}014191$$
$$\frac{(3)+(4)}{2}-(1)\ \ldots\ \text{tang}.\,\varphi + 0{,}46856\,.\,k = 1{,}013991\,.$$

Dalla seconda più la quarta togliendo la prima più la terza, si ottiene . . . $1{,}57099\,.\,k = -0{,}000392$; e $k = -0{,}0003131$. Sostituito questo valore di k, nelle quattro precedenti equazioni, danno per ordine

$$\begin{aligned}\varphi &= 45^\circ\ 24'\ 5'',7\\ &6\ ,7\\ &5\ ,7\\ &4\ ,8\\ \hline \text{Medio} &= 45.24.5'',7\end{aligned}$$

L'altezza comune delle stelle osservate risulta 41° 0' 57'',2.

III. 17 *Maggio* 1811.

Stelle.	Tempo del Pendolo.	AR appar.	Decl. appar.
1 α Vergine	$12^h.36'.36'',0$	$198^\circ.41'.15'',3$	$10^\circ.10'.22'',5$.A
2 δ Ercole	12.43.23,0	256.49.32,7	25.4.19,1.B
3 α della Lira	13.19.16,5	277.38.31,9	38.36.52,3.B
4 γ di Cefeo	13.41.55,0	352.55.39,8	76.34.26,1.B

Equazione del pendolo nella prima osservazione — 2' 32''; accelerazione oraria = 0'',5.

Si formano quindi le quattro equazioni

$$(1)\ \text{sen.}h = -0,1766195.\text{sen.}\varphi + 0,9684040.\cos.\varphi - 0,176063.k'$$
$$(2)\ \text{sen.}h = 0,4237564.\text{sen.}\varphi - 0,3595349.\cos.\varphi + 0,831363.k'$$
$$(3)\ \text{sen.}h = 0,6240777.\text{sen.}\varphi + 0,1563379.\cos.\varphi - 0,765561.k'$$
$$(4)\ \text{sen.}h = 0,9726702.\text{sen.}\varphi - 0,1970899.\cos.\varphi - 0,122753.k'$$

Dalle quali si deducono le seguenti

$$(4)-(3)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi + 1,84401.k = 1,013871$$
$$(4)-(2)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi + 1,29093.k = 1,014048$$
$$(4)-(1)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi + 0,04638.k = 1,014100$$
$$(3)-(1)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi - 0,73623.k = 1,014199$$
$$(2)-(1)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi - 1,09148.k = 1,014141$$

Con un poco d'attenzione facilmente si riconosce, che la prima, e la quarta di queste equazioni non concordano con le altre, lo che prova qualche piccolo errore nell'osservazione di α della Lira; escludendole per ora le altre si accordano in dare

$$k = -0,00004163;\ \varphi = 45^\circ\ 24'\ 4'',6$$

e l'altezza comune risulta 33°.39'.20'',1.

Che se si credesse opportuno di ritenere ancora l'osservazione

vazione di α della Lira, la quale molto non aberra dalle altre, avendo riguardo alla qualità dello stromento adoperato, avendo fatte le superiori combinazioni, invece di dividere per il coefficiente numerico di sen.φ, si trattino le cinque risultanti equazioni col metodo de' minimi quadrati, e gli errori delle osservazioni avranno così la minima influenza nel risultato. Si otterranno in tal guisa le due seguenti

$$2{,}7452535\,.\,\mathrm{tang}.\varphi - 0{,}191139\,.\,k = 2{,}7840015$$
$$0{,}191139\,.\,\mathrm{tang}.\varphi - 1{,}695093\,.\,k = 0{,}1939587$$

le quali ci somministrano $k = -0{,}00007421$, e $\varphi = 45°.24'.4'',9$, che poco si scosta dal valore superiormente trovato. Le altezze delle stelle risultano con questi dati

$$33°.\ 39'.\ 19'',\ 8$$
$$33\ .\ 39\ .\ 24\ ,\ 8$$
$$33\ .\ 39\ .\ 15\ ,\ 1$$
$$33\ .\ 39\ .\ 21\ ,\ 6\,.$$

IV. 23 *Maggio* 1811.

Stelle.	Tempo del Pendolo.	AR appar.	Decl. appar.
1 α Vergine	$= 12^h.36'.54'',0$ ±	$= 198°.49'.15'',3$	$= 10°.10'.22'',4$ A
2 α Lira	$= 13\,.\,17\,.\,36,5$	$= 277\,.\,38\,.\,34,6$	$= 38\,.\,36\,.\,53,6$ B
3 γ Cefeo	$= 13\,.\,43\,.\ \ 9,0$	$= 352\,.\,45\,.\,46,7$	$= 76\,.\,34\,.\,25,2$ B

Le quali danno

$$\mathrm{sen}.h = -0{,}1766190\,.\,\mathrm{sen}.\varphi + 0{,}9703240\,.\,\cos.\varphi - 0{,}165212\,.\,k'$$
$$\mathrm{sen}.h = 0{,}6240826\,.\,\mathrm{sen}.\varphi + 0{,}1583268\,.\,\cos.\varphi - 0{,}765150\,.\,k'$$
$$\mathrm{sen}.h = 0{,}9726690\,.\,\mathrm{sen}.\varphi - 0{,}1950710\,.\,\cos.\varphi - 0{,}126463\,.\,k'$$

Dalle quali si ottiene

$$k = -0{,}0001185$$
$$h = 33°\ 45'\ 5''$$
$$\varphi = 45°\ 23'\ 56'';$$

V. 24 *Maggio* 1811.

Stelle.	Tempo del Pendolo.	AR appar.	Decl. appar.
1 α Vergine	$= 12^h.34'.33'',0$	$= 198°.49'.15'',3$	$= 10°.10'.22'',4$ A
2 δ Ercole	$= 12.41.18,5$	$= 256.49.35,1$	$= 25.\ 4.20,6$ B
3 α Lira	$= 13.17.11,7$	$= 277.38.35,0$	$= 38.36.53,8$ B
4 γ Cefeo	$= 13.39.51,0$	$= 352.55.47,9$	$= 76.34.25,0$ B

L'equazione del Pendolo è $= -25''$; la sua accelerazione per ogni ora è $= 0'', 55$. Con questi dati trovo

$$(1)\ \text{sen}.h = -0{,}1766186.\text{sen}.\varphi + 0{,}9684562.\cos.\varphi - 0{,}175781.k'$$
$$(2)\ \text{sen}.h = 0{,}4237629.\text{sen}.\varphi + 0{,}3596722.\cos.\varphi - 0{,}831301.k'$$
$$(3)\ \text{sen}.h = 0{,}6240833.\text{sen}.\varphi + 0{,}1564440.\cos.\varphi - 0{,}765536.k'$$
$$(4)\ \text{sen}.h = 0{,}9726688.\text{sen}.\varphi - 0{,}1970725.\cos.\varphi - 0{,}122790.k'$$

Le quali danno le seguenti

$$(4)-(3)\ \ldots.\ \text{tang}.\varphi + 1{,}84387.k = 1{,}014146$$
$$(4)-(2)\ \ldots.\ \text{tang}.\varphi + 1{,}29077.k = 1{,}014280$$
$$(4)-(1)\ \ldots.\ \text{tang}.\varphi + 0{,}04611.k = 1{,}014136$$
$$(3)-(1)\ \ldots.\ \text{tang}.\varphi - 0{,}73655.k = 1{,}014126$$
$$(2)-(1)\ \ldots.\ \text{tang}.\varphi - 1{,}09201.k = 1{,}013996$$

Escludendo la seconda, ed ultima perchè si scostano un poco dalle altre, le altre si accordano a dare $k = +0{,}0000077$; $\varphi = 45°\ 24'\ 7'',2$.

VI. 25 *Maggio* 1811.

Stelle.

α Vergine $= 12^h\ 34'\ 49'', 5$
α Lira $= 13\ \ 17\ \ 23, 3$
γ Cefeo $= 13\ \ 40\ \ 13, 5$
α Vergine $= 13\ \ 56\ \ 53, 5$ dopo il passaggio al Meridiano.

Si deduce di qui il passaggio di α della Vergine al Meridiano $13^h\ 15'\ 51'',50$ e perciò l'equazione del pendolo $= -34'',48$, e la sua accelerazione oraria $= 0'', 55$. Con questi dati ottengo

1 $\text{sen.}h = -0{,}1766186 \,.\, \text{sen.}\varphi + 0{,}9685500 \,.\, \cos.\varphi - 0{,}175262 \,.\, k$

2 $\text{sen.}h = 0{,}6240841 \,.\, \text{sen.}\varphi + 0{,}1565533 \,.\, \cos.\varphi - 0{,}765513 \,.\, k'$

3 $\text{sen.}h = 0{,}9726688 \,.\, \text{sen.}\varphi - 0{,}1969533 \,.\, \cos.\varphi - 0{,}122981 \,.\, k'$

Dalle quali si deduce $k = +0{,}0000025$; $\varphi = 45^\circ\, 24'\, 5'',2$.

VII. 30 *Maggio* 1811.

Stelle.	Tempo del Pendolo.	AR appar.	Decl. appar.
1 δ Scorpione	$= 15^h.\ 1'.40'',0$	$= 237^\circ.18'.20'',2$	$= 22^\circ.\ 4'.20'',3$ A
2 α Aquila	$= 15.12.35,5$	$= 295.23.52,4$	$= 8.22.48,6$ B
3 γ Cassiopea	$= 15.50.40,0$	$= 11.21.\ 0,8$	$= 59.41.17,1$ B
4 ε Cassiopea	$= 16.\ 1.\ 4,5$	$= 25.13.59,9$	$= 52.43.44,7$ B
β Cassiopea	=	$= 359.47.31,0$	$= 58.\ 6.14,6$ B

Le posizioni apparenti delle stelle sono calcolate per il giorno 31 a mezzodì per comodo delle riduzioni da farsi alle osservazioni della sera seguente. L'equazione del pendolo era $= -1'\,29'',6$, la sua accelerazione oraria $= +0'',50$.

Calcolando quindi i seni delle altezze, e sottraendo le quattro risultanti equazioni successivamente una dall'altra, deduco le seguenti

$(1)-(4) \ldots \text{tang.}\varphi - 0{,}050434 \,.\, k = 1{,}014101$

$(2)-(4) \ldots \text{tang.}\varphi - 0{,}133890 \,.\, k = 1{,}014103$

$(1)-(3) \ldots \text{tang.}\varphi + 0{,}880421 \,.\, k = 1{,}013996$

$(2)-(3) \ldots \text{tang.}\varphi + 0{,}769468 \,.\, k = 1{,}013996$

$(3)-(4) \ldots \text{tang.}\varphi - 1{,}376810 \,.\, k = 1{,}014250$

Da queste equazioni si deduce $k = -0{,}0001155$. Sostituito questo valore si ottengono per φ e per h i seguenti risultati,

$$
\begin{array}{lrl}
\varphi = 45^\circ\ 24'\ 3'',2\ ; & h = 21^\circ.36'.37'',3 \\
= 3\ ,0 & 36\ ,7 \\
= 3\ ,8 & 37\ ,4 \\
= 2\ ,5 & 36\ ,0 \\
= 3\ ,0 & \\
\hline
\text{Medio} = 45.24.3,1 &
\end{array}
$$

VIII. 31 *Maggio* 1811.

Stelle

1 δ Scorpione $= 15^h\ 1'\ 35'',0$
2 α Aquila $= 15\ 12\ 42,5$
3 β Cassiopea $= 15\ 22\ 30,5$
4 γ Cassiopea $= 15\ 50\ 41,5$
5 ε Cassiopea $= 16\ 1\ 4,0$

Le posizioni apparenti sono le stesse di quelle superiormente osservate.

L'equazione del pendolo nella prima osservazione è $= -1'\ 40''$; la sua accelerazione per ogn'ora è $0'',5$. Calcolando le altezze, e sottraendo una dall'altra le cinque equazioni che risultano, si formano le seguenti equazioni

$$(5)-(2) = \text{tang.}\varphi + 0,81109 . k = 1,014084$$
$$(5)-(1) = \text{tang.}\varphi - 0,04939 . k = 1,014089$$
$$(4)-(2) = \text{tang.}\varphi + 0,76991 . k = 1,014128$$
$$(4)-(1) = \text{tang.}\varphi - 0,13288 . k = 1,014114$$
$$(3)-(2) = \text{tang.}\varphi + 0,72191 . k = 1,014061$$
$$(3)-(1) = \text{tang.}\varphi - 0,17097 . k = 1,014075$$
$$(2)-(1) = \text{tang.}\varphi - 1,37504 . k = 1,014094$$

Sommando insieme le tre equazioni, che hanno positivo il coefficiente di k, e poi quelle, che lo hanno negativo si formano due nuove equazioni, dalle quali eliminando φ, risulta $k = -0,000001$. Con questo valore le superiori equazioni si accordano a dare in limiti assai ristretti

$\varphi = 45^\circ . 24' . 3'',2$. Si trova poi $h = 21^\circ . 35' . 58'',5$.

IX. 7 *Giugno* 1811.

L'atmosfera era in questa sera agitata da forte vento, e pura. Le osservazioni riuscivano difficili a farsi per il continuo tremolar del lume, che alle volte mancava quasi del tutto. Ciò non ostante la latitudine dedotta dalle osservazioni di questa sera combina con le altre.

	Stelle .	Tempo del Pendolo.	AR appar.	Decl. appar.
1	δ Scorpione	$15^h.\ 3'.39'',8$	$237°.18'.20'',5$	$22°.\ 4'.20'',3$ A
2	α Aquila	15 . 14.20 , 7	295 . 23.55 , 7	8 . 22 . 49 , 3 B
3	β Cassiopea	15 . 24 . 16 , 5	359 . 47 . 35 , 6	58 . 6 . 15 , 9 B
4	ε Cassiopea	16 . 2 . 58 , 0	25 . 14 . 4 , 4	62 . 43 . 44 , 0 B

Si deducono di qui al modo solito le seguenti equazioni assumendo — 3′ 10″, 5 per l'equazione del pendolo, e 0″, 49 per la sua accelerazione oraria.

$$(4)-(1) = \text{tang.}\,\varphi - 0{,}05821\,.\,k = 1{,}014130$$
$$(4)-(2) = \text{tang.}\,\varphi + 0{,}86870\,.\,k = 1{,}014057$$
$$(3)-(1) = \text{tang.}\,\varphi - 0{,}17310\,.\,k = 1{,}014101$$
$$(3)-(2) = \text{tang.}\,\varphi + 0{,}72110\,.\,k = 1{,}014003$$
$$(2)-(1) = \text{tang.}\,\varphi - 1{,}37893\,.\,k = 1{,}014233$$

Prendendo la terza parte della somma della prima, terza, e quinta; e la metà della seconda, e quarta si ottengono le due seguenti

$$\text{tang.}\,\varphi - 0{,}53675\,.\,k = 1{,}014155$$
$$\text{tang.}\,\varphi + 0{,}79490\,.\,k = 1{,}014030$$

Donde si rileva $k = -0{,}0000939$; $\varphi = 45°\,.\,24'\,.\,4'',5$. La risoluzione delle equazioni col metodo de' minimi quadrati ha dato lo stesso risultato.

X. 19 *Giugno* 1811.

	Stelle .	Tempo del Pendolo.	AR appar.	Decl. appar. Bor.
1	Polare	15 . 31 . 1	13 . 46 . 15	$88°.\ 17'.42'',7$
2	β Cigno	15 . 48 . 18	290 . 46 . 16 , 2	27 . 34 . 15 , 2
3	β Ofiuco	15 . 57 . 50	263 . 32 . 41 , 6	4 . 39 . 30 , 7
4	γ Ofiuco	16 . 21 . 10	264 . 36 . 54 , 7	2 . 47 . 29 , 7

L'equazione del pendolo è $= -1'\,.\,0'',0$; la sua accelerazione oraria $= 0'',7$. Risultano di qui le seguenti

$$(1)-(2) = \text{tang.}\,\varphi + 1{,}30114\,.\,k = 1{,}014490$$
$$(1)-(3) = \text{tang.}\,\varphi + 0{,}42696\,.\,k = 1{,}014160$$
$$(1)-(4) = \text{tang.}\,\varphi + 0{,}31275\,.\,k = 1{,}014129$$
$$(2)-(3) = \text{tang.}\,\varphi - 0{,}80244\,.\,k = 1{,}013685$$
$$(2)-(4) = \text{tang.}\,\varphi - 0{,}92310\,.\,k = 1{,}013179$$

Dalle quali risulta $k = +0{,}0003744$; $\varphi = 45°\ 23'\ 59'',4$.

XI. 29 *Giugno* 1811.

Stelle.	Tempo osserv.	AR appar.	Decl. appar.
1 α Cassiopea	$= 16^h.27'.38'',5$	$= 7^\circ.28'.17'',5$	$= 55^\circ.29'.47'',5$
2 η Pegaso	$= 16.49.50,5$	$= 338.32.51,7$	$= 29.14.16,9$
3 ε Pegaso	$= 17.\ 9.38,2$	$= 323.44.\ 4,9$	$= 9.\ 1.\ 5,0$

L'equazione del pendolo era $= -4'\,14'',7$, la sua accelerazione oraria $= 0'',9$. Risultano quindi le equazioni

$$(1)-(2)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi + 1,15944\,.\,k = 1,014122$$
$$(1)-(3)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi + 0,64373\,.\,k = 1,014045$$

donde risulta $k = +\,0,0001493$; $\varphi = 45^\circ\,23'\,59''$.

XII. 2 *Luglio* 1811.

Stelle.	Tempo osservato.	AR appar.	Decl. appar.	
1 δ Scorpione	$= 16^h.22'.51'',0$	$= 237^\circ.18'.20'',6$	$= 20^\circ.\ 4'.20'',7$	A
2 δ Cassiopea	$= 16.36.20,5$	$= 18.23.37,9$	$= 59.14.44,9$	B
3 η Pegaso	$= 16.50.46,5$	$= 338.32.53,0$	$= 29.14.16,2$	B
4 ε Pegaso	$= 17.10.35,0$	$= 323.44.\ 6,1$	$= 9.\ 1.\ 5,8$	B

Equazione del pendolo $= -\,5'.\,14'',6$; accelerazione oraria $= 0'',9$.

Da queste osservazioni si formano al solito le seguenti equazioni

$$\text{tang.}\varphi - 0,40527\,.\,k = 1,014227$$
$$\text{tang.}\varphi - 1,13861\,.\,k = 1,014481$$
$$\text{tang.}\varphi - 1,92349\,.\,k = 1,014709$$
$$\text{tang.}\varphi + 1,30317\,.\,k = 1,013638$$
$$\text{tang.}\varphi + 0,74534\,.\,k = 1,013856$$
$$\text{tang.}\varphi + 0,12147\,.\,k = 1,014112$$

Sottraendo dalla somma delle ultime tre, la somma delle prime tre, dividendo per il coefficiente di k, si ottiene $k = -\,0,0003210$. Sostituito questo valore di k si ottiene

$$\begin{array}{r}
\varphi = 45°.\ 24'.\ 3'',6 \\
5,5 \\
5,0 \\
0,0 \\
3,4 \\
9,0 \\
\hline
\varphi = 45.\ 24.\ 4,1.
\end{array}$$

XIII. 15 *Luglio* 1811.

Stelle.	Tempo osservato.	AR apparente.	Decl. appar.
1 δ Scorpione	$=16^h.17'.59'',5$	$=237°.18'.16'',8$	$=22°.\ 4'.20'',5$ A
2 α Cassiopea	$=16.24.23,0$	$=7.28.28,5$	$=55.29.50,2$ B
3 ε Pegaso	$=17.\ 6.22,0$	$=323.44.\ 9,9$	$=9.\ 1.\ 8,0$ B

L'equazione del pendolo era $= -0'\ 59'',0$; la sua accelerazione oraria $= 0'',9$. Si deducono di qui le seguenti equazioni

$$(2)-(1) = \text{tang.}\varphi - 0,49539\,.\,k = 1,014208$$
$$(3)-(1) = \text{tang.}\varphi - 1,92259\,.\,k = 1,014513$$
$$(3)-(2) = \text{tang.}\varphi + 0,64349\,.\,k = 1,013967$$

le quali danno $k = -0,0002124$; $\varphi = 45°\ 24'\ 4'',4$.

XIV. 17 *Luglio* 1811.

1 δ Scorpione	$=16^h.18'.55'',0$	$=237°.18'.18'',9$	$=22°.\ 4'.20'',6$ A
2 δ Cassiopea	$=16.32.56,0$	$=18.23.50,1$	$=59.14.47,3$ B
3 η Pegaso	$=16.47.20,0$	$=338.32.59,6$	$=29.14.20,8$ B
4 ε Pegaso	$=17.\ 7.\ 8,5$	$=323.44.11,2$	$=9.\ 1.\ 7,0$ B
α Cassiopea	$=\ .\ .\ .\ .\ .$	$=7.38.21,2$	$=55.29.51,0$ B

L'equazione del pendolo nella prima osservazione era $= -1'\ 42'',88$; l'accelerazione per ogni ora $= 1'',09$. Quindi risultano le seguenti equazioni

$$(2)-(1)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi - 0,40574\,.\,k = 1,014087$$
$$(3)-(1)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi - 1,13900\,.\,k = 1,014054$$
$$(4)-(1)\ \ldots\ \text{tang.}\varphi - 1,92386\,.\,k = 1,014003$$

$(2)-(3) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi + 1,30276\,.\,k = 1,014125$
$(2)-(4) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi + 0,74485\,.\,k = 1,014130$
$(3)-(4) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi + 1,21106\,.\,k = 1,014136$

Sommando separatamente le prime tre, ed ultime tre si formano le due seguenti

$$3\ \text{tang.}\,\varphi - 3,46860\,.\,k = 3,042144$$
$$3\ \text{tang.}\,\varphi + 3,25867\,.\,k = 3,042391$$

dalle quali si ottiene $k = +\,0,0000367$; $\varphi = 45^\circ\ 24'\ 3'',0$.

XV. 19 *Luglio* 1811.

1 δ Scorpione $= 16^h.\,20'.\ \ 0'',0 =$
2 α Cassiopea $= 16\,.\,25\,.\,55\,,0 =$
3 δ Cassiopea $= 16\,.\,33\,.\,43\,,6 =$
4 η Pegaso $= 16\,.\,48\,.\ \ 8\,,3 =$
5 ε Pegaso $= 17\,.\ \ 7\,.\,56\,,5 =$

Le posizioni apparenti delle stelle sono le stesse di quelle riferite sotto il giorno 17, che a propriamente parlare sono state calcolate per questa sera.

Equazione del pendolo $= -\,2'\ 32'',04$ per la prima osservazione. La sua accelerazione è $= 1'',02$ per ogni ora. Con questi dati si formano le seguenti equazioni

$(2)-(1) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi - 0,4969\,.\,k = 1,014036$
$(3)-(1) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi - 0,4066\,.\,k = 1,014017$
$(4)-(1) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi - 1,1402\,.\,k = 1,013996$
$(5)-(1) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi - 1,9257\,.\,k = 1,013966$
$(2)-(4) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi + 1,1595\,.\,k = 1,014143$
$(3)-(4) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi + 1,3029\,.\,k = 1,014093$
$(3)-(5) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi + 0,7450\,.\,k = 1,014051$
$(2)-(5) \ldots\ldots \text{tang.}\,\varphi + 0,6434\,.\,k = 1,014093$.

Sommando tutte insieme quest' equazioni, e dividendo la loro somma per 8 si ottiene ... $\text{tang.}\,\varphi - 0,0148\,.\,k = 1,014045$. Sottraendo poi la somma delle prime quattro da quella delle ultime quattro si forma un' equazione la quale dà

$$k = +\,0,0000467\,,$$

il qual valore sostituito nella precedente porge

$$\varphi = 45^\circ\ 23'\ 58'',5\,.$$

XVI.

XVI. 20 *Luglio* 1811.

Stelle.

1 δ Scorpione $= 16^h.\ 20'.\ 22'',5$
2 α Cassiopea $= 16.\ 26.\ 18,5$
3 δ Cassiopea $= 16.\ 34.\ 6,0$
4 η Pegaso $= 16.\ 38.\ 31,5$
5 ε Pegaso $= 17.\ 8.\ 20,5$

Equazione del pendolo nella prima osservazione $= -2'\,56'',5$; accelerazione oraria $= 1'',00$. Da queste osservazioni si formano al solito le seguenti equazioni

$(2)-(1) \ldots \text{tang.}\,\phi - 0,49658\,.\,k = 1,014078$
$(3)-(1) \ldots \text{tang.}\,\phi - 0,40613\,.\,k = 1,014060$
$(4)-(1) \ldots \text{tang.}\,\phi - 1,13980\,.\,k = 1,014083$
$(5)-(1) \ldots \text{tang.}\,\phi - 1,92523\,.\,k = 1,014000$
$(2)-(4) \ldots \text{tang.}\,\phi + 1,15958\,.\,k = 1,014066$
$(3)-(4) \ldots \text{tang.}\,\phi + 1,30330\,.\,k = 1,014007$
$(2)-(5) \ldots \text{tang.}\,\phi + 0,64350\,.\,k = 1,014146$
$(3)-(4) \ldots \text{tang.}\,\phi + 0,74526\,.\,k = 1,014110.$

Sebbene non combinino molto fra loro le precedenti osservazioni pure ho creduto bene di ritenerle, giacchè il risultato, che danno combina con quelli delle altre osservazioni. Di fatti sommando separatamente le prime quattro, ed ultime quattro si formano le due seguenti

$$4\ \text{tang.}\,\phi - 3,96774\,.\,k = 4,056211$$
$$4\ \text{tang.}\,\phi + 3,85164\,.\,k = 4,056329$$

le quali danno $k = +0,0000151$; $\phi = 45^\circ\ 24'\ 0'',7$.

XVII. Riunendo ora sotto un sol punto di vista i risultati precedenti per la latitudine dell'Osservatorio di Padova, si avranno le seguenti determinazioni

I.	45°. 23′. 56″
II.	45 . 24 . 5,7
III.	45 . 24 . 4,6
IV.	45 . 23 . 56,0
V.	45 . 24 . 7,2
VI.	45 . 24 . 5,2
VII.	45 . 24 . 3,1
VIII.	45 . 24 . 3,2
IX.	45 . 24 . 4,5
X.	45 . 23 . 59,4
XI.	45 . 23 . 59
XII.	45 . 24 . 4,1
XIII.	45 . 24 . 4,4
XIV.	45 . 24 . 3,0
XV.	45 . 23 . 58,5
XVI.	45 . 24 . 0,7
Medio di tutte	45 . 24 . 2″,16

Si può pertanto stabilire la latitudine dell’ Osservatorio di Padova in numeri rotondi 45° 24′ 2″, come già dietro le proprie sue osservazioni citate nel principio di questa Memoria l’assunse il Sig. *Barone di Zach* nelle tavole solari da lui publicate a Firenze nel 1809.

DIMOSTRAZIONE FACILE E NATURALE D'ALCUNI TEOREMI GEOMETRICI ED ANALITICI

MEMORIA

Del Signor Pietro Ferroni.

Ricevuta li 12 *Aprile* 1812.

I. Nel *Giornale della Scuola Politecnica di Parigi* (Tomo VIII, Dispensa XV.ª, pag. 354, Art.° 1.°) evvi annunciato un Teorema nuovo ed elegantissimo del Sig. *Monge*, concernente la posizione del *centro di gravità* in tutte le Piramidi *tetraèdre*. " Desso sempre trovasi situato (scrive quell' eccellente Geometra) nel punto di mezzo della retta, la „ quale congiunge i punti parimente di mezzo di due opposti spigoli o *canti-vivi* della Piramide triangolare „ intendendosi per *opposti* gli spigoli, che non s' incontrino. E siccome di questi ve ne son sole tre *coppie* possibili, quindi è che dovendo esser unico il *centro di gravità*, le tre rette bisecanti ciascuna delle tre *coppie* o binarj indicati deggiono rincontrarsi immancabilmente dentro della Piramide in un solo e medesimo punto.

A maggiore intelligenza di ciò, ed anco perchè più chiara si manifesti l'*analogia* tra la Piramide ed il Triangolo, possono consultarsi i Volumi I.° e II.° della *Corrispondenza* della predetta *Scuola* Imperiale, l'Articolo 1.° dell' *Estratto* dell'ultimo de' due Tomi sunnominati (Num. 1, Gennajo 1808) fattone dal Sig. *Hachette*, e la *Memoria* (Scolio del Teorema II.°, pagg. 130 — 31) contenuta nel Volume XII di questi *Atti* Accademici, la quale ha per titolo — *Paralelli, e Principio unico e semplice delle due Trigonometrie* —. La prova poi del Teorema *centrobarico* suddivisato è sì agevole per avventura che deriva immediatamente dagli *Elementi* della Geometria *lineare*.

E difatto (*Fig.ª 1.ª*) nel Tetraèdro (qualunquesiasi o regolare od irregolare) ABCD, il suo *centro di gravità* riesce nel piano AED, che passa per E punto di mezzo del lato BC, e segnatamente egli è collocato nella retta AF, la quale divide DE di maniera che DF sia doppia della restante FE. Diviso dunque l'altro lato *opposto* AD in G per metà, condotta GE, e mossa GH paralella a DE, vien ad essere tanto EF quanto GH metà della stessa DF; laonde EF eguale a GH, non meno che EI eguale ad IG, FI ad IH, AH a HF, e perciò AI tripla di IF, cioè I, punto di mezzo d'EG, il *centro di gravità* della Piramide triangolare, come dovea dimostrarsi.

In conseguenza di che il *centro di gravità* d'un Tetraèdro *regolare* coincide con quello de' sei spigoli o lati al medesimo appartenenti, i quali, per così dire, ne compongono l'*ossatura*: proprietà comune eziandio a ciascheduna delle sue faccie.

Del rimanente sciogliendo una Piramide polièdra in Piramidi triangolari appoggiate a uno spigolo o lato comune (*Fig.ª 2.ª*) ognun vede patentemente che i *centri di gravità* di tutte le Piramidi *integranti* verrebbero ad essere situati ne' vertici degli angoli d'un Poligono *emiperimetro* e simile a quello, che sarebbe descritto congiungendosi i punti di bisezione dei lati della *base* della divisata Piramide, e che diventerebbe nel Cono o retto od obliquo (sciolto come sopra in Piramidi, ma *infinitesime*) lo stesso Circolo di lui *base*.

Tuttavia come mai (casochè soggiungesse qualche amatore di *paradossi*) facendo scorrere sempre più a basso la cima A della Piramide triangolare lungo il suo spigolo AD, e finalmente cambiandola nella *base* BDC, che pare il di lei ultimo *limite*, non viene a cadere riguardo a questo *limite* estremo il di lui *centro di gravità* nel punto di mezzo della retta DE, ed anzi per il contrario si tien lontano due terzi della medesima dal vertice D? Ogni maraviglia e contradizione apparente spariscono ponendo mente alla circostanza suggerita dalla Teoria delicata de' *limiti*, ed è che il Triangolo BDC non può veramente per la natura e legge degli *elementi*, in cui si risolva, procedendo da D verso BC, considerarsi giammai come *limite* d'una Piramide (o come Piramide *infinitesima*), ma più presto d'un Prisma triangolare impostato sopr'esso, come sua *base*, rispetto al quale difatto si verifica in qualunque altezza (anco *evanescente*) che il *centro di gravità* si conservi immancabilmente sulla stessa retta paralella agli spigoli, lontana da D quanto importa il punto, che divide DE com'essa resta parimente divisa dal *centro di gravità* del Triangolo.

II. Gode in parecchi incontri la *Sintesi* geometrica ben maneggiata d'eleganze e di facilità superiori a quelle, che affaccia applicandosi alle Quantità continue l'*Analisi* algebrica. Ed il vero, mentre si legga nel medesimo precitato Volume e Dispensa alla pag. 76, §. IX che l'istesso sagacissimo *Monge* conclude tra l'altre cose d'un suo bel *Saggio d'applicazion dell'Analisi agli Elementi di Geometria* l'eguaglianza o piuttosto l'*equivalenza* in genere dei Triangoli A''B''M, A'B'M (*Fig.*ª 3.ª) derivandola dalla *contrarietà della rotazione* come interpetrativa dell'equazione $A''B''M + A'B'M = 0$, non potrebbesi a meno di non concepirne la tanto maggior bellezza se si concludesse immediatamente, senza introdurvi la considerazione dei moti *opposti rotatorj*, cioè del *positivo* insieme e del *negativo*, dal doppio *Gnomone* elementare componente una Croce Latina, la cui *traversa* è d'area sempre eguale a quella dell'*asta*, e ciascuna di loro l'ha doppia appunto di quella del suo corrispondente Triangolo.

Gioverà stando in questo argomento rammemorare quanto chiaro e spedito sia il modo, a paragone del calcolo assai prolisso *simbolico*, delle rotazioni *inverse*, e dei *negativi*, di conseguire direttamente da *Euclide* il fondamento della misura d'ogni maniera di Superficie, o sivvero la generalizzazione del Teorema *Pitagorico* esteso all'area di qualunquesiasi Poligono riportato alle sue tre *projezioni*, respettivamente *ortogonali* ad un tempo e *ortografiche*. Con molta ragione ha avvertito il prelodato sempre celebre *Monge* nella pag. 106, §. XL del Tomo e Fascicolo stesso del *Giornale* di già citato che siffatta ampliazione del fecondissimo Teorema dell'*ipotenusa* era ormai *conosciuta da qualche tempo*. Imperciocchè la semplicissima prova della medesima, che si deduce anco apertamente da un'ovvia proprietà dei Triangoli (in più o meno de' quali si spartiscono tutte le rettilinee, e se *infinitesimi*, le curvilinee Figure, o piane o non tali) referiti a tre Piani in fra di loro normali, può riscontrarsi a tutt'agio divulgata sino dall'anno M. DCC. XCII, nell'Opera a stampa col titolo *De Calculo Integralium Exercitatio Mathematica* (pag. 316, *Adnotatio* 527, *ad Sect.* III.), e poscia prodotta alla luce pubblica nella Dissertazione Accademica *I Principj della Meccanica richiamati alla massima semplicità, ed evidenza* (*Fig.ª* 63 decifrata nello *Scolio* che segue il *Corollario* VI.° della *Parte* II.ª del *Teorema* unico del I.° *Articolo*). Nè può esservi dubbio che ambedue l'Opere rammentate non si conoscessero in Francia avanti il M. DCCC. IX., stante che la prima è segnata tra l'altre molte nella *Tavola* o *Indice* (pag. V), che precede il Volume II.° pubblicato a Parigi nel M. DCC. XCVIII. dal Sig. *Lacroix* del *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* alla rubrica *De la rectification des Courbes*, e l'altra venne a giorno nella Parte II.ª del Tomo X.°, che ha la data del M. DCCC. III. (Tav. XV, pag. 584-85) delle *Memorie di Matematica, e di Fisica della Società Italiana delle Scienze,* pubblicate in Modena, ed è quanto dire d'una periodica riputatissima *Collezione*.

Oltredichè, indipendentemente dalle speculazioni generali analitico-trigonometriche usate per giugnere all'espressione della *normale* condotta da un punto esteriore sopra un Piano comunque posto (§. XXXIV, pag. 104 del l. c.) e dalle sottili ricerche, cui dà luogo l'*Analyse appliquée à la Géo-*

métrie del prefato perspicacissimo *Monge*, si troverebbero in *Euclide* stesso dei metodi acconci, conducenti con più di semplicità, e d'evidenza al medesimo fine. Siane esempio, per non parlare d'altri numerosissimi, la Proposizione XI.ª del Libro parimente XI.° degli *Elementi*. Applicandola a un Piano, la cui equazione locale *ecumenica* è sempre $Ax + By + Cz = D$, e rispetto al quale l'origine delle *coordinate* può sempre assumersi nel punto stesso, da cui si deggia condurre la perpendicolare cercata, ossia il *minimum* che misuri la distanza del punto dato dal Piano, ognun vede subito (posta $z = 0$) (*Fig.ª 4.ª*) che $Ax + By = D$ rappresenta la *comune sezione* del Piano assegnato e di quello delle x, y, e che $\frac{D}{A}$, $\frac{D}{B}$ son respettivamente le lunghezze dei due lati del Triangolo ortogonio formato alla detta origine dalle x, y, e dalla *sezione comune*, sulla quale giace l'*ipotenusa*. Quindi è che sopra questa calando dal vertice la normale, vien espressa in virtù de' Triangoli *simili* da $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2}}$. E sapendosi dai *Rudimenti* Geometrici (*Lacroix - Appendice*, pag. 247, del *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique etc., troisième Édition. A Paris* M. DCCC. III.) che il *coseno* dell'angolo dei due Piani indicati è $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, e perciò manifestamente il *seno* $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, la *normale* diventa $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2}} \times \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, cioè $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, come appunto la stabiliscono gli Analisti. Anzi andando dietro alle traccie dell'istessa dottrina avrebber potuto ottenerne l'elegante Teorema, che hanno (per quanto io sappia) taciuto, e consiste nell'essere immancabilmente i *coseni* dei tre angoli o inclinazioni d'un Piano coi tre scambievolmente normali, a cui si riporti, indipendenti in primo luogo da D, e in secondo sempre proporzionali ai *coefficienti* C, B, A delle tre *variabili* combinati o presi *all' inverso*, o sivvero C per il Piano delle x, y, B per quello delle x, z, ed A finalmente per l'ultimo delle y, z, cioè desumendolo sempre da quella tal *coordinata*, che resta esclusa or da questo or da quel Piano di *projezione*.

Avvisai non ha guari di tempo i Geometri (*Discorso geometrico-storico della vera Curva degli Archi del Ponte a S. Trinita di Firenze. Verona* M. DCCC. VIII. alla pag. 22, e nel Tomo XIV della *Società Italiana delle Scienze* a pag. 27 della I.ª Parte) che poco a ragione da alcuni Algebristi Francesi e Svizzeri del passato secolo XVIII erasi adoperato il Calcolo, e segnatamente *infinitesimale*, affine di riconoscere il perimetro o *centina* d' una Parabola *conica* tostochè venisse descritta per via di *tangenti*, avendosene la derivazione facile, ed anche molto più estesa, da una delle Proposizioni del III.° Libro delle antichissime *Coniche* d' *Apollonio*. Gli feci accorti altresì che dalla Proposizione *sintetica* precitata conseguivasi ancora il modo di determinar sulla *centina* poligona nata dall' intreccio delle *tangenti* i respettivi punti di *contatto*, ossiano i punti *veri* attenenti al preciso contorno della Parabola, d' altronde nascosavi sotto sembianza di *flessilineo*. Ma lasciai di render palese una pregievolissima analogia tra siffatta descrizione *grafica*, e l' altra da me rinvenuta nel Codice manuscritto cartaceo delle Opere inedite di *Torricelli*, rincontrandosi ancora l' istessa, avvengachè di più vecchia data, nel II.° *Scolio* del *Teorema* IX.° del VI.° Libro della *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* del *Cavalieri*. Come dunque per mezzo delle *secanti* (*Fig.ª 5.ª*), che congiungano i *punti inversamente* contati delle divisioni, comunque multiplici nello stesso numero di parti eguali, dei lati di qualsivoglia Rettangolo, abbozzasi una Centina *parabolica*, non altrimenti addiviene segnar volendola per approssimazione consimile coll' intersecamento delle *tangenti* (ultimo *limite* delle *secanti*), abbenchè in sito, e direzione diversa quanto al *vertice*, ed al *diametro* della Curva.

Mi è sempre stato di gran meraviglia che acconciatesi dagli Algebristi le *Sezioni coniche* alla maniera degli altri *Luoghi geometrici* di grado superiore al secondo non abbiano dessi avuto mai in mente per avventura di cambiare per poco la corrispondenza mutua delle *coordinate* alla Retta trasformandone la proporzione di *diretta* in *reciproca* (vedasi *De Calculo Integralium etc.*, Opera citata di sopra, nominatamente alle *Annotazioni* (92) (188), e alle pag. 241 - 267), d'onde procederebbero incontanente lucidissime e amplissime a un tempo le più ragguardevoli proprietà dell'Iperbola, e quelle massimamente concernenti le *asintote*, i diametri *conjugati*, i raggi di *curvatura*, le dimensioni delle *Superficie* piane e rotonde, ed in ultimo la cognazione dei *Logaritmi* colle *Parabole* . E siccome dal Circolo sorgono tosto l'Ellissi scorciandone nell'istesso rapporto o prolungandone l'*ordinate*, e da quelle la Parabola, che n'è il termine estremo, così n'avverrebbe che tutta intera la Dottrina delle *Coniche* si collegasse assai meglio che nell'insegnamento ordinario colla Geometria *piana* od elementare . Intorno al quale argomento fermato essendomi tempo addietro alcun poco m'incontrai in una sorte di *Paradosso* risguardante il paragone che voglia farsi del sito del *centro di gravità* in un Segmento o *Berrettino*, come dicevano i nostri bravi Scolari di *Galileo*, d'una Sfera o Sferoide, e d'un Iperboloide o Conoide Iperbolico di pari semiasse ed altezza . *Analoga* all'andamento o procedimento degli *strati*, in cui può decomporsi o notomizzarsi l'un Solido e l'altro, è l'Area d'una mezza Parabola Apolloniana tagliata da una retta perpendicolare al suo asse, eguale al semiasse della *Generatrice* del Solido, e referita alla retta medesima (*Fig.*^{a} 6.^{a}), colla differenza però che dove volge alla retta stessa la *concavità*, rappresenta la Sferoide, e per il contrario ove si rivolta *convessa*, l'Iperboloide . Ora il punto O di separazione è sul medesimo ramo di Curva rigorosamente *continua* : come torna dunque lo stacco o *discontinuità* dell'Iperbola dall' Ellisse ? come spiegare che la Parabola abbia la stessa stessissima *affinità* con due Curve tanto diverse di *specie*, se non di *genere*, quanto lo è nelle linee il *finito* rientrante in sè stesso dall'*infinito* semprepiù divergente ed aperto nell'immensità dello spazio? come appagarsi così di leggeri che dalla Parabola, differentissima d'indole da ambedue le *Generatrici*, si ricavino dirittamente i due *centri di gravità* sì dell'uno come dell'altro dei Solidi *generati*? Eppure, in aggiunta a ciò che feci osservare intorno ai pregj di venustà della *Sintesi* (in calce dello *Scolio* finale del I.° Articolo dei summentovati *Principj della Meccanica*) rendendo contezza ai Geometri dell'Opera aneddota, sebben mancante delle Figure, delle quali ho fornito il manoscritto autografo, sempre pronto alla stampa, che ne possiedo, cioè, *Vincentii Viviani Centrobarycorum Libri duo*, ed in aumento all'Articolo IV.°, N.° 1.° della V.ª *Sezione* del *Supplemento alla Dottrina Torricelliana sopra le Coclee* (pubblicato con *Note* in Verona nel 1811, e senza *Note* tra le *Memorie della Società Italiana ec.* Volume XV, Parte I.ª, pag. 108-109), ove tenni proposito della coincidenza o *identità* di detti due *centri* poste alcune condizioni particolari, piacemi adesso di far riflettere che assumendosi IO$=$IM$=a$ *semiasse*, IS, IS'$=x$, ST, S'T'$=y, y'$, son le ST ovvero y proporzionali a MS . SO $=(a+x)(a-x)=a^2-x^2$, cioè proporzionali ed *analoghe* ai circoli od elementi del *Berrettino* o Callotta *sferoidale*, come trapassato il punto O le S'T' ovvero y' lo sono a MS' . S'O $=(a+x)(x-a)=x^2-a^2$, ossia *analoghe* agli elementi dell'*iperboloidale*, coll'unico cambiamento del *positivo* in *negativo*, che non altera mai la *continuità* della Curva. Possono dunque benissimo rappresentarsi, e si rappresentan difatto dalla medesima *Scala* parabolica *inversamente* riferita all'istess' *asse* delle *ascisse* i due Solidi, ma non così le respettive loro *Generatrici*, che restano sempre staccate a motivo che il passaggio da $\sqrt{a^2-x^2}$ a $\sqrt{x^2-a^2}$ non si fa altrimenti (come sopra rispetto ai loro quadrati) passando dal *positivo* al *negativo*, poichè viceversa si fa dal *reale* all'*immaginario*,

$\sqrt{a^2-x^2} : \sqrt{x^2-a^2} :: 1 : \sqrt{-1}$, per cui non ha, nè può avere mai luogo una sola Curva *continua*. Quest' ultimo rapporto *simbolico*, comunque di per sè medesimo *assurdo*, contuttociò m' ha servito altrove d' ottima guida (*De Calculo Integralium etc. Sectio* II.ª, §. 24, pag. 41-42) non tanto per rintracciare il senso nascoso, e la dipendenza mutua di quelle due Curve *coniche*, onde dalle *funzioni* anco *trascendenti* dell' una passare con tutta brevità e sicurezza alle *funzioni* corrispondenti dell' altra, ma oltrediciò spiega chiaro il perchè le misure delle due *superficie* d' una Sferoide *oblongata* e *compressa*, avvengachè generate dalla medesima Ellissi, si conseguiscano, come primo trovò l'*Huyghens* sino dal M.DC.LVIII, mediante le *Quadrature* di due Curve differentissime di natura, quali sono l' Ellissi stessa e l' Iperbola. E dalla considerazione del *centro di gravità* d' un Segmento di Sferoide venendo a tradurre il discorso alla Sferoide o Sfera intera (*Fig.ª 7.ª*) n' accade che quella proporzione *continua* $IT : IV : IX \div\div$ (posto in I il centro, e posti T, e V i punti, che dividono in tre, e due parti eguali l' altezza del *Berrettino*), la quale conduce alla determinazione di X *centro di gravità*, prenda la forma di $IT : O : O \div\div$, e perciò la ragione sempre *indeterminata* $O : O$, o invero $dy : dx$, $ddy : dx^2$, ec. ec. possa anch' essere equipollente all' ultima *inassegnabile* di $1 : 0$, ossia di $\infty : 1$, di che s' è menato tanto romore nella Repubblica Letteraria se si conti da *Leibnitz* infino ad *Euler*, e vale a dire inclusivamente per più della durata d' un Secolo.

III. Tornando adesso al subietto della Piramide, da cui mi son dipartito, e ch' è fondamento non sol della Statica, e conseguentemente della Dinamica (Tomo X.° di questa *Collezione Accademica*), ma eziandio della Trigonometria *sferica*, della quale è *Corollario* immediato la *rettilinea*, (vedansi i *Paralelli ec. delle due Trigonometrie* nel Volume XII della *Collezione* suddetta, pubblicato nel M. DCCC. V., e perciò anteriori almen d' un triennio alla pubblicazione della *Mémoire sur la transformation des Coordonnées* del Sig. *Français*, inserita nel Tom. VII, e Dispensa XIV (divulgatasi nel m. dccc. viii. del *Giornal Politecnico* sin dapprincipio citato), ognuno, che si prendesse l'assunto di ben ponderare da quali Formule complicate (§. III., pag. 189 - 90) l'ultimo Autore deduca il Teorema primario Trigonometrico, dell' eguaglianza cioè di *rapporto* dei *seni* de' lati ai *seni* degli angoli opposti, in confronto della semplicità, che si scorge leggendone la derivazione a pag. 108 - 109 dei *Paralelli*, non potrebbe a meno di non apprezzare per avventura quanto prevalga in siffatte materie la Sintesi *lineare*. E nella congiuntura medesima di cercar d'avanzarsi viapiù nella Trigonometria Sferica *analitica* con ricavarne le più recondite proprietà dei Triangoli andando dietro alla Piramide triangolare *equicrure*, non farebbe tampoco mestieri ricorrere a quelle Formule per dimostrare che il detto rapporto (F : D nel l. c.) sia l'istesso di quello del *volume* della Piramide *principale* all' altro della Piramide *supplementare*. Imperciocchè, stando alla nota espressione del Sig. *Lagrange* $\frac{\text{sen.}\,a}{\text{sen.}\,A} = \frac{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}{F}$, nella quale F rappresenta il *sestuplo* della prima Piramide (*Trigonometria del Sig. Legendre*, edizion di Firenze del m. dccc. x. pag. 121 - 125, e nuova Tav. a pag. 165), s'averebbe per la stessa ragione $\frac{\text{sen.}\,A}{\text{sen.}\,a} = \frac{\text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}{F'}$, simboleggiandosi da F′ il *sestuplo* della seconda: dunque, divisa l'una per l'altra Equazione, immantinenti si conseguisce $\frac{(\text{sen.}\,a)^2}{(\text{sen.}\,A)^2} = \frac{F'}{F}\left(\frac{\text{sen.}\,a}{\text{sen.}\,A} \cdot \frac{\text{sen.}\,b}{\text{sen.}\,B} \cdot \frac{\text{sen.}\,c}{\text{sen.}\,C}\right) = \frac{F'}{F}\frac{(\text{sen.}\,a)^3}{(\text{sen.}\,A)^3}$; laonde $1 = \frac{F'}{F}\left(\frac{\text{sen.}\,a}{\text{sen.}\,A}\right)$; e perciò $\frac{\text{sen.}\,a}{\text{sen.}\,A} = \frac{F}{F'} = \frac{\frac{1}{6}F}{\frac{1}{6}F'}$, che esprime il Teorema novissimo di *Français*, e lo esprimerebbe colle medesime *sigle* subitochè si cambiasse in D la lettera F′, accentata da me per conservar meglio l'*analogia*.

Son poi quasi di prima intuizione il *parabolismo* rilevato dal Sig. *Ampère* nell'*Evoluta del Circolo*, che fece un dì le delizie di *Diderot* (pag. 175 del Tomo VII precitato, il quale contiene sin dalla pag. 159 la *Mémoire sur les avantages qu'on peut retirer, dans la théorie des Courbes, de la consideration des Paraboles osculatrices etc.*), egualmentechè l'*analogia* della Cicloide, come della Spirale, alla Linea retta, e della prima in apparenza anco al Circolo. Ed il vero (*Fig.ª 8.ª*), per essenza ed effetto dell'*evoluzione*, i due disegnati elementari *Settori* son sempre *simili*, e torna perciò che debb'essere $a : dr :: r : ds$, d'onde $ads = rdr$, e $r^2 = 2a\,(s + c)$; Equazione della Parabola Apolloniana. Riportandosi la Cicloide all'arco del Circolo *generatore*, la sua Equazione diventa (nè v'è chi nol sappia) $ax = by$, non diversamente dall'Elice di *Conone* o *Archimede*; laonde ambedue sotto quest' aspetto considerate simpatizzano colla Retta. Ma assai più dell'Equazione d'*Ampère* $s^2 + t^2 = 16a^2$ per mio avviso assomigliasi a quella della Periferìa circolare l'altra, che giova d'aggiungere $s^2 + r^2 = a^2$ concernente la Cicloide *primaria* (s arco, r raggio *osculatore*, a raggio di *curvatura* nel vertice), ed è risultamento chiarissimo della *Fig.ª 9.ª*, da cui manifestansi s, r, a respettivamente doppie di AB, BC, AC, corde *supplementari*, e diametro del Semicircolo *genitore*.

Non farò quì parola d'un altro non meno facile Teorema di *Hachette*, che aggirasi intorno all'Epicicloidi *sferiche* (Art.° VI, pag. 355, Tomo VIII, *Cahier* XV del già rammentato *Journal de l'École Polytechnique*), e segnatamente consiste nella sposizione d'un accidente speciale delle loro *tangenti*, che può con tutt'agio innestarsi al principio fecondo di condur le *tangenti* alle Curve, immaginato sino del M.DC.XLI. da *Viviani* ancor giovinetto per mezzo della *composizione del moto* (che diede a *Newton* il primo incontro delle *flussioni*), abbracciato da *Torricelli*, preteso da *Roberval* come suo ritrovato, e di cui fan menzione l'Epistolario *Robervalliano* già edito, il *Racconto* parimente a stampa (Num.° XIII) estratto dal Codice Palatino più volte citato nel *Supplemento*, che annunziasi dal precedente II.° §., il termine dell'*Appendix de dimensione Cycloidis* (pag. 92 della 2.ª numerazione), e la parte narrativa o proemiale del conosciutissimo Opuscolo di *Boscovich* intitolato *De Cycloide, et Logistica*.

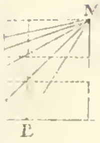
IV. Aveva il Sig. *Laplace* sino dal M.DCC.LXXXII. pubblicato negli *Atti* della già Accademia delle Scienze di Parigi che $\int dt \,.\, c^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, posto π l'*indice* del rapporto tra la periferìa circolare e il diametro, e l'*integrale* disteso da $-\infty$ sino a $+\infty$ quanto al valore della *variabile*. Egli è tornato a trattare dell'istesso argomento nel M.DCCC.IX. (pag. 240-47 del Volume VIII del *Giornale* medesimo *Politecnico*, ed ivi a 229 *Mémoire sur divers points d'Analyse*) inoltrandosi colle sue considerazioni sagaci a notare che tra i medesimi *limiti* l'*integrale* $\int t^{2r} dt \,.\, c^{-t^2} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\ldots\,2r-1}{2r} \,.\, \sqrt{\pi}$, ed ha perciò patentissima *analogìa*, e simiglianza alle note Formule *Newtoniane* della *Quadratura delle Curve*, ed alle Serie *interpolate* di *Wallis*. Quello, che a me parrebbe ora più degno d'osservazione, si è che siffatti *integrali* o combinano appieno, o molto stretti s'accoppiano con altri di *limite* e *forma* affatto diversa $\int dx\,(-\mathrm{L}x)^{\pm\frac{1}{2}}$, $\int dx\,(-\mathrm{L}x)^{\frac{n}{2}}$, salvo la differenza per gli ultimi da $2r$ a 2^r, come può riscontrarsi gettando l'occhio sulle *Meditazioni Analitiche* inserite nel Tomo VIII degli *Atti de' Fisiocritici* pubblicato a Siena l'anno M.DCCC., e massimamente sul II.° Paragrafo alla pag. 38 e seguenti, il qual somministra la chiave, e la maniera più acconcia, ed inosservata sino a quell'epoca, onde ricondur gli ultimi al Circolo, che avea tutta sembianza d'esserne lontanissimo e disparato, non altramente che la Logistica comparve strano che appartenesse alla gran famiglia delle Parabole secondo il divisamento del Capo VIII.° (N.ⁱ 344-45, pag. 508-9-10) dell'Opera venuta a luce nel M.DCC.LXXXII. col titolo *Magnitudinum exponentialium, Logarithmorum, et Trigonometriæ sublimis Theoria nova methodo pertractata*.

In proposito di quest'Opera, che prima d'ogni altra ampliò l'uso del *Binomio* di *Newton* con adoprarlo ancora pel caso d'un *esponente variabile* (vedansi il *Giornale de' Letterati di Pisa*, Volumi L. (Art.° 5), LI. (Art.° 7), ed il Tomo XX ed ultimo, postumo Fabroniano, delle *Vitæ Italorum doctrina excellentium, qui Sæculis xvii et xviii floruerunt* a pag. 275), uso, che poscia nelle Matematiche *trascendenti* per l'*integrazione* di Formule spinosissime è stato seguito dai più valenti Analisti, non sarà fuori di luogo avvertire così di passaggio che senza citarla un tal *Belli* nel Tomo IX de' *Fisiocritici* (Siena m. dccc. viii.) si giovò quasi a lettera della sostanza dei tre primi Capitoli (a pag. 255 *Memoria sulla risoluzione dell'Equazione trascendente* $a^x = b$), e vale a dire dopo più di cinque lustri trascorsi dall'edizione della dett' Opera, stampata nella Capitale della Toscana, e dedicata al Gran Duca Leopoldo. L'istesso *Binomio* a esponente *variabile* viene sciolto nel medesimo modo eziandio da *Laplace*, e segnatamente nella *Memoria* sopraccitata (Art.° ultimo *Sur la réduction des Fonctions en Tables* a pag. 260) ove svolge in Serie infinita, come spiegasi appunto nel Capo II.° *Magnitudinum exponentialium etc.*, intitolato *De Exponentialibus* dalla pag. 61 alla 64 incl., la Formula $(1 + qdx)^{\frac{1}{qdx}}$, e svolgendola ne ricava il noto valore di $c = 2,71828$ (non già $2,71821$ ec.), e quinci in tutti i *Sistemi* possibili l'*esponenziale* $c^{\mathrm{L}x + \mathrm{L}y} = xy$, o sivvero la Tavola *Pitagorica* a *doppio* ingresso ridotta alla *Logaritmica* o Neperiana o Briggiana o qualunque altra siasi d'ingresso *scempio*, siccom'accadeva delle più antiche, e già familiari sino dal principio del secolo xvi.°, ad *unico* ingresso $xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{2}$, $xy = \text{sen.}\, X\, \text{sen.}\, Y = \cos.(X - Y) - \cos.(X + Y)$ affine di convertire in *sottrazioni* o *somme* le prolisse e fastidiose ad un tempo *moltiplicazioni* dei *numeri* grandi più dell'usato, e delle frazioni *decimali* composte di moltissime *cifre* nelle Tavole delle *refrazioni* (Libro X.° della *Mécanique Céleste*), nelle *barometriche* d'*Oltmans* e *Biot*, non meno che nelle Tavole ingegnosissime d'*integrazione* d'alcune dell' Equazioni a *differenze parziali*.

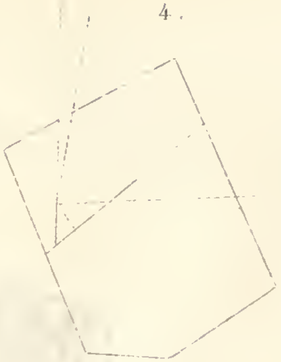
La Storia delle Matematiche ha ancora diverse lacune, e specialmente sugli artificj multiplici e per la massima parte sagaci degli antichi Abbachisti e Geometri, che fiorirono avanti della Scoperta dei *Logaritmi*, e della compilazione laboriosissima delle Tavole *trigonometriche*. Havvi oltre al citato più fiate antico *Ragionamento d' Algebra* di *Raffaello Canacci*, alla *Prospettiva* ed *Agricoltura* di *Gio: Battista Tedaldi* dedicata al Gran Duca *Francesco I. de'* Medici, ed ai vetustissimi Codici manoscritti di *Paolo Dagomari*, detto per antonomasia *dell' Abbaco*, un Trattato d' *Aritmetica* a stampa del *quattrocento* (Firenze m.cccc.xci.) di *Pilippo Calandri*, dedicato al Duca di Nemours *Giuliano* di *Lorenzo de'* Medici, nel quale tra gli altri esempj felici d'applicazione del Calcolo *numerico* alle Cose *geometriche* si dà la maniera (a pag. 76) di trovar l'*area* di qualunque Triangolo *scaleno*, o come l'Autore lo chiama *diversilatero*, conosciutine solamente i tre *lati*, e di più (a pag. 83) accennasi il modo di misurare e ridurre in piano la *superficie* d'una Sfera come quadrupla esattamente del suo Cerchio *massimo*; proclamata così l'una e l'altra Proposizione molto prima che fossero divulgate l'Opere di *Tolomeo*, e d'*Archimede*. Non fo parola della *Pratica d' Aritmetica* d'un altro celebre Fiorentino, cioè di *Francesco Galigai*, stampata dai Giunta nel m.d.lii., che meritava egualmente d'esser notata, e laudata dai Bibliografi Etruschi, ed in particolar modo dal moderno Scrittore della *Bibliografia Storico-ragionata della Toscana ec.* (Firenze m.dccc.v.), cui potrebbesi con ragione, se lo chiedesse il pregio dell' Opera, rivolger l'equivoco, o fatuo o inconsiderato che sia (pag. 368 del I.° Volume) — *Tractent fabrilia fabri* —.

tica

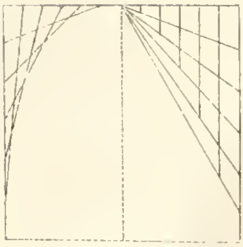
Societa Ital.ª delle Scienze pag 360



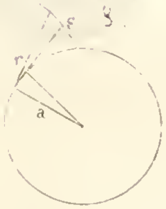
4.



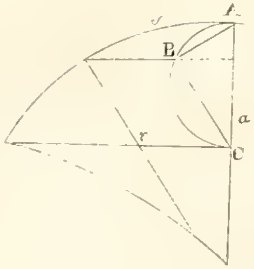
5.



8.

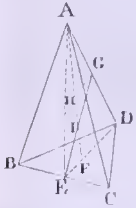


9.

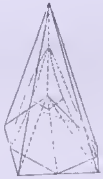


a

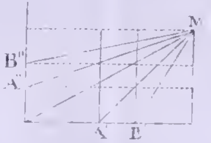
Fig. 1



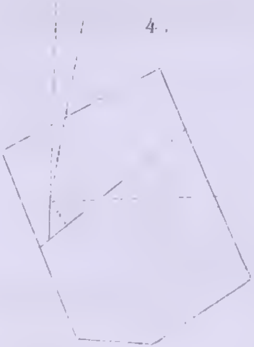
2.



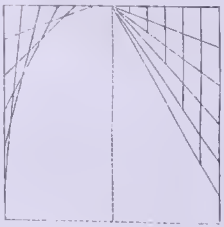
3.



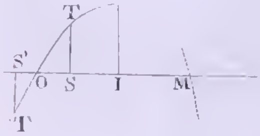
4.



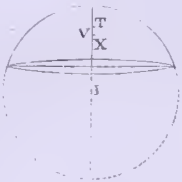
5.



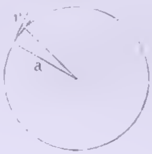
6



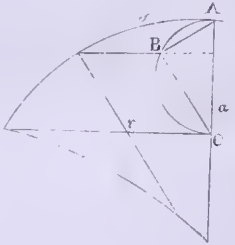
7.



8



9.



SOPRA LA COSTRUZIONE DELLA CURVA NELLA QUALE L'ARCO s È DATO IN FUNZIONE DI $\frac{\partial y}{\partial x}$

MEMORIA

DEL SIGNOR GIOVANNI PLANA.

Presentata li 23 Maggio 1812 dal Sig. Cav. Cesaris
ed approvata dal Sig. Magistrini.

1. Il chiarissimo Geometra *Legendre* dopo aver esposto nella sua opera intitolata *Exercices de Calcul Integral* una formola generale per le quadrature, prende a trattare il Problema, che forma il soggetto di questa Memoria con un metodo diverso da quello ch'egli ha dato per il caso generale. Non si può certamente ottenere un risultato più semplice e più elegante di quello a cui è arrivato questo insigne analista. Solo, si potrebbe desiderare una soluzione più diretta, ed ho osservato, che questa si può avere colla immediata applicazione della formola generale al caso particolare.

2. Sia θ l'angolo, che la tangente alla curva forma coll' asse delle ascisse; si avrà $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang.}\,\theta$, e l'equazione data fra l'arco s e la tangente potrà essere espressa con $s = \text{F}.(\theta)$.

Supposte note le ordinate x e y per il punto in cui $\theta = \alpha$, trattasi di cercare il valore di queste ordinate per il punto corrispondente a $\theta = \alpha + n\omega$, ove n è un numero intero, che indica in quante parti eguali ad ω è stata divisa la differenza $\theta - \alpha$.

Le formole integrali, che danno x e y sono, siccome è noto,

$$x = \int \frac{\partial s}{\partial \theta}.\cos.\theta.\partial\theta;\quad y = \int \frac{\partial s}{\partial \theta}.\text{sen}.\theta.\partial\theta;$$

ossia

$$x = \int F'.(\theta).\cos.\theta.\partial\theta\ ;\ y = \int F'.(\theta).\text{sen}.\theta.\partial\theta$$

posto $\frac{\partial s}{\partial \theta} = F'(\theta)$.

Ne' casi i quali non permettono di eseguire le integrazioni indicate si lascia l'idea di una generale espressione in funzione di θ, e si cercano i mezzi atti a dare per ciaschedun valore di θ quello di x e di y con quel grado di approssimazione, che si desidera. Ad un tal fine il Sig. *Legendre* ha stabilito la seguente formola (pag. 311 dell'opera citata)

$$\int Fx.\partial x = \omega\Sigma F(x+\tfrac{1}{2}\omega) + A\omega^2\frac{\partial F}{\partial x} - B\omega^4\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + C\omega^6\frac{\partial^5 F}{\partial x^5} - \text{ec.}\ldots(a)$$

nella quale i coefficienti A, B, C, ec. sono quelli che convengono all'equazione

$$\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega} = 1 + A\omega^2 + B\omega^4 + C\omega^6 + \text{ec.}\ldots\ldots.(I)$$

e la funzione cui sta apposto il segno Σ si calcola mediante l'equazione

$$\Sigma F(x+\tfrac{1}{2}\omega) = F(\alpha+\tfrac{1}{2}\omega) + F(\alpha+\tfrac{3}{2}\omega) + F(\alpha+\tfrac{5}{2}\omega)\ldots.. + F(x-\tfrac{1}{2}\omega).$$

3. L'applicazione di questa formola al valore di x dà,

$$x = \omega\Sigma F'(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) + H$$

$$+ A\omega^2\frac{\partial.F'.\cos.\theta}{\partial\theta} - B\omega^4\frac{\partial^3.F'.\cos.\theta}{\partial\theta^3} + C\omega^6\frac{\partial^5.F'.\cos.\theta}{\partial\theta^5} - \text{ec.}\ldots(II)$$

ove H tiene il luogo della costante arbitraria, ed F'. sta scritto invece di $F'(\theta)$. Quanto più l'intervallo ω, che divide i valori successivi di θ sarà piccolo, tanto più il valore di x sarà prossimo al vero. E volendo contentarsi del primo valore approssimato di x basta prendere

$$x = \omega.\Sigma F'(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).$$

Per agevolare il calcolo di questa prima parte di x nei casi in cui la funzione data $F(\theta)$ è più semplice che $F'(\theta)$, sarà utile di trasformarla in un'altra la quale si possa calcolare coi valori successivi di $F(\theta)$. Per ciò conseguire osservisi che,

$$\Delta s = F(\theta+\omega) - F(\theta)$$

ossia,

$$\Delta s = F(\theta+\tfrac{1}{2}\omega+\tfrac{1}{2}\omega) - F(\theta+\tfrac{1}{2}\omega-\tfrac{1}{2}\omega),$$

e svolgendo in serie col teorema di *Taylor* si avrà,

$$\Delta s = \omega F'(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) + \frac{1}{1.2.3}\frac{\omega^3}{2^2}.F'''(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) + \frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{\omega^5}{2^4}.F'''''(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) + \text{ec.},$$

e per conseguenza

$$\omega\Sigma F'(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) - \Sigma\Delta s.\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= -\frac{1}{1.2.3}.\frac{\omega^3}{2^2}\Sigma F'''(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) - \frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{\omega^5}{2^4}\Sigma F''''' .(\theta+\tfrac{1}{2}\omega)\times$$
$$\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) - \text{ec.}$$

Ora per fare svanire il segno Σ dal secondo membro di quest' equazione faremo uso della formola generale (a) la quale dà,

$$\omega\Sigma F'''(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) = \int F'''.\cos.\theta\partial\theta - A\omega^2\frac{\partial.F'''.\cos.\theta}{\partial\theta}$$
$$+ B\omega^4\frac{\partial^3.F'''.\cos.\theta}{\partial\theta^3} - \text{ec.};$$

$$\omega\Sigma F'''''(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) = \int F'''''.\cos.\theta\partial\theta - A\omega^2\frac{\partial.F'''''.\cos.\theta}{\partial\theta}$$
$$+ B\omega^4\frac{\partial^3.F'''''.\cos.\theta}{\partial\theta^3} - \text{ec.};$$

$$\omega\Sigma F'''''''(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) = \int F'''''''.\cos.\theta\partial\theta - A\omega^2\frac{\partial.F'''''''.\cos.\theta}{\partial\theta}$$
$$+ B\omega^4\frac{\partial^3.F'''''''.\cos.\theta}{\partial\theta^3} - \text{ec.};$$

ec.

Colla sostituzione di questi valori si ottiene facilmente,

$$x = \Sigma\Delta s.\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) + H$$
$$- \frac{1}{1.2.3}.\frac{\omega^2}{2^2}\int F'''.\cos.\theta\partial\theta - \frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{\omega^4}{2^4}\int F'''''.\cos.\theta\partial\theta$$
$$- \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{\omega^6}{2^6}\int F'''''''.\cos.\theta\partial\theta - \text{ec.}$$
$$+ \omega^2 A\frac{\partial.F'\cos.\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{1.2.3}.\frac{\omega^4}{2^2}A\frac{\partial.F'''.\cos.\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{2.3.4.5}.\frac{\omega^6}{2^4}A\frac{\partial.F'''''.\cos.\theta}{\partial\theta} + \text{ec.}$$

$$- \omega^4 B \frac{\partial^3 . F' \cos. \theta}{\partial \theta^3} - \frac{1}{1.2.3} . \frac{\omega^6}{2^2} B \frac{\partial^3 . F''' . \cos. \theta}{\partial \theta^3} - \text{ec.}$$

$$+ \omega^6 C \frac{\partial^5 . F' . \cos. \theta}{\partial \theta^5} + \text{ec.}$$

Ma se si suppone,

$\psi \theta = F'' . \cos. \theta + F' . \sin. \theta$;

$\psi_{,} \theta = F'''' . \cos. \theta + F''' . \sin. \theta - F'' . \cos. \theta - F' . \sin. \theta$;

$\psi_{,,} \theta = F'''''' . \cos. \theta + F''''' . \sin. \theta - F'''' . \cos. \theta - F''' . \sin. \theta + F'' . \cos. \theta + F' . \sin. \theta$;

ec.

egli è chiaro che si ha,

$\int F''' . \cos. \theta \partial \theta = \psi \theta - x$; $\int F''''' . \cos. \theta . \partial \theta = \psi_{,} \theta + x$; $\int F''''''' . \cos. \theta \partial \theta = \psi_{,,} \theta - x$;

dunque l'equazione precedente potrà essere posta sotto questa forma;

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen.} \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega} . x = {} & \Sigma \Delta s . \cos. (\theta + \tfrac{1}{2} \omega) + H \\ & - \frac{1}{1.2.3} . \frac{\omega^2}{2^2} \psi \theta - \frac{1}{1.2.3.4.5} . \frac{\omega^4}{2^4} \psi_{,} \theta - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} . \frac{\omega^6}{2^6} \psi_{,,} \theta - \text{ec.} \\ & + A \omega^2 . \left(\frac{\partial . F' . \cos. \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{1.2.3} . \frac{\omega^2}{2^2} \frac{\partial . F''' . \cos. \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{1.2.3.4.5} \frac{\omega^4}{2^4} \frac{\partial . F''''' . \cos. \theta}{\partial \theta} + \text{ec.} \right) \\ & - B \omega^4 \left(\frac{\partial^3 . F' . \cos. \theta}{\partial \theta^3} + \frac{1}{1.2.3} . \frac{\omega^2}{2^2} \frac{\partial^3 . F''' . \cos. \theta}{\partial \theta^3} + \text{ec.} \right) \\ & + C \omega^6 \left(\frac{\partial^5 . F' . \cos. \theta}{\partial \theta^5} + \text{ec.} \right) \end{aligned}$$

d'onde si deduce,

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{\frac{1}{2} \omega}{\text{sen.} \frac{1}{2} \omega} \Sigma \Delta s . \cos. (\theta + \tfrac{1}{2} \omega) + \frac{\frac{1}{2} \omega}{\text{sen.} \frac{1}{2} \omega} . H \\ & + \frac{\frac{1}{2} \omega}{\text{sen.} \frac{1}{2} \omega} (A' \omega^2 + B' \omega^4 + C' \omega^6 + D' \omega^8 + \text{ec.}) \ldots\ldots\ldots \text{(III)} \end{aligned}$$

facendo,

$$A' = A \frac{\partial . F' . \cos. \theta}{\partial \theta} - \frac{1}{1.2.3} . \frac{1}{2^2} \psi \theta ;$$

$$B' = - B \frac{\partial^3 . F' . \cos. \theta}{\partial \theta^3} + \frac{1}{1.2.3} . \frac{A}{2^2} \frac{\partial . F''' . \cos. \theta}{\partial \theta} - \frac{1}{1.2.3.4.5} . \frac{1}{2^4} \psi_{,} \theta ;$$

$$C' = C \frac{\partial^5 . F' . \cos. \theta}{\partial \theta^5} - \frac{1}{1.2.3} . \frac{B}{2^2} \frac{\partial^3 . F''' . \cos. \theta}{\partial \theta^3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} \frac{A}{2^4} \frac{\partial . F''''' . \cos. \theta}{\partial \theta}$$

$$-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\psi_{\prime\prime}\theta;$$

$$D'=-D\frac{\partial^7.F'.\cos.\theta}{\partial\theta^7}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{C}{2^2}\frac{\partial^5.F'''.\cos.\theta}{\partial\theta^5}-\frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{B}{2^4}\frac{\partial^3.F'''''.\cos.\theta}{\partial\theta^3}$$
$$+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{A}{2^6}\frac{\partial.F'''''''.\cos.\theta}{\partial\theta}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\psi_{\prime\prime\prime}\theta;$$

ec.

La legge colla quale si formano questi coefficienti è evidente.

4. Ora conviene eseguire le differenziazioni, che sono indicate nei valori di A', B', C', ec. Al cui fine vuolsi osservare, che per ottenere in un modo breve il differenziale dell' ordine n di un prodotto yz basta scrivere l'equazione,

$$(\partial z+\partial y)^n=\partial z^n.\partial y^0+n\partial z^{n-1}.\partial y+\frac{n.(n-1)}{1.2}\partial z^{n-2}.\partial y^2$$
$$+\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\partial z^{n-3}\partial y^3+\text{ec.}$$

e trasportando in seguito alla caratteristica ∂ gli esponenti delle potenze ne risulta immediatamente,

$$\partial^n.yz=y\partial^n z+n.\partial^{n-1}z.\partial y+\frac{n.(n-1)}{1.2}\partial^{n-2}z.\partial^2 y$$
$$+\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\partial^{n-3}z\,\partial^3 y+\text{ec.}$$

Col soccorso di questo principio si trova:

$$A'=F''.\cos.\theta.\left(A-\frac{1}{1.2.3}.\frac{1}{2^2}\right)-F'\,\text{sen}.\theta\left(A+\frac{1}{1.2.3}.\frac{1}{2^2}\right);$$

$$B'=F''''.\cos.\theta\left(-B+\frac{1}{1.2.3}.\frac{A}{2^2}-\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right)$$
$$-F'''.\text{sen}.\theta\left(-3B+\frac{1}{1.2.3}.\frac{A}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right)$$
$$-F''.\cos.\theta\left(-\frac{3.2}{2}.B-\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right)$$
$$+F'.\text{sen}.\theta\left(-\frac{3.2.1}{2.3}B+\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right);$$

$$C'=F''''''.\cos.\theta\left(C-\frac{1}{2.3}.\frac{B}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{A}{2^4}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right)$$

$$-F'''''.\text{sen}.\theta\left(5C-\frac{1}{2.3}3.\frac{B}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{A}{2^4}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right)$$

$$-F''''.\text{cos}.\theta\left(\frac{5.4}{2}C-\frac{1}{2.3}.\frac{3.2}{2}.\frac{B}{2^2}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right)$$

$$+F'''\,\text{sen}.\theta\left(\frac{5.4.3}{2.3}C-\frac{1}{2.3}\frac{3.2.1}{2.3}.\frac{B}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right)$$

$$+F''.\text{cos}.\theta\left(\frac{5.4.3.2}{2.3.4}C-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right)$$

$$-F'\,\text{sen}.\theta\left(\frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}C+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right);$$

$$D'=F''''''''.\text{cos}.\theta\left(-D+\frac{1}{1.2.3}\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\frac{B}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}.\frac{A}{2^6}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2}\right.$$

$$-F'''''''.\text{sen}.\theta\left(-7D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}3.\frac{B}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}.\frac{A}{2^6}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\right.$$

$$-F''''''.\text{cos}.\theta\left(-\frac{7.6}{2}.D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5.4}{2}.\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}.\frac{3.2}{2}.\frac{B}{2^4}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}.\right.$$

$$+F'''''.\text{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5}{2.3}.D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5.4.3}{2.3}.\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\frac{3.2.1}{2.3}.\frac{B}{2^4}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{}{2}\right.$$

$$+F''''.\text{cos}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4}{2.3.4}.D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5.4.3.2}{2.3.4}\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$-F'''.\text{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3}{2.3.4.5}D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}\frac{C}{2^2}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$-F''.\text{cos}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}D-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$+F'.\text{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6.7}D+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

ec.

I rapporti, che esistono fra i coefficienti A, B, C, D, ec. danno luogo ad alcune riduzioni in questi risultati. Se si fa uso del metodo ordinario per determinare i coefficienti dell' equazione,

$$\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega}=1+A\omega^2+B\omega^4+C\omega^6+D\omega^8+\text{ec.}$$

si trova,

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2^2};\\
B &= \frac{1}{2.3}\cdot\frac{A}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{1}{2^4};\\
C &= \frac{1}{2.3}\cdot\frac{B}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{A}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6};\\
D &= \frac{1}{2.3}\cdot\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{B}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{A}{2^6}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}
\end{aligned}\right\}\ldots(b)$$

In vigore di queste equazioni ciascheduno dei primi termini, che entrano nei valori di A′, B′, C′, ec. diventa eguale a zero: i secondi termini ricevono una piccola riduzione mediante l'eliminazione della lettera A, ed i seguenti restano nello stato in cui sono.

Si avrà adunque

$$A' = -\frac{2}{2.3.2^2}.F'.\text{sen}.\theta;$$

$$\begin{aligned}
B' = &-F'''.\text{sen}.\theta.\left(-2B+\frac{2}{2.3.4.5.2^4}\right)-F''.\cos.\theta\left(-\frac{3.2}{2}B-\frac{1}{2.3.4.5.2^4}\right)\\
&+F'.\text{sen}.\theta\left(-\frac{3.2.1}{2.3}B+\frac{1}{2.3.4.5.2^4}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C' = &-F'''''.\text{sen}.\theta\left(4C-\frac{2}{2.3}\cdot\frac{B}{2^2}+\frac{2}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right)\\
&-F''''.\cos.\theta\left(\frac{5.4}{2}C-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{3.2}{2}\cdot\frac{B}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right)\\
&+F'''.\text{sen}.\theta\left(\frac{5.4.3}{2.3}C-\frac{1}{2.3}\frac{3.2.1}{2.3}\frac{B}{2^2}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right)\\
&+F''.\cos.\theta\left(\frac{5.4.3.2}{2.3.4}C-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right)\\
&-F'.\text{sen}.\theta\left(\frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}C+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D' = &-F'''''''.\text{sen}.\theta\left(-6D+\frac{4}{2.3}\cdot\frac{C}{2^2}-\frac{2}{2.3.4.5}\cdot\frac{B}{2^4}+\frac{2}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)\\
&-F''''''.\cos.\theta\left(-\frac{7.6}{2}D+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{5.4}{2}\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{3.2}{2}\cdot\frac{B}{2^4}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)
\end{aligned}$$

$$+F'''''.\,\mathrm{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5}{2.3}D+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{5.4.3}{2.3}\cdot\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\,\frac{3.2.1}{2.3}\cdot\frac{B}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)$$

$$+F''''.\cos.\theta\left(-\frac{7.6.5.4}{2.3.4}.\,D+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{5.4.3.2}{2.3.4}\,\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)$$

$$-F'''.\,\mathrm{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3}{2.3.4.5}D+\frac{1}{2.3}\,\frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}\cdot\frac{C}{2^2}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\,\frac{1}{2^8}\right)$$

$$-F''.\cos.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}.\,D-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)$$

$$+F'.\,\mathrm{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6.7}D+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right);$$

ec.

5. La legge di formazione di questi coefficienti è evidente. Per verità queste espressioni sono ancora troppo complicate; e per arrivare a qualche cosa di più semplice la prima idea, che s' offre allo spirito pare quella di sostituire in luogo di B, C, D, ec. i loro valori numerici, e di esaminare in seguito, se i risultati che ne derivano possono essere posti sotto una forma regolare: ma presto si riconosce, che questo mezzo conduce a dei coefficienti i quali non ammettono quel grado di semplicità che si desidera. Resta adunque a vedere se, sostituendo nel prodotto,

$$\frac{\frac{1}{2}\omega.}{\mathrm{sen}.\frac{1}{2}\omega}\cdot\left(A'\omega^2+B'\omega^4+C'\omega^6+D'\omega^8+\mathrm{ec}.\right)$$

in luogo di $\frac{\frac{1}{2}\omega}{\mathrm{sen}.\frac{1}{2}\omega}$ il suo valore in serie

$$1+A\omega^2+B\omega^4+C\omega^6+\mathrm{ec}.$$

diventa possibile di avere dei coefficienti, che siéno concisi e nello stesso tempo soggetti ad una legge. In questo modo si avrà per x il valore seguente;

$$x=\frac{\frac{1}{2}\omega}{\mathrm{sen}.\frac{1}{2}\omega}\Sigma\Delta s.\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega)+\frac{\frac{1}{2}\omega}{\mathrm{sen}.\frac{1}{2}\omega}H+A''\omega^2+B''\omega^4+C''\omega^6+\mathrm{ec}.$$

nel quale,

$$A''=A';\; B''=B'+AA';\; C''=C'+AB'+BA';\;\mathrm{ec}.$$

Svolgendo in serie la nota equazione

$$\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen.}\frac{1}{2}\omega} = 1 + \frac{2\omega^2}{4\pi^2 - \omega^2} - \frac{2\omega^2}{16\pi^2 - \omega^2} + \frac{2\omega^2}{36.\pi^2 - \omega^2} - \text{ec.}$$

si ottiene,

$$A = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) s_2\,;$$

$$B = \frac{1}{2^3 . \pi^4} \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) s_4\,;$$

$$C = \frac{1}{2^5 \pi^6} \left(1 - \frac{1}{2^5}\right) s_6\,;$$

ec.

ove

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ec.};$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{ec.};$$

$$s_6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{ec.};$$

e colla sostituzione dei rispettivi valori di queste somme, i quali si trovano nell'Introduzione all'analisi di Eulero, si avrà;

$$A = 2^1 - 1 . \frac{1}{1.2.3.2^2};\ B = 2^3 - 1 . \frac{1}{1.2.3.4.5.2^4} \cdot \tfrac{1}{3};\ C = 2^5 - 1 . \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6} \cdot \tfrac{1}{3};\ \text{ec.}\ldots(c)$$

Ciò posto, incominciamo a cercare il valore di B″. Noi abbiamo

$$B'' = F'''.\text{sen}.\theta\left(2B - \frac{2}{1.2.3.4.5.2^4}\right) + 3F''.\cos.\theta\left(B + \frac{1}{1.2.3.4.5.2^4} \cdot \tfrac{1}{3}\right)$$
$$- F' . \text{sen}.\theta\left(B + \frac{2}{2.3.4} A - \frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right),$$

e eliminando A colla seconda delle equazioni (b) (N.° 4), si ha,

$$B'' = F'''.\text{sen}.\theta\left(2B - \frac{2}{1.2.3.4.5.2^4}\right) + 3F''.\cos.\theta\left(B + \frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right)$$
$$- 3F' . \text{sen}.\theta\left(B + \frac{1}{1.2.3.4.5.2^4} \cdot \tfrac{1}{3}\right);$$

ma le equazioni (c) danno,

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}=\frac{B}{2^3-1}$$

dunque si avrà,

$$B''=\frac{2^3.B}{2^3-1}\left(F'''.\mathrm{sen}.\theta+3F''.\cos.\theta-3F'.\mathrm{sen}.\theta\right).$$

Ora è facile di scorgere, che secondo il teorema di cui abbiamo parlato nel N.° 4 si ha l'equazione,

$$\frac{\partial^3.F.\mathrm{sen}.\theta}{\partial\theta^3}=F'''\mathrm{sen}.\theta+3F''.\cos.\theta-3F'\mathrm{sen}.\theta-F.\cos.\theta,$$

dunque

$$B''=\frac{2^3.B}{2^3-1}\left\{\frac{\partial^3.s.\mathrm{sen}.\theta}{\partial\theta^3}+s.\cos.\theta\right\}.$$

Nello stesso modo si troverà il valore di C''. In fatti noi abbiamo

$$\begin{aligned}C''=&-F'''''.\mathrm{sen}.\theta\left(4C-\frac{1}{2.3.4}2B+\frac{2}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&-F''''.\cos.\theta\left(10.C-\frac{1}{2.3.4}.3B-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&+F'''.\mathrm{sen}.\theta\left(10.C+\frac{1}{2.3.4}B-\frac{1}{2.3.4.5.2^4}.2A+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&+F''.\cos.\theta\left(5C+\frac{1}{2.3.4}3B+\frac{1}{2.3.4.5.2^4}A-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&-F'.\mathrm{sen}.\theta\left(C+\frac{1}{2.3.4}3B-\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}A+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right),\end{aligned}$$

e facendo l'eliminazione di A mediante la terza delle equazioni (b) si avrà

$$\begin{aligned}C''=&-F'''''.\mathrm{sen}.\theta\left(4C-\frac{1}{2.3.4}.2B+\frac{2}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&-F''''.\cos.\theta\left(10C-\frac{1}{2.3.4}3B-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&+F'''\mathrm{sen}.\theta\left(12C-\frac{1}{2.3.4}B-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&+F''.\cos.\theta\left(4C+\frac{1}{2.3.4}.4B\right)-F'.\mathrm{sen}.\theta\left(2C+\frac{1}{2.3.4}.2B\right)\end{aligned}$$

Le equazioni (c) danno

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}=\frac{3C}{2^5-1};$$

$$\frac{B}{2.3.4}=\frac{(2^3-1)7.}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}\cdot\tfrac{1}{3}=\frac{(2^3-1)7C}{2^5-1};$$

per conseguenza si avrà

$$4\,C-\frac{1}{2.3.4}.2B+\frac{2}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}=\frac{2^5C}{2^5-1};$$

$$10.C-\frac{1}{2.3.4}.3B-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}=\frac{5.2^5.C}{2^5-1};$$

$$12.C-\frac{1}{2.3.4}.B-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}=\frac{10.2^5C}{2^5-1};$$

$$4\,C+\frac{1}{2.3.4}.4B=\frac{10.2^5C}{2^5-1};$$

$$2\,C+\frac{1}{2.3.4}2B=\frac{5.2^5C}{2^5-1};$$

$$C''=-\frac{2^5.C}{2^5-1}\left(F'''''.\text{sen}.\theta+5F''''.\cos.\theta-10.F'''.\text{sen}.\theta-10.F''.\cos.\theta+.5F'.\text{sen}.\theta\right).$$

Ma qui ancora si riconosce agevolmente che

$$\frac{\partial^5.F\,\text{sen}.\theta}{\partial\theta^5}-F.\cos.\theta=F'''''.\text{sen}.\theta+.5F''''.\cos.\theta-10.F'''.\text{sen}.\theta-10.F''.\cos.\theta+5.F'.\text{sen}.\theta$$

dunque,

$$C''=-\frac{2^5.C}{2^5-1}\left(\frac{\partial^5.s.\text{sen}.\theta}{\partial\theta^5}-s.\cos.\theta\right).$$

Seguendo lo stesso metodo si arriverebbe a

$$D''=\frac{2^7.D}{2^7-1}\left(\frac{\partial^7.s.\text{sen}.\theta}{\partial\theta^7}+s.\cos.\theta\right),$$

e colla stessa legge si potrà formare un qualsivoglia numero di coefficienti della serie, che dà il valore di x. Ma per togliere i dubbj, che il principio di induzione potrebbe far nascere a questo proposito, basterà verificare la serie col dare un valore particolare ad s, siccome ciò vien fatto in un modo ingegnoso dal Sig. *Legendre* (pag. 327, N.° 14).

In ultima analisi si avrà adunque

$$x=\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega}\Sigma\Delta s.\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega)+X_{(\theta)}-X_{(\alpha)},$$

ove

$$
\begin{aligned}
X_{(\theta)} = &- \frac{2A}{2-1}\left(\frac{\partial . s . \text{sen}. \theta}{\partial\theta} - s . \cos. \theta\right) \\
&+ \frac{2^3 B}{2^3-1}\left(\frac{\partial^3 . s . \text{sen}. \theta}{\partial\theta^3} + s . \cos. \theta\right) \\
&- \frac{2^5 . C}{2^5-1}\left(\frac{\partial^5 . s . \text{sen}. \theta}{\partial\theta^5} - s . \cos. \theta\right) \\
&+ \text{ec.}
\end{aligned}
$$

e $X_{(\alpha)}$ rappresenta il valore di $X_{(\theta)}$ quando vi si fa $\theta = \alpha$. Egli è poi evidente, che il valore di y si ottiene cambiando θ in $90^\circ - \theta$, e ϖ in $-\omega$ nel valore precedente di x.

DI UN NUOVO METODO GENERALE DI ESTRARRE LE RADICI NUMERICHE

MEMORIA

Del Signor Cav. Paolo Ruffini

Ricevuta li 30 *Settembre* 1812.

SEZIONE I

Esposizione pratica, e dimostrazione del sovraindicato metodo.

Nel (N.° 269) del mio corso d'Algebra elementare esposi un metodo generale di estrarre una qualunque radice da un numero dato. In seguito ho veduto potersi tal metodo rendere più semplice; ed è principalmente, onde indicare questa semplificazione, che io lo espongo di nuovo nella presente Memoria.

1. Cominciamo per maggiore chiarezza da qualche caso particolare, e vogliasi quindi in primo luogo la radice quarta del numero

19987173376

Poichè 4 è l'indice della radice domandata, comincio dal dividere qui sotto in (I) il proposto numero di quattro in quattro cifre principiando dalla destra, e cerco per mezzo di opportune tavole il massimo quadrato-quadrato, che si contiene nella prima parte a sinistra 199. Essendo questo 81 la cui radice quarta è 3, scrivo in (II) il 3 ottenuto, e alla sua destra separata con una lineetta verticale scrivo l'unità, tanti zeri, quanto è l'indice 4 diminuito di 1, cioè tre, e infine la prima parte 199 del dato numero (I). Ciò fatto, pongo in una seconda linea orizzontale, e nella colonna verticale seconda lo 1, moltiplico questo 1 per 3, sommo il prodotto, che ne viene col numero sovrapposto, che nel caso presente è zero, e colloco il risultato 3 alla destra dello 1. Moltiplico quindi il 3 ottenuto per 3, unisco il prodotto 9 col numero sovrapposto, che qui pure è zero, e scrivo il risultato 9 alla destra del 3. Moltiplicato in egual modo questo 9 per 3, e scritto alla sua destra il prodotto, che se ne ottiene, sommato col sovrapposto numero, che anche qui è zero, cioè il 27, moltiplico finalmente questo 27 pel solito 3, sottraggo il prodotto 81 dal sovrapposto 199, e pongo alla destra il residuo 118. Formata così la seconda riga, passo a formarne una terza, collocando in essa il solito 1 nella terza colonna, moltiplicando quindi lo stesso 1, e gli altri numeri 6, 27, che si ottengono successivamente, tutti pel medesimo 3, e sommando i successivi prodotti coi numeri della seconda riga corrispondenti: ottienesi così il 6 col moltiplicare lo 1 per 3, e sommare il prodotto 3 col 3 sovrapposto; risulta il 27 col moltiplicare il 6 per 3, e sommare il prodotto 18 col sovrapposto 9, e ricavasi in fine il 108 col moltiplicare per 3 il 27, e sommare il prodotto 81 col 27 sovrapposto. Operando in seguito nella stessa maniera, formo una quarta riga, avendo però l'avvertenza di porre in questa lo 1 nella quarta colonna; nel modo medesimo ne formo una riga quinta, portando lo 1 nella colonna quinta; e finalmente ne formo una sesta, nel caso presente ultima, col solo 1 collocato nella sesta, ed ultima colonna.

Determinati con questa operazione in (II) nell' ultima colonna a destra i numeri 1, 12, 54, 108, 118, aggiungo alla destra del secondo di essi uno zero, alla destra del terzo due zero, tre alla destra del quarto, e alla destra dell' ultimo aggiungo la seconda parte 8717 del dato numero (I). Scrivo quindi in (III) i numeri risultati; e poichè il numero, che deve ora determinarsi, deve essere non >9, ed insieme non maggiore del quoto, che risulta, dividendo l'ultimo de' numeri (III) pel penultimo, cerco questo quoto; e siccome nel caso presente esso è 11, lo trascuro, e tengo conto del 9: ma ancora questo 9 potrebbe essere troppo grande; per ciò riconoscere con qualche sollecitudine tolgo in (III) le ultime due cifre dagli ultimi tre numeri, scrivo i numeri, che ne risultano, 54, 1080, 11887, in (IV), collocando alla loro sinistra separato con una lineetta verticale il 9, e posto il 54 sotto del 1080, lo moltiplico per 9, e ne sommo il prodotto col 1080 sovrapposto; scrivo il 1566, che ne viene alla destra del 54, e lo moltiplico per 9, osservando, se il prodotto, che ne nasce, è, o non è maggiore del sovrapposto 11887: ora nel caso presente esso ne è realmente maggiore, essendo $= 14094$. Dunque dirò, che il 9 è un numero troppo grande, e passerò ad osservare, se sia opportuno lo 8. Operando perciò con lo 8, come ho fatto col 9, lo scrivo sotto del 9 stesso in (IV), moltiplico per esso il 54, sommo il prodotto, che ne viene, col sovrapposto 1080, e scrittone il risultato 1502 nella terza colonna, moltiplico questo per 8, e siccome il prodotto 12016, che ne nasce, è ancora maggiore del sovrapposto 11887, dirò, che anche 8 è troppo grande; passando quindi al 7, rinnovo con questo la medesima operazione, e siccome veggo, che l'ultimo risultato 10206 è < 11887, dirò, che il 7 potrà essere opportuno. Scrittolo perciò in (III) alla sinistra del primo 1 separato con una lineetta verticale, opero quivi in una maniera affatto uguale a quella, con cui ho operato precedentemente in (II); formo cioè le successive linee orizzontali seconda terza quarta ec. con lo scrivere in primo luogo lo 1 rispettivamente nella seconda, nella terza, nella quarta ec. colonna, poscia col moltiplicare ciascun numero ottenuto per 7, sommare il prodotto, che ne nasce, col numero immediatamente sovrapposto, e porre alla destra del precedente il numero, che ne risulta, avvertendo però che il prodotto per 7 del penultimo numero della prima riga, cioè del 152023 deve non già sommarsi, ma sottrarsi dal sovrapposto 1188717, ed avvertendo, che se mai l'indicato prodotto fosse maggiore del 1188717, onde la differenza ne risultasse negativa, allora anche il 7 sarebbe troppo grande, e converrebbe diminuirlo; ma siccome ciò non succede, esso sarà opportuno.

Scrivo ora in (V) i numeri 1, 148, 8214, 202612, 124556 dell' ultima colonna in (III), unendo alla destra del secondo uno zero, alla destra del terzo due zeri, tre alla destra del quarto, e a quella del quinto l'ultima parte 3376 del dato numero (I). Divido quindi, come precedentemente l'ultimo di questi numeri pel penultimo, e truovato il quoziente 6, non farò quivi le pruove esposte di sopra per iscuoprire se sia troppo grande, perchè esistendo nel numero antipenultimo 821400 tre cifre meno di quelle, che esistono nel penultimo 202612000, possiamo quasi essere certi, che esso non sarà tale. Posto pertanto il 6 alla sinistra dello 1, separato con la solita stanghetta verticale, eseguisco la solita operazione; e siccome in questo caso, nel sottrarre il prodotto del penultimo numero 207593896 della seconda linea per 6 dal sovrapposto 1245563376, ne viene il residuo zero; dirò che l'operazione è terminata, che il dato numero (I) è una quarta potenza esatta, e che congiunti i numeri ottenuti successivamente, il 376, che ne risulta è la radice corrispondente.

(I)
199, 8717, 3376

(II)
3| 1, 0, 0, 0, 199
1, 3, 9, 27, 118
1, 6, 27, 108
1, 9, 54
1, 12
1

(III)
7| 1, 120, 5400, 108000, 1188717
1, 127, 6289, 152023, 124556
1, 134, 7227, 202612
1, 141, 8214
1, 148
1

(IV)
9| 54, 1080, 11887
8| 54, 1566, 14094
7| 1512, 12096
1458, 10206

(V)
6| 1, 1480, 821400, 202612000, 1245563376,
1, 1486, 830316, 207593896, 0000000000.

2. Vo-

2. Vogliasi in secondo luogo la radice quinta del numero 29866063714593754493.

Essendo in questo caso 5 l'indice della radice, divido il numero dato qui sotto in (VI) di cinque in cinque classi, cominciando dalla destra, e col mezzo della tavola delle potenze cerco la massima quinta potenza esatta, che si contiene nel primo membro a sinistra 29866: essendo questa 16807, la cui radice quinta è il 7, scrivo in (VII) tal radice, e alla sua destra separata con una lineetta verticale scrivo la unità, quindi tanti zeri, quanto è l'indice 5 della radice da estraersi diminuito di 1, cioè quattro, e in fine il numero 29866. Dopo ciò eseguisco quivi la stessa operazione, che si è effettuata precedentemente in (II), ed in (III), e determinati per tal modo nell'ultima colonna verticale i numeri 1, 390, 60840, 4745520, 185075280, 99432003, li scrivo nuovamente in (VIII), col porre alla destra del secondo uno zero, due zeri alla destra del terzo, tre alla destra del quarto, quattro alla destra del quinto, e a quella del sesto il secondo membro 06371 del numero (VI). Ciò fatto tolgo dagli ultimi tre di questi numeri le ultime quattro cifre, e posti in (IX) i risultati 343, 12005, 130590, operando come si è fatto nel numero precedente in (IV) cerco quel numero, che mi renda l'ultimo prodotto $<$ 130590, e tale truovando essere lo 8, giacchè l'ultimo prodotto, che da esso risulta, è 117992, pongo questo 8 in (VIII) alla sinistra dello 1, frapponendo la stanghetta verticale, eseguisco la solita operazione, e truovati così i numeri 1, 390, 60840, ec. dell'ultima colonna, li pongo in (X), coll'aggiugnere alla destra del secondo, del terzo, del quarto, e del quinto di essi gli zeri, come di sopra, e coll'unire alla destra dell'ultimo il terzo membro 45937 del numero dato. Divido in seguito l'ultimo di questi numeri (X) pel penultimo, e siccome le cifre componenti il numero antepenultimo sono tre di meno delle componenti il penultimo, siccome accadde nei numeri (V), dirò qui pure, come si disse nel numero precedente in corrispondenza ai suddetti (V), essere noi quasi certi, che il quoto 5 ottenuto è opportuno, perchè non troppo grande. Tralasciato perciò di fare i tentativi simili agli esposti in (IV), ed in (IX), colloco alla sinistra dello 1 in (X) esso 5, determino con la solita operazione i numeri 1, 3920, 6142650, ec. dell' ultima colonna, e scritti essi nuovamente in (XI), unendo come precedentemente gli zeri alla destra del secondo del terzo del quarto e del quinto, e alla destra del sesto il membro 54493, divido, come si è fatto in (X) l'ultimo di loro pel penultimo. Ancora qui il quoto 3, che ne risulta, potrò dire essere non troppo grande, e però atto all'intento, poichè il numero penultimo contiene quattro cifre più di quelle, che esistono nell'antepenultimo: posto pertanto senz'altro tentativo esso 3 alla sinistra dello 1, comincio ad effettuare la solita operazione; ma al fine della prima riga per ultimo risultato ottienesi lo zero. Dunque concluderò come sul fine del numero precedente, che l'operazione è terminata, che il dato numero (VI) è una potenza quinta esatta, e che 7853 ne è la sua quinta radice.

3. Venga domandata in terzo luogo la radice terza del numero 35.

Eseguisco ne'luoghi (XII), (XIII), ec. (XXI) la solita operazione; riflettendo, che ai numeri 8, 2232, 34217, ec., che si ottengono nelle ultime colonne, debbonsi unire, mentre si scrivono di nuovo ne'luoghi (XIII), (XV), (XVI), ec. tre zeri; perchè il dato numero 35 non essendo cubo perfetto, l'operazione non può aver fine, e in esso non esistendo cifre ulteriori, non si possono agl'indicati numeri 8, 2232, 34217, ec. aggiungere, che gli esposti zeri. Avvertasi di più, che in (XVII), siccome il numero 3209832300 non si contiene alcuna volta esatta nell'altro 2128489000; quindi si scrive per quoto lo zero, e aggiunti i soliti zeri, uno al numero 98130, due al 3209832300, e tre al 2128489000, ricavo con la consueta divisione il quoziente 6, lo pongo presso dello zero, e proseguo la operazione solita: un accidente simile è accaduto eziandio in (XXI) . Raccolti finalmente i numeri risultati dall'operazione coll'osservare, che a riserva del primo 3, gli altri tutti deggiono essere evidentemente tanti decimali, dirò essere prossimamente $\sqrt[3]{35}=3,2710663101$.

4. I. Giunti nella precedente operazione ai risultati (XVIII), potremo ottenere le ulteriori cifre 3, 1, 0, 1 della radice in una maniera assai semplice e breve, operando come segue. Osservando, che nel terzo numero dell'ultima colonna ivi esistente contengonsi sette cifre, tolgo le ultime sette dal primo, e scritti in (XXII) i risultati 320996, 995693, divido questo per quello: ottenuto così il quoziente 3, e l'avanzo 32705, taglio dal divisore 320996 l'ultima cifra 6, divido pel restante 32099 il 32705, pongo presso del 3 il quoto 1, e avuto il residuo 606, taglio dal divisore l'altra cifra 9, e proseguo a dividere il 606 pel numero, che risulta, 3209: poichè il quoziente, che ne viene, è 0, e l'avanzo corrispondente è lo stesso 606, pongo appresso dello zero già scritto il quoziente 1, ed avrò così ottenute con molta semplicità le indicate cifre 3, 1, 0, 1. Siccome poi il numero 286, che ha servito all'ultima divisione, è composto tuttavia di tre cifre, potrò anche per una volta eseguire l'operazione ora accennata, e tagliata quindi dal 320 l'ultima cifra 0, potrò dividere per 32 il residuo 286, ed il quoto 8 sarà la cifra, che nel valore della radice richiesta succede all'ultima 1. Ridotto così il dividendo a contenere nel 30 due sole cifre terminerò qui l'operazione.

Se oltrepassati i (XVIII) fossimo nella precedente estrazione della radice giunti ai risultati (XX); allora siccome il terzo numero dell'ultima colonna contiene nove cifre, tagliate le ultime dieci dal numero secondo, e le ultime nove dal numero primo, avrei potuto instituire l'operazione ora accennata tra i numeri 32099624, 6053659; ed ottenuto così siccome in (XXIII) il quoziente 018859, scrivendo esso dopo lo 1 quoziente della divisione in (XX), ne verrà il numero 3, 27106631018859, distante dal vero valore di $\sqrt[3]{35}$ meno di $\frac{1}{10^{14}}$, e però distante, quanto meno si può con 14 cifre decimali.

II. Conviene nel metodo di abbreviamento ora esposto avere alcune riflessioni, se nell'eseguire le successive divisioni risulti uno dei residui formato di una sola cifra; allora in luogo delle cifre, che si troverebbero ulteriormente, e che supporrò di numero r, pongansi tanti zeri, e l'operazione è terminata: se per esempio in (XXII) nella divisione seconda invece di 606, si fosse ottenuto un residuo di una sola cifra, per esempio il 6, allora avendosi nel caso nostro $r = 3$, porrei presso l'ottenuto 31, tre zeri, e direi, che 31000 sarebbe il numero domandato. Che se qualcheduno dei residui fosse formato di due cifre: allora, se questo residuo fosse il primo, aggiungerei al numero già ricavato $r - 1$ zeri, e tagliate secondo la regola stabilita r cifre dal divisore, dividerei il residuo supposto per quanto fosse rimasto nel divisore. Se in (XXII) il residuo primo invece di 32705 fosse stato un numero di due sole cifre, fosse stato per esempio 75; poichè in questo caso abbiamo $r = 4$ al numero 3 ottenuto dalla prima divisione aggiungerei $r - 1 = 3$ zeri, quindi tagliate dal divisore 320996 le ultime $r = 4$ cifre, dividerei pel 32 che resta il supposto avanzo 75, ed essendo 2 il quoto, che ne viene, direi, che il numero richiesto sarebbe 30002. Che se il residuo avente due cifre sia, non già il primo, ma uno degli ulteriori: allora, aggiunti, come precedentemente, al numero prima ottenuto gli $r - 1$ zeri, non si deve poi, come precedentemente, determinare, e aggiungere dopo gli zeri alcun'altra cifra. Così in (XXII) se il secondo residuo invece di 606 fosse stato un numero di due cifre, per esempio 66; avendosi in questo caso $r = 3$ avrei all'ottenuto 31 uniti $r - 1 = 2$ zeri, e nulla aggiungendo di più, avrei detto, che nel caso ora supposto non può mediante il nostro metodo di abbreviamento, ricavarsi, che il numero 3100, il quale sia sicuramente fornito del dovuto gra-

Da inserirsi dopo la pagina 380.

(VIII)

, 3430000 , 120050000 , 130590637ı
, 51864 , 3844912 , 150809296 , 99432003
, 366 , 54792 , 4283248 , 185075280
ı , 374 , 57784 , 4745520
ı , 382 , 60840
ı , 390
ı

(IX)

9| 343 , 12005 , 13590
8| 343 , 15092 , 135738
14749 , 117992

(XI)

, 4837366250000 , 1898666253125000o , 57003540531254493
, 616342759 , 4839215278277 , 19001180177084831 , 00000000000000000

(XV)

6

7| ı , 960 , 307200 , 2232000
ı , 967 , 313969 , 34217
ı , 974 , 320787
ı , 981
ı

(XVIII)

4
8
8
ı

6| ı , 9813180 , 3209950057080o , 20255429298400o
ı , 9813186 , 32099559449916 , 9956936284504
ı , 9813192 , 32099618329068
ı , 9813198
ı

(XX)

90 , 32099624216987070o , 32704990259575300o
ı , 981319891 , 320996243151190591 , 60536594445624o9
ı , 981319892 , 320996244133510483
ı , 981319893
ı

II)

95693 | 31018
32705
606
286
30

(XXIII)

320 | 9 | 9 | 6 | 2 | 4 | 6053659 | 018859
2843697
275729
18937
2892
12

Da inserirsi dopo la pagina 380.

(VI)

29866, 06371, 45937, 54493

(VII)

7	1,	0,	0;	0,	0,	29866	
		1,	7,	49,	343,	2401;	13059
			1,	14,	147,	1372,	12005
				1,	21,	294,	3430
					1,	28,	490
						1,	35
							1

(VIII)

8	1,	350,	49000,	3430000.	120050000,	1305906371	
		1,	358,	51864,	3844912,	150809296,	99432003
			1,	366,	54792,	4283248,	185075280
				1,	374,	57784,	4745520
					1,	382,	60840
						1,	390
							1

(IX)

9	343,	12005,	13590	
8		343,	15092,	135738
			14749,	117992

(X)

5	1,	3900,	6084000,	4745520000;	185075280000,	9943200345937	
		1;	3905,	6103525,	4776037625,	1874632988125,	5700354053 12
			1,	3910,	6123075,	4806653000,	1898666253125
				1,	3915,	6142650,	4837366250
					1,	3920,	6162250
						1,	3925
							1

(XI)

3	1,	39250,	616225000,	4837366250000,	18986662531250000,	57003540531254493	
		1,	39253,	616342759,	4839215278277,	19001180177084831,	0000000000000000

(XII)

3	1,	0,	0,	35	
		1,	3,	9,	8
			1,	6,	27
				1,	9
					1

(XIII)

2	1,	90,	2700,	8000	
		1,	92,	2884,	2232
			1,	94,	3072
				1,	96
					1

(XIV)

2	9,	270,	300	
		9,	288,	576

(XV)

7	1;	960,	307200,	2232000	
		1,	967,	313969,	34217
			1,	974,	320787
				1,	981
					1

(XVI)

1	1,	9810,	32078700,	34217000	
		1,	9811,	32088511,	2128489
			1,	9812,	32098323
				1,	9813
					1

(XVII)

06	1;	981300,	320983230000,	212848900000	
		1,	981306,	320989117836,	202554292984
			1,	981312,	320995005708
				1,	981318
					1

(XVIII)

6	1,	9813180,	32099500570800,	202554292984000	
		1,	9813186,	32099559449916,	9956936284504
			1,	9813192,	32099618329068
				1,	9813198
					1

(XIX)

3	1,	98131980,	3209961832906800,	9956936284504000	
		1,	98131983,	3209962127302749,	327049902595753
			1,	98131986,	3209962421698707
				1,	98131989
					1

(XX)

1	1,	981319890,	320996242169870700,	327049902595753000	
		1,	981319891,	320996243151190591,	605365944562409
			1,	981319892,	320996244133510483
				1,	981319893
					1

(XXI)

01| 1, 98131989300, 3209962441335104830000, 6053659444562409000000

(XXII)

32	0	9	9	6	995693	31018
					32705	
					606	
					286	
					30	

(XXIII)

320	9	9	6	2	4	6053659	018859
						2843697	
						275729	
						18937	
						2892	
						12	

do di approssimazione verso il valor vero della radice. Perciò in (XXIII) dopo la quinta divisione essendoci risultato un residuo di due sole cifre, cioè il 12, non abbiamo aggiunto al numero 018859 il quoziente 0, che sarebbesi ricavato dalla divisione di 12 per 320: perchè, siccome in questo caso abbiamo $r = 1$, per la regola stabilita non dobbiamo all' ottenuto 018859 che aggiugnere $r - 1 = 0$ zeri.

Volendosi estendere questo metodo alla determinazione di un numero di cifre > 10, bisogna avere delle riflessioni ulteriori, le quali esporrò in seguito, ove darò le opportune dimostrazioni, e che presentemente tralascio tanto per amore di brevità, come perchè mai, o quasi mai viene in pratica richiesta un' approssimazione tanto inoltrata.

Finalmente si rifletta, che in caso di approssimazione, mentre il valore, il quale ottienesi col mezzo de' metodi esposti ne' numeri 1, 2, 3, I. 4 è sempre minore del valor vero della radice domandata; il valore poi, che risulta da' metodi stessi, mentre abbian luogo i casi contemplati nel (prec. II), può essere tanto maggiore, come minore dell' indicato valor vero della radice. In tutti i casi però l' approssimazione è tanta, quanta può mai esigersi col trovato numero di decimali.

5. Le dimostrazioni di quanto è stato fin qui esposto praticamente dipendono in primo luogo dall' operazione, che è stata accennata nel N.° 12 della Memoria *Sopra la determinazione delle radici nelle Equazioni numeriche di qualunque grado*, che è stata da me presentata nel 1803 alla Società Italiana delle Scienze, e dalla Società medesima pubblicata nel 1804; operazione, per mezzo della quale una data Equazione numerica

(XXIV) $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2}$ ec. $+ Sx^2 + Tx + V = 0$,

nella ipotesi di $x = p + y$, ove p esprime un numero razionale qualunque, trasformasi speditamente nella corrispondente Equazione in y, che supporrò cominciando a scriverla dall' ultimo termine, essere la

(XXV) $v + uy + ty^2 + sy^3 + ry^4 +$ ec. $+ by^{m-1} + Ay^m = 0$.

Ho dimostrata la verità di tale operazione tanto nel citato N.° 12 della citata Memoria, come nei numeri 123, ec. 127 dell'Appendice alla mia Algebra Elementare; ma siccome colà suppongo noto il calcolo differenziale, e quivi note le serie algebriche; non sarà forse inconveniente, prima di procedere innanzi, l'esporre nuovamente simile dimostrazione, senza supporre le indicate nozioni, ed in un modo per conseguenza più elementare.

6. Suppongasi
$\mathrm{A}p+\mathrm{B}=\mathrm{P}_1$, $\mathrm{A}p^2+\mathrm{B}p+\mathrm{C}=\mathrm{P}_2$, $\mathrm{A}p^3+\mathrm{B}p^2+\mathrm{C}p+\mathrm{D}=\mathrm{P}_3$, ec., e in generale $\mathrm{A}p^n+\mathrm{B}p^{n-1}+\mathrm{C}p^{n-2}+$ ec. $+\mathrm{H}p^{n-h}+$ ec. $+\mathrm{L}p^2+\mathrm{M}p+\mathrm{N}=\mathrm{P}_n$.

Moltiplichiamo nella P_n ciascun termine successivamente per l'esponente di p, si diminuisca l'esponente stesso di un' unità, e i successivi risultati, che ne derivano, s'indichino con la stessa P_n, a cui vengano successivamente sovrapposti uno, due, tre, ec. apici, cosicchè si abbia

$$n\mathrm{A}p^{n-1}+(n-1)\mathrm{B}p^{n-2}+(n-2)\mathrm{C}p^{n-3}+\text{ec.}+(n-h)\mathrm{H}p^{n-h-1}+2\mathrm{L}p+\mathrm{M}=\mathrm{P}'_n$$

$$n(n-1)\mathrm{A}p^{n-2}+(n-1)(n-2)\mathrm{B}p^{n-3}+(n-2)(n-3)\mathrm{C}p^{n-4}+\text{ec.}+(n-h)(n-h-1)\mathrm{H}p^{n-h-2}+\text{ec.}+2\mathrm{L}=\mathrm{P}''_n,$$

$$n(n-1)(n-2)\mathrm{A}p^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)\mathrm{B}p^{n-4}+(n-2)(n-3)(n-4)\mathrm{C}p^{n-5}+\text{ec.}+(n-h)(n-h-1)(n-h-2)\mathrm{H}p^{n-h-3}+\text{ec.}=\mathrm{P}'''_n,\ \text{ec.}$$

e in generale

$$(\text{XXVI})\quad n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)\mathrm{A}p^{n-r}+(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r)\mathrm{B}p^{n-r-1}+(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r-1)\mathrm{C}p^{n-r-2}+\text{ec.}+(n-h)(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-h-r+1)\mathrm{H}p^{n-h-r}+\text{ec.}=\mathrm{P}^{(r)}_n.$$

In conseguenza di queste supposizioni avremo evidentemente

$\mathrm{P}'_1=\mathrm{A}$, $\mathrm{P}''_1=0$

$\mathrm{P}'_2=2\mathrm{A}p+\mathrm{B}$, $\mathrm{P}''_2=2\mathrm{A}$, $\mathrm{P}'''_2=0$

$\mathrm{P}'_3=3\mathrm{A}p^2+2\mathrm{B}p+\mathrm{C}$, $\mathrm{P}''_3=2.3\mathrm{A}p+2\mathrm{B}$, $\mathrm{P}'''_3=2.3\mathrm{A}$, $\mathrm{P}''''_3=0$, ec.

avremo $P^{(n)}_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1A$, $P^{(n+1)}_n = 0$, e fatto $n=m$, avremo

$P_m = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + \text{ec.} + Sp^2 + Tp + V$,

$P'_m = mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} + \text{ec.} + 2Sp + T$,

$P''_m = m(m-1)Ap^{m-2} + (m-1)(m-2)Bp^{m-3} + (m-2)(m-3)Cp^{m-4} + \text{ec.} + 2S$,

$P'''_m = m(m-1)(m-2)Ap^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)Bp^{m-4} + (m-2)(m-3)(m-4)Cp^{m-5} + \text{ec.}$

ec.

7. Qualunque siansi i due numeri interi, e positivi n, r, purchè abbiasi $r>0$, e non $>n$, dovrà sempre essere

$$(\text{XXVII}) \quad P^{(r)}_n = rP^{(r-1)}_{n-1} + pP^{(r)}_{n-1}.$$

Posto nella (XXVI) $n-1$ invece di n, avremo

$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r)Ap^{n-r-1} + (n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r-1)Bp^{n-r-2} +$
$(n-3)(n-4)(n-5)\ldots(n-r-2)Cp^{n-r-3} + \text{ec.} +$
$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r)Hp^{n-h-r-1} + \text{ec.} = P^{(r)}_{n-1}$,

e posto $n-1$ invece di n, ed $r-1$ invece di r risulterà

$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r+1)Ap^{n-r} + (n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r)Bp^{n-r-1} +$
$(n-3)(n-4)(n-5)\ldots(n-r-1)Cp^{n-r-2} + \text{ec.} +$
$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r} + \text{ec.} = P^{(r-1)}_{n-1}$.

Prendansi i termini generali

$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r)Hp^{n-h-r-1}$,
$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r}$

di questi due risultati $P^{(r)}_{n-1}$, $P^{(r-1)}_{n-1}$, e moltiplicato il primo di essi per p, ed il secondo per r, si sommino insieme; ottenendosi da ciò

$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r)Hp^{n-h-r} +$
$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)rHp^{n-h-r} =$
$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)(n-h-r+r)Hp^{n-h-r} =$
$(n-h)(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r}$,

si avrà l'Equazione identica

$(\text{XXVIII})\ (n-h)(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r} =$
$r(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r} +$
$p(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r)Hp^{n-h-r-1}$.

Ora il primo membro di questa Equazione non è che il termine generale della quantità $P^{(r)}_n$, il primo termine del suo secondo membro non è che il termine generale della

$P^{(r-1)}_{n-1}$ moltiplicato per r, ed il termine secondo dello stesso membro secondo non è che il termine generale della $P^{(r)}_{n-1}$ moltiplicato per p. Dunque, poichè col fare successivamente $h=0, 1, 2, 3, 4$, ec., dal primo membro della (XXVIII) si ottengono tutti i successivi termini della $P^{(r)}_n$, e dai due termini del membro secondo si ottengono tutti i successivi termini delle $P^{(r-1)}_{n-1}$, $P^{(r)}_n$ moltiplicati i primi per r, ed i secondi per p; ne segue, che, essendo l'Equazione (XXVIII) identica, e però vera per tutti gli esposti valori di h, tutti i termini della $P^{(r)}_n$ uguaglieranno le somme dei rispettivi termini delle $rP^{(r-1)}_{n-1}$, $pP^{(r)}_{n-1}$, e però si verificherà l'Equazione (XXVII).

8. Supponghiamo
$P'_n=\alpha_n$, $P''_n=2\beta_n$, $P'''_n=2.3\gamma_n$, $P''''_n=2.3.4\delta_n$
$P^v_n=2.3.4.5\varepsilon_n$, ec. Ponendo quivi $n-1$ invece di n, otterremo
$P'_{n-1}=\alpha_{n-1}$, $P''_{n-1}=2\beta_{n-1}$, $P'''_{n-1}=2.3\gamma_{n-1}$, $P''''_{n-1}=2.3.4\delta_{n-1}$,
$P^v_{n-1}=2.3.4.5\varepsilon_{n-1}$ ec.

In conseguenza delle supposizioni ora fatte, e delle Equazioni truovate nel N.° 6, agevolmente vedremo, che col fare n successivamente $=1, 2, 3, 4, 5$, ec., risulta $A=\alpha_1=\beta_2=\gamma_3=\delta_4=\varepsilon_5=$ ec.

Inoltre per le proprietà già note dei coefficienti della Equazione (XXV) considerata come trasformata della (XXIV) sotto l'ipotesi di $x=p+y$ (N.° 5), e per le Equazioni del citato N.° 6 avendosi

$$v=P_m,\ u=P'_m,\ t=\frac{P''_m}{2},\ s=\frac{P'''_m}{2.3},\ r=\frac{P''''_m}{2.3.4},\ q=\frac{P'''''_m}{2.3.4.5},\ \text{ec.};$$

ne verrà

$$v=P_m,\ u=\alpha_m,\ t=\beta_m,\ s=\gamma_m,\ r=\delta_m,\ q=\varepsilon_m,\ \text{ec.}$$

9. Si collochi nella Equazione generale (XXVII) un apice in luogo di r: risultando da ciò $P'_n=pP'_{n-1}+P_{n-1}$, per le supposizioni del numero precedente si avrà

$$\alpha_n=p\alpha_{n-1}+P_{n-1}.$$

Sostituiti nella medesima (XXVII) due apici invece di

r, ot-

r, ottiensi $P''_n = pP''_{n-1} + 2P'_{n-1}$. Dunque per le citate supposizioni del numero precedente sarà

$$\beta_n = p\beta_{n-1} + \alpha_{n-1}.$$

Pongansi nella solita (XXVII) tre apici in luogo di r; avendosi quindi $P'''_n = pP'''_{n-1} + 3P''_{n-1}$, risulterà

$$\gamma_n = p\gamma_{n-1} + \beta_{n-1}.$$

Nella stessa maniera proseguendo a sostituire quattro, cinque, ec. apici invece di r; poichè ricavasi in corrispondenza $P^{\prime v}_n = pP^{\prime v}_{n-1} + 4P'''_{n-1}$, $P^v_n = pP^v_{n-1} + 5P^{\prime v}_{n-1}$, ec., ne verrà

$$\delta_n = p\delta_{n-1} + \gamma_{n-1}$$
$$\varepsilon_n = p\varepsilon_{n-1} + \delta_{n-1}$$

ec.

Supponghiamo successivamente nelle Equazioni ora truovate $n = 2, 3, 4, 5, 6$, ec.; avremo quindi, e pel numero precedente

$\alpha_2 = pA + P_1$, $\alpha_3 = p\alpha_2 + P_2$, $\alpha_4 = p\alpha_3 + P_3$, $\alpha_5 = p\alpha_4 + P_4$, $\alpha_6 = p\alpha_5 + P_5$, ec.
$\beta_3 = pA + \alpha_2$, $\beta_4 = p\beta_3 + \alpha_3$, $\beta_5 = p\beta_4 + \alpha_4$, $\beta_6 = p\beta_5 + \alpha_5$, ec.
$\gamma_4 = pA + \beta_3$, $\gamma_5 = p\gamma_4 + \beta_4$, $\gamma_6 = p\gamma_5 + \beta_5$, ec.
$\delta_5 = pA + \gamma_4$, $\delta_6 = p\delta_5 + \gamma_5$, ec.
$\varepsilon_6 = pA + \delta_5$, ec.
ec.

10. Per eseguire il metodo di trasformazione indicato nel N.° 5 sappiamo dalla sovraindicata Memoria (N.° 5), e dalla Appendice alla mia algebra doversi scrivere, siccome in (XXIX) prima in una linea orizzontale i coefficienti A, B, C, ec. V della equazione data (XXIV), e sopra, o alla sinistra di questi, diviso con una stanghetta verticale, il numero p. Quindi si formano successivamente sotto della prima tante altre linee orizzontali seconda, terza, quarta, ec., e sappiamo formarsi queste col porre da prima, nel modo, che apparisce in (XXIX), in ciascuna di esse il primo coefficiente A, poscia col moltiplicare esso A, e così tutti gli altri termini successivi, che van risultando, per p, e col sommare ciascheduno dei prodotti, che ne nascono, col termine immediatamente sovrap-

posto, così proseguendo fino alla colonna verticale $m+2$ *esima* . Se nella (XXIV) mancassero dei termini, in luogo de' loro coefficienti sappiamo finalmente, che bisognerebbe scrivere tanti zeri .

Operando nella maniera ora accennata, è facile a vedersi dal N.° 6, e dalle formole determinate nel numero precedente, che i termini, i quali in (XXIX) costituiscono la fila seconda, altro infine non sono, che gli A, P_1, P_2, P_3, P_4, ec., che i termini della fila terza non sono, che gli A, α_2, α_3, α_4, ec., che quelli della quarta sono gli A, β_3, β_4 ec.; che sono A, γ_4, ec. i termini della quinta; e così di seguito. Dunque proseguendo queste operazioni fino alla colonna verticale $m+1$ *esima*, otterremo nella successiva $m+2$ *esima* i termini P_m, α_m, β_m, γ_m, δ_m, ε_n, ec. A; ma questi per quanto si è detto sul fine del N.° 8, costituiscono i valori de' coefficienti v, u, t, s, r, ec. A della Equazione trasformata (XXV). Dunque, sostituiti in loro vece, verrà così essa trasformata a determinarsi. Ed ecco per simile guisa dimostrato, indipendentemente dalla cognizione attuale del calcolo differenziale e delle serie il sovraesposto metodo di trasformazione

$$
\begin{array}{lllllllllll}
(\mathrm{XXIX})\quad p\,| & \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \mathrm{C}, & \mathrm{D}, & \mathrm{E}, & \mathrm{F}, & \mathrm{G}, & \text{ec.} & \mathrm{V} & \\
 & & \mathrm{A}, & P_1, & P_2, & P_3, & P_4, & P_5, & \text{ec.} & P_{m-1}, & P_m \\
 & & & \mathrm{A}, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \text{ec.} & \alpha_{m-1}, & \alpha_m \\
 & & & & \mathrm{A}, & \beta_3, & \beta_4, & \beta_5, & \text{ec.} & \beta_{m-1}, & \beta_m \\
 & & & & & \mathrm{A}, & \gamma_4, & \gamma_5, & \text{ec.} & \gamma_{m-1}, & \gamma_m \\
 & & & & & & \mathrm{A}, & \delta_5, & \text{ec.} & \delta_{m-1}, & \delta_m \\
 & & & & & & & \mathrm{A}, & \text{ec.} & \varepsilon_{m-1}, & \varepsilon_m \\
 & & & & & & & & \text{ec.} & &
\end{array}
$$

A

Se l'Equazione data sia per esempio A la $x^5-4x^3-12x^2+9x+10=0$, e supposto $x=y+2$, se ne voglia la trasformata; operando qui sotto, come è stato insegnato, troveremo speditamente essere questa la

$$y^5+10y^4+36y^3+44y^2-7y-20=0$$

2|	1	0,	—4,	—12,	9,	10	
		1,	2,	0,	—12,	—15,	—20
			1,	4,	8,	4,	—7
				1,	6,	20,	44
					1,	8,	36
						1,	10
							1.

11. Osservando i numeri ottenuti in (XXIX), vedesi, che mentre quelli dell'ultima colonna sono i valori dei coefficienti della Equazione trasformata (XXV); i numeri della colonna penultima, cioè i numeri P_{m-1}, α_{m-1}, β_{m-1}, ec. altro non sono, che i coefficienti della trasformata, che, col porre $x = p + y$, ottienesi dalla $Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ ec. $+ Sx + T = 0$. Così i numeri della colonna antepenultima costituiscono i coefficienti della trasformata, che sotto la stessa supposizione di $x = p + y$, ricavasi dalla $Ax^{m-2} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ ec. $+ S = 0$, e così di seguito.

Inoltre i numeri A, P_1, P_2, P_3, ec. della seconda linea orizzontale altro non sono, se non che i valori, i quali per la solita ipotesi di $x = p + y$ acquistano rispettivamente le quantità A, $Ax + B$, $Ax^2 + Bx + C$, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, ec.: i numeri A, α_2, α_3, α_4, ec. della fila terza altro non sono, che le prime derivate dalle P_1, P_2, P_3, P_4, ec., considerando la p come variabile; i numeri A, β_3, β_4, ec. della fila quarta altro non sono, che le derivate seconde delle P_2, P_3, P_4, ec. divise per 2; gli altri A, γ_4 ec. della riga quinta costituiscono le derivate terze delle stesse P_3, P_4 ec. divise per 2 . 3: e così in progresso.

Finalmente i numeri delle linee, che scorrono obbliquamente dall'alto al basso, e da sinistra a destra costituiscono tante serie di numeri a differenze costanti. Così i numeri A, A, A, ec. della prima delle linee ora accennate sono tutti uguali fra loro; gli altri, B, P_1, α_2, β_3, γ_4, ec. della linea seconda formano una serie, in cui la differenza prima è costante, ed è questa $= Ap$; i numeri C, P_2, α_3, β_4, γ_5, ec.

costituiscono una serie, nella quale la differenza seconda è costante, ed $= Ap^2$; una serie, in cui la differenza terza è costante, ed $= Ap^3$ viene formata dai numeri D, P_3, α_4, β_5, ec. della fila quarta; e così di seguito.

12. Acciocchè il metodo sovraesposto di trasformare la Equazione (XXIV) nella (XXV) sia vantaggioso, e di abbreviamento; esigesi evidentemente, che la (XXIV) sia un'Equazione numerica, ove i coefficienti A, B, C, ec. siano tanti numeri interi, e si esige, che sia intero anche il numero p nella $x = p + y$. Che se i coefficienti della (XXIV) fossero o tutti, o in parte rotti; converrebbe prima ridurli allo stesso denominatore, operare in seguito giusta il N.° 10 con i soli numeratori, e in fine dividere il tutto pel denominator comune, mentre se ne voglia, o se ne debba tener conto. Che se sia fratto il numero p: allora supposto $p = \frac{h}{k}$, converrà in primo luogo scrivere in una linea orizzontale, siccome in (XXX), le successive potenze 1, k, k^2, k^3, ec. k^m, e sotto di esse rispettivamente in una seconda linea scrivere i coefficienti A, B, C, D, ec. V; moltiplicati quindi questi con quelle, e ottenuti i prodotti A, Bk, Ck^2, Dk^3, ec. Vk^m, converrà con essi, e col solo numeratore h eseguire l'indicata operazione del citato N.° 10; e finalmente moltiplicare l'ultimo termine della fila, che nella operazione risulta prima per $\frac{1}{k^m}$, moltiplicare il termine ultimo della fila seconda per $\frac{y}{k^{m-1}}$, l'ultimo della fila terza per $\frac{y^2}{k^{m-2}}$, l'ultimo della fila quarta per $\frac{y^3}{k^{m-3}}$, e così in progresso: la somma di tutti questi prodotti costituirà la trasformata richiesta.

$$(\text{XXX})\quad \begin{array}{ccccccc}
1, & k, & k^2, & k^3, & \text{ec.} & k^{m-1}, & k^m \\
A, & B, & C, & D, & \text{ec.} & T, & V \\ \hline
A, & Bk, & Ck^2, & Dk^3, & \text{ec.} & Tk^{m-1}, & Vk^m
\end{array}$$

Sia per esempio $x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x - \frac{8}{3} = 0$ l'Equazione data, e vogliasi $x = y - 3$. Togliendo i rotti comincio dal ridurre essa Equazione alla $6x^4 + 10x^3 - 21x^2 + 24x - 16 = 0$; quindi operando qui sotto col metodo del N.° 10 ottengo la trasformata $6y^4 - 62y^3 + 213y^2 - 228y - 61 = 0$, ossia dividendo pel denominatore 6, $y^4 - \frac{62}{6}y^3 + \frac{213}{6}y^2 - \frac{228}{6}y - \frac{61}{6} = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-3 & 6, & 10, & -21, & 24, & -16 \\
 & & 6, & -8, & 3, & 15, & -61 \\
 & & & 6, & -26, & 81, & -228 \\
 & & & & 6, & -44, & 213 \\
 & & & & & 6, & -62 \\
 & & & & & & 6
\end{array}$$

Essendo $x^5 - 2x^4 + 10x^2 - 15 = 0$ l'Equazione data, vogliasi in secondo luogo la trasformata, che ottienesi dal porre $x = y + \frac{3}{4}$. Opero qui sotto, come è stato poc'anzi accennato, e la trasformata sarà $y^5 + \frac{7}{4}y^4 - \frac{6}{16}y^3 + \frac{478}{64}y^2 + \frac{3381}{256}y - \frac{10005}{1024} = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1, & 4, & 16, & 64, & 256, & 1024 & \\
 & 1, & -2, & 0, & 10, & 0, & -15 & \\
\hline
3 & 1, & -8, & 0, & 640, & 0, & -15360 & \\
 & & 1, & -5, & -15, & 595, & 1785, & -10005 \\
 & & & 1, & -2, & -21, & 532, & 3381 \\
 & & & & 1, & 1, & -18, & 478 \\
 & & & & & 1, & 4, & -6 \\
 & & & & & & 1, & 7 \\
 & & & & & & & 1.
\end{array}$$

Per riconoscere il perchè il metodo ora esposto somministri nella ipotesi di $x = y + \frac{h}{k}$ la trasformata richiesta; si osservi, che posto $x = y + p$, i coefficienti della (XXV) (N.° 5) sono

$$v = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + \text{ec.} + Rp^3 + Sp^2 + Tp + V,$$
$$u = mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} + \text{ec.} + 3Rp^2 + 2Sp + T,$$

$$t = \frac{m(m-1)}{2} Ap^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Bp^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} Cp^{m-4} + \text{ec.}$$
$$+ 3Rp + S.$$
$$s = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\quad 3} Ap^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\quad 3} Bp^{m-4} + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2\quad 3}$$
$$Cp^{m-5} + \text{ec.} + R,$$

ec. ec.

Dunque collocata la frazione $\frac{h}{k}$ invece di p, e ridotti in ciascuna fila tutti i termini allo stesso denominatore, poichè si ottiene

$$\text{(XXXI)}\ v = \frac{1}{k^m}(Ah^m + Bkh^{m-1} + Ck^2h^{m-2} + \text{ec.}\ Rk^{m-3}h^3 +$$
$$Sk^{m-2}h^2 + Tk^{m-1}h + Vk^m),$$
$$u = \frac{1}{k^{m-1}}[mAh^{m-1} + (m-1)Bkh^{m-2} + (m-2)Ck^2h^{m-3} + \text{ec.}$$
$$+ 3Rk^{m-3}h^2 + 2Sk^{m-2}h + Tk^{m-1}]$$
$$t = \frac{1}{k^{m-2}}\left(\frac{m(m-1)}{2}Ah^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Bkh^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} \times\right.$$
$$\left.Ck^2h^{m-4} + \text{ec.} + 3Rk^{m-3}h + Sk^{m-2}\right),$$
$$s = \frac{1}{k^{m-3}}\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2\quad 3}Ah^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\quad 3}Bkh^{m-4} +\right.$$
$$\left.\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2\quad 3}Ck^2h^{m-5} + \text{ec.} + Rk^{m-3}\right)$$

ec. ec.

saranno questi ultimi risultati (XXXI) i coefficienti della trasformata nella supposizione di $x = y + \frac{h}{k}$. Ma se poste le quantità A, Bk, Ck^2, ec. Rk^{m-3}, Sk^{m-2}, Tk^{m-1}, Vk^m, con queste, e col numero h si eseguiscono le operazioni del N.° 10, ottengonsi appunto le quantità, che nei risultati (XXXI) esistono tra le parentesi. Dunque moltiplicando la prima di queste quantità, come si è proposto di sopra, per $\frac{1}{k^m}$, la seconda per $\frac{y}{k^{m-1}}$, la terza per $\frac{y^2}{k^{m-2}}$, e così di seguito, e sommando tutto insieme, dagli stessi risultati (XXXI) è chiaro, che verrà la trasformata, che si domandava.

13. Suppongasi $A = 1$, $B = m$, $C = \frac{m(m-1)}{2}$, $D = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}$, ec. $S = \frac{m(m-1)}{2}$, $T = m$, $V = 1$.

Sostituendo questi valori nei risultati (XXXI); le quantità, che in essi esistono tra parentesi, divengono evidentemente

$$\left(h^m + mkh^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} k^2 h^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3} k^3 h^{m-3} + \text{ec.} + \frac{m(m-1)}{2} k^{m-2} h^2 + mk^{m-1} h + k^m\right) = (k+h)^m,$$

$$m\left(h^{m-1} + (m-1)kh^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} k^2 h^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\ \ 3} \times k^3 h^{m-4} + \text{ec.} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} k^{m-3} h^2 + (m-1) k^{m-2} h + k^{m-1}\right) = m(k+h)^{m-1},$$

$$\frac{m(m-1)}{2}\left(h^{m-2} + (m-2)kh^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} k^2 h^{m-4} + \text{ec.} + (m-2)k^{m-3} h + k^{m-2}\right) = \frac{m(m-1)}{2}(k+h)^{m-2},$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}\left(h^{m-3} + (m-3)kh^{m-4} + \frac{(m-3)(m-4)}{2} k^2 h^{m-5} + \text{ec.} + (m-3)k^{m-4} h + k^{m-3}\right) = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}(k+h)^{m-3}$$

ec.

Dunque se tra la serie

(XXXII) $1,\ mk,\ \frac{m(m-1)}{2} k^2,\ \frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3} k^3,\ \text{ec.}\ \frac{m(m-1)}{2} k^{m-2},\ mk^{m-1},\ k^m$, ed il numero h si praticherà la solita operazione del N.° 10, i risultati, che quindi si ottengono nell'ultima colonna a destra, cioè corrispondenti in (XXIX) ai P_m, α_m, β_m, γ_m, ec. (N.° 10), saranno pel numero precedente

$(k+h)^m$, $m(k+h)^{m-1}$, $\frac{m(m-1)}{2}(k+h)^{m-2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}(k+h)^{m-3}$, ec. $\frac{m(m-1)}{2}(k+h)^2$, $m(k+h)$, 1, ossia scrivendoli al rovescio saranno

(XXXIII) 1, $m(k+h)$, $\frac{m(m-1)}{2}(k+h)^2$ ec. $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}(k+h)^{m-3}$, $\frac{m(m-1)}{2}(k+h)^{m-2}$, $m(k+h)^{m-1}$, $(k+h)^m$.

14. Suppongasi

1.° $k=0$, $h=a$; le quantità (XXXII) diverranno perciò

(XXXIV) 1, 0, 0, 0, ec. 0, 0, 0,

e le (XXXIII) diverranno

(XXXV) 1, ma, $\frac{m(m-1)}{2}a^2$, ec. $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}a^{m-3}$, $\frac{m(m-1)}{2}\times a^{m-2}$, ma^{m-1}, a^m.

2.° Si faccia $k=10a$, $h=b$; avremo quindi dalle (XXXII)

(XXXVI) 1, $m\times 10a$, $\frac{m(m-1)}{2}10^2a^2$, ec. $\frac{m(m-1)}{2}10^{m-2}a^{m-2}$, $m\times 10^{m-1}a^{m-1}$, $10^m\times a^m$,

e dalle (XXXIII) avremo

(XXXVII) 1, $m(10a+b)$, $\frac{m(m-1)}{2}(10a+b)^2$, ec. $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}\times(10a+b)^{m-3}$, $\frac{m(m-1)}{2}(10a+b)^{m-2}$, $m(10a+b)^{m-1}$, $(10a+b)^m$.

3.° Pongasi $k=(10^2a+10b)$, $h=c$; per questa supposizione le (XXXII) si cangeranno nelle

(XXXVIII) 1, $m(10^2a+10b)$, $\frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b)^2$, ec. $\frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b)^{m-2}$, $m(10^2a+10b)^{m-1}$, $(10^2a+10b)^m$,

e le (XXXIII) nelle

(XXXIX) 1, $m(10^2a+10b+c)$, $\frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b+c)$, ec.

$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}(10^2a+10b+c)^{m-3}$, $\frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b+c)^{m-2}$,
$m(10^2a+10b+c)^{m-1}$, $(10^2a+10b+c)^m$.

4.° Ponendo $k=(10^3a+10^2b+10c)$, $h=d$; le solite quantità (XXXII) diventeranno

(XL) 1, $m(10^3a+10^2b+10c)$, $\frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c)^2$, ec.
$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}(10^3a+10^2b+c)^{m-3}+\frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c)^{m-2}$,
$m(10^3a+10^2b+10c)^{m-1}$, $(10^3a+10^2b+10c)^m$; e le (XXXIII) diverranno

(XLI) 1, $m(10^3a+10^2b+10c+d)$, $\frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c+d)^2$, ec.
$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}(10^3a+10^2b+10c+d)^{m-3}$, $\frac{m(m-1)}{2}\times$
$(10^3a+10^2b+10c+d)^{m-2}$, $m(10^3a+10^2b+10c+d)^{m-1}$,
$(10^3a+10^2b+10c+d)^m$.
Così di seguito.

Dunque sotto le supposizioni de' precedenti 1.°, 2.°, 3.°, ec. dalle (XXXII) deducendosi rispettivamente le (XXXIV), (XXXVI), (XXXVIII), ec., e dalle (XXXIII) le (XXXV), (XXXVII), (XXXIX), ec.; ne segue, che eseguendo con le quantità (XXXIV), (XXXVI), (XXXVIII), ec., e rispettivamente i numeri a, b, c, ec. la operazione del N.° 10; i risultati, che quindi verranno nelle ultime colonne verticali, saranno pel N.° 13 in corrispondenza le quantità (XXXV), (XXXVII), (XXXIX) ec.

15. Vogliasi in generale il metodo di estrarre le radici numeriche, che nei (numeri 1, 2, 3) è stato esposto in particolare.

Sia P il numero intero dato, e se ne voglia la radice *mesima*.

Diviso perciò esso P, partendo dalla destra di m in m cifre, e formati così tanti membri, che supporrò essere di numero n, e denominerò G, H, I, K, L, ec., cosicchè si abbia

(XLII) $P=10^{(n-1)m}G+10^{(n-2)m}H+10^{(n-3)m}I+10^{(n-4)m}K+10^{(n-5)m}L+$ ec., comincio col mezzo della tavola delle potenze, o del metodo, che esporrò in seguito, dal determinare la massima potenza *mesima* esatta, che si contiene in G, potenza, la cui radice *mesima* sappiamo già essere sempre > 0, e < 10; chiamata essa a^m, formo con $m-1$ zeri la serie

(XLIII) 1, 0, 0, 0, ec. 0, 0, G,

e con questa, ed il numero a eseguisco l'operazione del N.° 10, avvertendo giusta la regola stabilita nei numeri 1, 2, 3, di sottrarre dal sovrapposto G il termine, che nella prima linea orizzontale ottienesi dal penultimo, moltiplicandolo per a. Poichè la serie (XLIII) altro non è, che la (XXXIV), cangiato in questa l'ultimo zero in G; dal numero precedente apparisce, che l'indicata operazione produrrà nell'ultima colonna verticale in corrispondenza alla precedente (XXXV) la serie

(XLIV) $1,\ ma,\ \frac{m(m-1)}{2}a^2$, ec. $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}a^{m-3},\ \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}$,

$ma^{m-1},\ G-a^m$.

Moltiplico ora in questa (XLIV) il secondo termine per 10, il terzo per 10^2, il quarto per 10^3, ossia pongo $10a$, invece di a, e cambiato l'ultimo termine $G-a^m$ nell'altro $10^m(G-a^m)$, aggiungo ad esso il secondo membro H del dato numero (XLII); avuta così la serie

(XLV) $1,\ m\times 10a,\ \frac{m(m-1)}{2}10^2a^2$, ec. $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}10^{m-3}a^{m-3}$,

$\frac{m(m-1)}{2}10^{m-2}a^{m-2},\ m\times 10^{m-1}a^{m-1},\ 10^m(G-a^m)+H$,

divido l'ultimo termine $10(G-a^m)+H$ pel penultimo $m\times 10^{m-1}a^{m-1}$, e seguendo il metodo accennato nei numeri 1, 2, 3 determino un numero b, il quale sia uguale, o prossimamente minore del quoto $\frac{10^m(G-a^m)+H}{m\times 10^{m-1}a^{m-1}}$, e tale, che sotto l'operazione del N.° 10 praticata tra esso b, e la serie (XLV), somministri non $> 10^m(G-a^m)+H$ il prodotto, che ottienesi moltiplicando per b il termine penultimo della prima linea orizzontale, che risulta dall' accennata operazione del N. 10. Ciò fatto compisco attualmente l' indicata operazione del N.° 10, con l' avvertenza, come precedentemente, di sottrarre dal sovrapposto $10^m(G-a^m)+H$ l' accennato prodotto risultante dalla moltiplicazione per b dell' esposto penultimo termine; ed essendo la serie (XLV) la stessa, che la (XXXVI) cambiato semplicemente il termine $10^m a^m$ nell' altro $10^m(G-a^m)+H$; vedesi che l' operazione accennata ci darà nell' ultima colonna la serie

$$\text{(XLVI)}\ 1, m(10a+b), \frac{m(m-1)}{2}(10a+b)^2, \text{ec.} \frac{m(m-1)}{2}(10a+b)^{m-2},$$
$$m(10a+b)^{m-1},\ 10^m G+H-(10a+b)^m,$$

la quale moltiplicato il secondo termine per 10, il terzo per 10^2, il quarto per 10^3, ossia posto $10a$, $10b$ invece della quantità a, b, e aggiunto il terzo membro I del dato numero (XLII) all' ultimo termine cambiato nel $10^m[10^m G+H-(10a+b)^m]$ diverrà

$$\text{(XLVII)}\ 1, (10^2a+10b), \frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b)\,\text{ec.} \frac{m(m-1)}{2}(10^2a+b)^{m-2},$$
$$m(10^2a+10b)^{m-1},\ 10^m[10^m G+H-(10a+b)^m]+I.$$

Mediante ora la divisione dell' ultimo termine $10^m[10^m G+H-(10a+b)^m]+I$ pel penultimo $m(10^2a+10b)^{m-1}$ truovo, come di sopra un quoto c opportuno, e con questo, e con la precedente serie (XLVII) eseguisco la solita operazione del N.° 10, osservando sempre di sottrarre dall' ultimo termine $10^m[10^m G+H-(10a+b)^m]+I$ quello che nasce dalla moltiplicazione per c del termine penultimo della prima linea orizzontale. Dal paragone delle (XXXVIII), (XLVII) vedesi pel numero precedente, che dall' esposta operazione, nell' ultima colonna verticale si otterrà la serie

$$\text{(XLVIII)}\ 1,\ m(10^2a+10b+c), \frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b+c)^2, \text{ec.}$$
$$\frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b+c)^{m-2},\ m(10^2a+10b+c)^{m-1},$$

$10^{2m}G+10^m H+I-(10^2a+10b+c)^m$.

Proseguendo l'operazione moltiplico, come di sopra rispettivamente per 10^1, 10^2, 10^3, ec. i successivi termini secondo, terzo, quarto, ec.; aggiungo al termine ultimo divenuto $10^m[10^{2m}G+10^m H+I-(10^2a+10b+c)^m]$ il quarto membro K; quindi con la divisione di esso pel penultimo $m(10^3a+10^2b+10c)^{m-1}$ determino nella sovraesposta maniera, e con le sovraesposte condizioni un numero d opportuno all'intento; e ciò fatto, con questo d, e con la serie

(XLIX) $1, m(10^3a+10^2b+10c), \frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c)^2$, ec.

$\frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c)^{m-2}$, $m(10^3a+10^2b+10c)^{n-1}$,

$10^m[10^{2m}G+10^m H+I-(10^2a+10b+c)^m]+K$

pratico la solita operazione del N.° 10.

La serie, che quindi risulterà nella ultima colonna verticale pel numero precedente sarà la seguente

(L) $1, m(10^3a+10^2b+10c+d), \frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c+d)^2$, ec.

$\frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c+d)^{m-2}$, $m(10^3a+10^2b+10c+d)^{m-1}$,

$10^{3m}G+10^{2m}H+10^m I+K-(10^3a+10c+d)^m$.

Ottenuta questa, seguiterò innanzi operando sempre nella maniera medesima; e se il numero (XLII) è una potenza *mesima* esatta, vedesi dall'andamento delle serie (XLIV), (XLVI), (XLVIII), (L), ec., che la *nesima* di esse avrà per ultimo termine il risultato

(LI) $10^{(n-1)m}G+10^{(n-2)m}H+10^{(n-3)m}I+10^{(n-4)m}K+10^{(n-5)m}L+\text{ec.}-(10^{n-1}a+10^{n-2}b+10^{n-3}c+10^{n-4}d+10^{n-5}e+\text{ec.})^m=0$,

e che però essendo $10^{n-1}a+10^{n-2}b+10^{n-3}c+10^{n-4}d+10^{n-5}e+$ec. la radice richiesta, l'operazione sarà terminata. Che se il numero (XLII) non è potenza *mesima* esatta, allora il risultato (LI) non sarà $=0$; e volendo proseguire l'operazione onde accostarsi al vero valore di $\sqrt[m]{P}$; nello stesso modo, come si sono precedentemente aggiunti i membri H, I, K, ec.

converrà per la determinazione di ciascuna cifra decimale aggiungere all'ultimo termine m zeri.

La semplice precedente esposizione del nostro metodo di estrarre le radici numeriche considerato in generale è sufficiente a dimostrarne la giustezza e la verità. Difatti i successivi numeri a, b, c, ec. componenti la radice richiesta vengono ivi infine a determinarsi nella maniera medesima, con cui essi si determinano col metodo di estrazione ordinario; e gli ultimi termini delle serie (XLIV), (XLVI), (XLVIII), (L), ec. altro evidentemente non sono, che i residui, i quali col metodo ordinario vanno successivamente ottenendosi. In conseguenza poi di ciò ciascuno dei numeri interi a, b, c, ec. dovrà essere non < 0, e < 10.

SEZIONE II.

Dimostrazione di Metodo di abbreviamento.

16. Per conoscere la ragione del metodo di abbreviamento, che è stato esposto ne' luoghi (IV), (IX), (XIV); si osservi, che le cifre ivi trascurate influiscono solamente nel valore delle cifre a destra del risultato, che preso esatto deve poscia sottraersi dal num.° 1188717 in (III), dal 1305906371 in (VIII), dall' 8000 in (XIII), e in generale dal $10^m(G-a^m)+H$ in (XLV); ma il numero, che si cerca ne' citati luoghi, e che in generale abbiam denominato b in (XLV), e che in (III) si è il 7, in (VIII) lo 8, ed in (XIII) il 2, deve uguagliare, od essere prossimamente minore del quoto $\frac{10^m(G-a^m)+H}{m\times 10^{m-1}a^{m-1}}$, ed essere tale, che sotto l'operazione del N.° 10 eseguita tra b, e la serie (XLV) somministri nella moltiplicazione per b del penultimo termine della prima riga orizzontale un prodotto non $> 10^m(G-a^m)+H$. Dunque per riconoscere, se si soddisfaccia a queste condizioni, bastando in generale la considerazione delle prime cifre a sinistra; ne segue, che per

l'indicata determinazione del numero b, si potranno in generale trascurare, come si è fatto ne' citati luoghi (III), (IX), (XIV) le cifre a destra, e più brevemente si otterrà così il numero b domandato.

Affine poi di riconoscere qual sia la ragione del metodo di abbreviamento del N.° 4, e quando esso abbia luogo, converrà eseguire le seguenti riflessioni.

17. Supposto in generale $10(10^h a + 10^{h-1} b + 10^{h-2} c + \text{ec.} + f)$ il polinomio, che elevato alle successive potenze 0^a, 1^a, 2^a, 3^a, ec. $m-1^a$, e moltiplicato rispettivamente pei coefficienti Newtoniani 1, m, $\frac{m(m-1)}{2}$, ec. m forma la *hesima* delle precedenti serie (XLV), (XLVII), (XLIX), ec.; il polinomio, che costituisce la successiva serie $h+1$ *esima* sarà $10(10^{h+1} a + 10^h b + 10^{h-1} c + \text{ec.} + 10f + g)$ (N.° 15), e chiamato quello per brevità $10A$, sarà questo $= 10(10A + g)$. Supposto inoltre, che L, M esprimano i coefficienti Newtoniani de' due termini successivi k *esimo*, $k+1$ *esimo* delle esposte serie; tali termini nella serie *hesima* saranno $10^{k-1} LA^{k-1}$, $10^k MA^k$, e nella serie $h+1$ *esima*, saranno $10^{k-1} L(10A+g)^{k-1}$, $10^k M(10A+g)^k$.

18. Ciò posto, si sottragga la precedente quantità $10^{k-1} LA^{k-1}$ dall'altra $10^k MA^k$. Per la natura de' coefficienti della formola Newtoniana essendo $M = \frac{m-k+1}{k} L$, ne verrà

$$10^k MA^k - 10^{k-1} LA^{k-1} = \frac{10^{k-1} LA^{k-1}}{k} [(m-k+1) 10A - k].$$

Ora essendo A un numero non < 1, è facile a vedersi, che qualunque valore si attribuisca ad m, ogni qualvolta si faccia k non $> \frac{m}{2}$, quando m è pari, e non $> \frac{m+1}{2}$ quando m è dispari, sempre risulta $(m-k+1) \times 10A - k > 0$. Dunque nelle nostre serie (XLV), (XLVII), ec. i termini cominciando dal primo fino inclusivamente al termine di mezzo, quando m è pari e ai due di mezzo, quando m è dispari, sempre anderanno successivamente crescendo di valore, qualunque sia m. Ma ogni qualvolta pongasi $k > \frac{m}{2}$, oppure $> \frac{m+1}{2}$, secondochè m è pari o dispari; potendo risultare $(m-k+1)\,10A-k<0$, e quindi la differenza de' termini corrispondenti essere negativa; ne segue, che oltrepassato il termine, o i due termini di mezzo, potrà benissimo accadere, che gli altri successivi vadano decrescendo di valore. Ora affine di determinare quando questo caso abbia luogo, pongo, che m, e k siano realmente tali, che risulti $(m-k+1)\,10A-k<0$; avremo da ciò $k>\frac{10(m+1)A}{10A+1}$, e però $k>m+1-\frac{m+1}{10A+1}$; ma considerando l'andamento dei termini delle nostre serie fino al penultimo, vedesi non poter essere $k>m-1$, e quindi dover essere $k<m$. Dunque in conseguenza di questi due rapporti $k>m+1-\frac{m+1}{10A+1}$, $k<m$, dovendo risultare $\frac{m+1}{10A+1}-1>1$, ne segue, che, affinchè abbia luogo l'indicato decremento di valori nei termini delle nostre serie, dovrà essere $m>20A+1$.

19. Col supporre nella espressione $A=(10^h a+10^{h-1}b+10^{h-2}c+\text{ec.})$ (N.° 17) $h=0$, $a=1$, $b=0$, $c=0$, ec., si riduca $A=1$, e si faccia $m=21+n$, essendo n un intero >0: i precedenti rapporti $k>m+1-\frac{m+1}{10A+1}$, $k<m$ divenendo perciò $k>20+n-\frac{n}{11}$, $k<21+n$, pongasi $k=21+n-p$; avendosi da ciò $21+n-p>20+n-\frac{n}{11}$, ne verrà $p<1+\frac{n}{11}$, e per conseguenza nella serie, ove $A=1$, ed $m=21+n$, saranno decrescenti quei termini, ne' quali in $k=21+n-p$ il numero p ha dei valori interi compresi tra i valori zero, ed $1+\frac{n}{11}$.

1.° Sia $n < 12$. In questa supposizione non potendo p acquistare, che il valore 1; ne segue, che ogniqualvolta il numero m esprimente il grado della radice da estraersi sia uno dei seguenti 22, 23, ec. 32, e sia frattanto $A = 1$, si avrà decremento solamente, mentre si passa dal termine $m - 2$ *esimo* allo $m - 1$ *esimo*, cioè dall'antepenultimo al penultimo.

2.° Pongasi $n > 11$, e però $= 11 + n'$: risultando da questa ipotesi $m = 32 + n'$, $k = 32 + n' - p$, $p < 2 + \frac{n'}{11}$ vedesi, che, mentre sia $n' < 12$, non potrà p acquistare, che i valori 1, 2, e per conseguenza nella solita ipotesi di $A = 1$, e nell'altra di m uguale ad uno dei numeri 33, 34, ec. 43, la diminuzione di valore accaderà soltanto nei successivi termini $m - 3$ *esimo*, $m - 2$ *esimo*, $m - 1$ *esimo*; ossia mentre dal termine precedente all'antepenultimo si passa all'antepenultimo, e da questo al penultimo.

3.° Abbiasi $n > 22$, ossia $n' > 11$. Fatto quindi $n' = 11 + n''$, poichè si ha $m = 43 + n''$, $k = 43 + n'' - p$, $p < 3 + \frac{n''}{11}$; e però nella ipotesi di $n'' < 12$, acquistandosi dalla p solamente i valori 1, 2, 3; ne segue, che, mentre $A = 1$, ed m uguaglia uno dei numeri 44, 45, ec. 54, il decremento di valore avrà luogo nei successivi termini $m - 4$ *esimo*, $m - 3$ *esimo*, $m - 2$ *esimo*, $m - 1$ *esimo*.

4.° Sia in generale $n = 11r + n^{(r)}$, ove r rappresenti un intero qualunque non < 0, ed $n^{(r)}$ un intero > 0, e < 12. Questa supposizione somministrando $m = 21 + 11r + n^{(r)}$, $k = 21 + 11r + n^{(r)} - p$, e $p < 1 + r + \frac{n^{(r)}}{11}$; ne segue, che p potrà in conseguenza di essa acquistare i valori 1, 2, 3, ec., $r + 1$, e però che, mentre sia $A = 1$, ed $m =$ ad uno dei numeri $21 + 11r + 1$, $21 + 11r + 2$, ec. $21 + 11r + 11$, il decremento di valore comincerà dal termine $m - (r + 2)$ *esimo*, e proseguirà successivamente fino allo $m - 1$ *esimo* inclusive.

20. Abbiamo di sopra osservato (N.° 18), che qualunque sia l'esponente m, i termini delle nostre serie vanno sempre crescendo fino inclusivamente al termine di mezzo, quando m è pari, e ai due di mezzo, quando m è dispari. Ora nelle ipotesi precedenti di $A=1$, e di $m=21+11r+n^{(r)}$, a quanti termini dopo quelli di mezzo potrà cominciare il decremento? cominci dopo x termini: avendosi quindi nel caso di m pari $\frac{m}{2}-x=r+2$ (4.° N.° prec.), e nel caso di m dispari $\frac{m-1}{2}-x=r+2$, sarà nel primo di questi casi $x=\frac{m-2r-4}{2}=\frac{17+9r+n^{(r)}}{2}$, e nel secondo $x=\frac{m-2r-5}{2}=\frac{16+9r+n^{(r)}}{2}$. Ora il più piccolo valore, che possa attribuirsi ad r, si è lo zero, e contemporaneamente all'ipotesi di $r=0$ il valore più piccolo, che possa darsi ad $n^{(r)}$, si è 1, oppure 2, secondochè m è pari, o dispari (1.°, 4.°, N.° 19). Dunque risultando in amendue questi casi $x=9$, ed essendo i termini delle due espressioni $\frac{17+9r+n^{(r)}}{2}$, $\frac{16+9r+n^{(r)}}{2}$ tutti positivi; ne segue, che quando $A=1$ la diminuzione di valore nelle nostre serie (XLV), (XLVII), ec. non potrà giammai accadere, che a 9 termini per lo meno al di là di quelli di mezzo; e quanto più grande sarà il valore, che si attribuisce tanto ad r, come ad $n^{(r)}$, tanto più si allontanerà dal mezzo il termine, da cui comincia l'indicato decremento.

21. Sottraggasi dal termine $10^k M(10A+g)^k$ l'altro $10^{k-1}L(10A+g)^{k-1}$ (N.° 17); avremo da ciò $10^k M(10A+g)^k - 10^{k-1}L(10A+g)^{k-1} = \frac{10^{k-1}L(10A+g)^{k-1}}{k}[(m-k+1)10(10A+g)-k]$. Ma essendo g non <0, si ha questa quantità $\frac{10^{k-1}L(10A+g)^{k-1}}{k}[(m-k+1)10(10A+g)-k]$ molto maggiore dell'altra

$\frac{10^{k-1}LA^{k-1}}{k}[(m-k+1)10A-k)$ (N.° 18). Dunque il termine $10^kM(10A+g)^k$ supererà di valore il suo precedente $10^{k-1}L(10A+g)^{k-1}$, più di quello, che il termine 10^kMA^k superi il precedente $10^{k-1}LA^{k-1}$; e per conseguenza i termini ulteriori supereranno in valore i precedenti, più nella serie (XLVII), che nella (XLV), più nella (XLIX) che nella (XLVII), e così di seguito.

22. Da quanto si è detto nei precedenti (N. 17, ec. 21) apparisce, che, siccome 1 è il valor minimo, che possa attribuirsi ad A (N.° 19), quindi risulta, che

1.° Finatantochè il grado della radice da estraersi non supera il ventunesimo, i termini delle nostre serie (XLV) (XLVII), ec. dal primo fino inclusivamente al penultimo non potranno essere giammai decrescenti, anzi cresceranno sempre di valore, rimanendo soltanto l'antepenultimo uguale al penultimo, quando $m=21$, ed $A=1$ (N.° 19).

2.° Qualunque sia il grado della radice; il decremento di valore ne' termini della serie, mentre esista, non potrà mai cominciare, che dal nono al di là del termine, o dei due termini di mezzo (N.° 20), e da questo fino al penultimo inclusivamente proseguirà sempre (N.° 19).

3.° Se l'indicato decremento di valore manchi nelle prime delle nostre serie (XLV), (XLVII), ec., molto più pel (N.° 21) dovrà mancare nelle ulteriori: anzi, anche, allorquando in quelle esista, dovrà pel citato (N.° 21), progredendosi innanzi, scomparire in queste; onde avanzandosi il calcolo, quanto conviene, sempre giungeremo a delle serie crescenti in tutta la loro estensione, cioè dal primo fino inclusivamente al penultimo termine.

4.° Qualunque sia l'esponente m, supponghiamo di essere giunti a delle serie, le quali siano crescenti per tutta la loro estensione (precedente 3.°), e ritenuto, che $10A=10(10^ha+10^{h-1}b+10^{h-2}c+\text{ec.}+f)$ (N.° 17) sia il polinomio, che forma una di esse, supponghiamo, che in questa il numero delle cifre, che formano il penultimo termine $10^{m-1}\,mA^{m-1}$ superi di un numero l il numero delle cifre componenti il termine antepenultimo $10^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}A^{m-2}$. In questa supposizione un termine qualunque della nostra serie anteriore all' antepenultimo, in generale il termine $10^{k}MA^{k}$, in cui sia $k<m-1$, sarà tale, che il numero delle sue cifre supererà il numero delle cifre del precedente $10^{k-1}LA^{k-1}$ per lo meno di $l-1$. Difatti avendosi $10^{m-1}mA^{m-1} = 10^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}A^{m-2}\times\frac{2}{m-1}10A$, l'aumento delle cifre, che accade nel passare dal termine $10^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}A^{m-2}$ al termine $10^{m-1}mA^{m-1}$, dovrà dipendere dal moltiplicar quello per $\frac{2}{m-1}10A$, e per conseguenza sarà questo $\frac{2}{m-1}10A$ un numero intero o fratto non $<10^{l-1}$; ma a cagione di $k<m-1$ si ha $\frac{m-k+1}{k}10A>\frac{2}{m-1}10A$: dunque essendo ancora $\frac{m-k+1}{k}10A>10^{l-1}$, ed essendo $10^{k}MA^{k}=10^{k-1}LA^{k-1}\times\frac{m-k+1}{k}10A$; esso termine $10^{k}MA^{k}$ dovrà contenere sopra l'altro $10^{k-1}LA^{k-1}$ un numero di cifre certamente non $<l-1$. Dunque ec. Ciò difatti evidentemente apparisce negli esempj de' (num. 1, 2, 3).

5.° Moltiplicato il termine $10^{k-1}LA^{k-1}$ per un numero intero minore del 10, e positivo, che dirò q, si sommi il prodotto $10^{k-1}LA^{k-1}q$ col termine susseguente $10^{k}MA^{k}$. Siano di numero $i^{(k-1)}$ le cifre esistenti in $10^{k-1}LA^{k-1}$, di numero $i^{(k)}$ le contenute in $10^{k}MA^{k}$, si ritenga la supposizione del (prec. 4.°) onde si abbia $i^{(k)}$ non $<i^{(k-1)}+l-1$, e sia $l>2$, onde $i^{(k-1)}+l-1>i^{(k-1)}+1$, ed $i^{(k)}$ non $<i^{(k-1)}+2$. In queste supposizioni, poichè le cifre esistenti in $10^{k-1}LA^{k-1}q$ sono tutt' al più di numero $i^{k-1}+1$, ne segue, che, mentre in $10^{k}MA^{k}$ la cifra $i^{(k)}-(i^{k-1}+1)$*esima* sia diversa dal 9, le prime $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+2)$ cifre della somma $10^{k-1}LA^{k-1}q$

$+10^kMA^k$ saranno perfettamente le stesse, che le prime $i^k-(i^{(k-1)}+2)$ del termine 10^kMA^k.

Sia ora 9 la cifra $i^k-(i^{(k-1)}+1)$*esima* del termine 10^kMA^k diversa dal 9 la $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+2)$*esima*, e siano di numero $i^{(k-1)}+1$ le cifre in $10^{k-1}LA^{k-1}q$. Nell'eseguire l'indicata somma, potendo risultare un'unità da portarsi ad unire alla cifra $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+1)$*esima*; essa nel caso diverrebbe 10. Dunque, ciò accadendo, il luogo $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+1)$*esimo* della somma $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^kMA^k$ verrà occupato dallo zero, si accrescerà di 1 la cifra $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+2)$*esima* e rimarranno le medesime, che quelle del termine 10^kMA^k, le prime $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+3)$ cifre. Che se sia 9 anche questa $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+2)$ *esima* cifra, verrà ancora il luogo $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+2)$*esimo* occupato dallo zero, e si aumenterà di 1 la cifra $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+3)$ *esima*, restando le stesse, che quelle del termine 10^kMA^k, le prime $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+4)$, e così di seguito. Pertanto se le prime $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+1)$*esime* cifre del termine 10^kMA^k siano tanti 9; esse nella somma $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^kMA^k$ potranno diventare tanti zeri, e ciò succedendo, la prima cifra di essa somma sarà allora 1. In quest'ultimo caso il numero totale delle cifre in $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^kMA^k$ sarà $i^{(k)}+1$, in tutti gli altri sarà $i^{(k)}$.

6.° Si moltiplichi la precedente somma $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^kMA^k$ di nuovo per q, e il risultato si sommi col susseguente termine $10^{k+1}NA^{k+1}$, il numero delle cui cifre supporrò essere espresso dalla lettera $i^{(k+1)}$. Poichè il numero delle cifre in $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^kMA^k$ uguaglia $i^{(k)}$, oppure $i^{(k)}+1$, essendo in questo secondo caso 1 la prima sua cifra, zero la seconda (prec. 5.°); il numero delle cifre nel prodotto $10^{k-1}LA^{k-1}q^2+10^kMA^kq$ non potrà oltrepassare il numero $i^{(k)}+1$: ma pel (prec. 4.°) si ha $i^{(k+1)}$ non $<i^{(k)}+l-1$, e per l'ipotesi $l>2$ (prec. 5.°), onde $i^{(k+1)}$ non $<i^{(k)}+2$. Dunque ancora nella somma $10^{k-1}LA^{k-1}q^2+10^kMA^kq+10^{k+1}\times NA^{k+1}$ avendo luogo il discorso del (prec. 5.°) diremo, che eziandio in essa se la cifra $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+1)$*esima* del termi-

ne $10^{k+1}\mathrm{NA}^{k+1}$ sia diversa dal 9, le prime sue $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+2)$ cifre saranno affatto le medesime, che le prime $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+2)$ del termine $10^{k+1}\mathrm{NA}^{k+1}$; se la $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+1)$ *esima* cifra di questo termine sia 9, essa nell'esposta somma potrà divenire zero, aumentandosi allora di 1 la cifra $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+2)$ *esima*, e rimanendo le medesime le altre $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+3)$; e così in progresso; e se le prime $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+1)$ cifre di $10^{k+1}\mathrm{NA}^{k+1}$ siano tanti 9, potranno nella somma trovata diventare tanti zeri preceduti tutti dalla cifra 1. Le cifre tutte dell'indicata somma in quest'ultimo caso saranno, come sopra, di numero $i^{(k+1)}+1$, in tutti gli altri casi di numero $i^{(k+1)}$.

7.° Chiamato $i^{(k+2)}$ il numero delle cifre esistenti nel termine $10^{k+2}\mathrm{PA}^{k+2}$ susseguente all'altro $10^{k+1}\mathrm{NA}^{k+1}$, con discorso affatto simile a quello de' (prec. 5.°, 6.°) troveremo anche nella somma $10^{k-1}\mathrm{LA}^{k-1}q^3+10^k\mathrm{MA}^kq^2+10^{k+1}\mathrm{NA}^{k+1}q+10^{k+2}\mathrm{PA}^{k+2}$ le prime $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+2)$ sono le stesse, che le prime $i^{(k+2)}-(i^{(k-1)}+2)$ di $10^{k+2}\mathrm{PA}^{k+2}$, quando la cifra $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+1)$ *esima* di questo ultimo termine sia diversa dal 9; che ne sono le stesse le prime $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+3)$, quando sia diversa dal 9 la cifra $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+2)$ *esima*, e sia 9 la $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+1)$ *esima*, potendo questa in tal caso diventare zero, e aumentarsi quindi di 1 la cifra $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+2)$ *esima*, e così di seguito; che esse $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+1)$ cifre possono diventare tanti zeri preceduti da 1, quando le corrispondenti in $10^{k+2}\mathrm{PA}^{k+2}$ sono tanti 9; e che finalmente il numero delle cifre nell'esposta somma ne' primi de' casi ora accennati è $i^{(k+2)}$, nell'ultimo $i^{(k+2)}+1$.

Così in progresso.

8.° Rappresenti il numero g giusta il (N.° 17) la cifra, che nel valore di $\sqrt[m]{\mathrm{P}}$ succede all'ottenuta f; ed eseguita con esso g, e la precedente serie

(LII) $1,\ 10m\mathrm{A},\ 10^2\frac{m(m-1)}{2}\mathrm{A}^2$, ec., $10^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}\mathrm{A}^{m-2}$, $10^{m-1}m\mathrm{A}^{m-1}$, U, ove denomino U l'ultimo termine, l'operazione de' numeri 10, 15, si denominino

(LIII) $1, B, C$, ec. R, S, T, V

i termini, che quindi son risultati nella seconda riga; si dicano

(LIV) $1, B', C'$, ec. R', S', T'

i termini risultati nella riga terza; appellinsi

(LV) $1, B'', C''$, ec. R'', S''

i risultati nella riga quarta;

(LVI) $1, B''', C'''$, ec. R'''

i risultati nella quinta; e così di seguito.

Ciò fatto, pongasi nelle quantità de' (prec. 5.°, 6.°, 7.°) successivamente $k = 1, 2, 3$, ec. $m - 2, m - 1$, si faccia $q = g$, e in luogo de' coefficienti L, M, N, ec. pongansi i rispettivi coefficienti della serie (LII). In conseguenza di ciò $i = 1, i', i''$, ec. $i^{(m-2)}, i^{(m-1)}$ esprimeranno i numeri delle cifre, che corrispondentemente esistono nei termini 1.°, 2.°, 3.°, ec. $(m - 1)$ *esimo*, *mesimo* di essa serie, e pei citati (prec. 5.°, 6.°, 7.°) i' sarà il numero delle cifre contenute nel termine B della serie (LIII); i'', oppure $i'' + 1$ sarà il numero delle cifre esistenti in C; i''', oppure $i''' + 1$ il numero delle esistenti in D, e così in progresso; onde il numero delle cifre contenute in T sarà $i^{(m-1)}$, oppure $i^{(m-1)} + 1$; avvertendo riguardo a questo termine T, (e lo stesso dicendosi rapporto agli altri B, C, D, ec.) che quando $i^{(m-1)} + 1$ è il numero delle sue cifre, la sua cifra prima è l'unità, e le $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)$ successive sono tanti zeri corrispondentemente ad altrettanti 9 costituenti le prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)$ cifre del termine $10^{m-1} m A^{m-1}$. Quando poi le cifre in T sono di numero $i^{(m-1)}$: allora se la cifra $[i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)]$ *esima* di $10^{m-1} m A^{m-1}$ sia diversa dal 9, le prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 2)$ cifre di T saranno perfettamente le stesse, che le prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 2)$ di $10^{m-1} m A^{m-1}$: se in questo termine sia 9 la cifra $[i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)]$ *esima*, e ne sia diversa la $[i^{(m-1)} (i^{(m-2)} + 2)]$ *esima*; allora potrà in T il luogo $[i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)]$ *esimo* venire occupato dallo zero, e le sue prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+3)$ cifre saranno le medesime, che le prime $i^{(m-1)}(i^{(m-2)}+3)$ di $10^{m-1}mA^{m-1}$; e così di seguito. Avvertasi in questo luogo, che a cagione di $i^{(m-1)}=i^{(m-2)}+l$ (prec. 4.°) avremo $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1) = l-1$, $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2) = l-2$, $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+3) = l-3$, ec.

Rapporto alle quantità (LIV) si osservi, che siccome 1 è la prima di esse, e di più abbiamo $B'=g+B$, $C'=B'g+C$, $D'=C'g+D$, ec. $T'=S'g+T$, e finalmente si ha la differenza $l>2$ (prec. 5.°); con discorsi simili a quelli de' (prec. 5.°, 6.°, ec.) troveremo, che le cifre esistenti in B' sono di numero i', ovvero $i'+1$, le esistenti in C' sono di numero i'', ovvero $i''+i$, ec. e finalmente le esistenti in T sono di numero $i^{(m-1)}$, oppure $i^{(m-1)}+1$; osservando ancora quivi, che quando in T le cifre sono di numero $i^{(m-1)}+1$, la prima di esse è sempre 1, e le successive $i^{(m-1}-(i^{(m-2)}+1)$ sono tanti zeri corrispondenti ad altrettanti 9 costituenti le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ cifre del termine T; quando poi in T la cifra $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ sia diversa dal 9; allora le cifre in T sono di numero $i^{(m-1)}$, e le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2)$ cifre sono le medesime tanto in T', come in T. Se l'indicata cifra $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ *esima* sia 9, e non sia 9 la $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2)$ *esima*; allora in T le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+3)$ di T, ed $i^{(m-1)}$ ne sarà il numero totale. Così in progresso; dicendosi evidentemente lo stesso in corrispondenza sulle altre quantità B', C', D', ec.

Con maniera simile alla precedente vedremo, che riguardo alle quantità (LV) le cifre esistenti in S'' sono di numero $i^{(m-2)}$, oppure $i^{(m-2)}+1$, riguardo alle (LVI) le esistenti in R''' sono di numero $i^{(m-3)}$, ovvero $i^{(m-3)}+1$, e così di seguito; osservando qui ancora, che quando le cifre sono in numero $i^{(m-2)}+1$, $i^{(m-3)}+1$, ec., la prima di loro rispettivamente in S'', R''', ec. è l'unità, e le successive $i^{(m-2)}-(i^{(m-3)}+1)$, $i^{(m-3)}-(i^{(m-4)}+1)$, ec. sono tanti zeri.

9.° Pel (N.° 15) avendosi $U-gT>0$, $U(g+1)T<0$;

questo numero g esprimerà la parte intera del quoto $\frac{U}{T}$. Inoltre pel citato (N.° 15) nelle serie del (prec. 8.°) abbiamo $V=U-gT=U-(10A+g)^m+10^mA^m$, $T'=m(10A+g)^{m-1}$, $S''=\frac{m(m-1)}{2}(10A+g)^{m-2}$ ec. Dunque supposto, che le cifre g, ec., le quali nella ricerca del valore $\sqrt[m]{P}$ si determinano attualmente, siano decimali; quella tra le serie (XLV), (XLVII), (XLIX), ec. (N.° 15), che risulta nel presente caso sarà

(LVII) $1, 10B^{(m-1)}, 10^2C^{(m-2)}, 10^3D^{(m-3)}$, ec. $10^{m-3}R'''$, $10^{m-2}S''$, $10^{m-1}T'$, 10^mV.

Si chiami g_1 la cifra da aggiungersi alla porzione di radice già determinata 10^2A+10g, si eseguisca con questa g_1 e la serie (LVII) la solita operazione de' numeri 10, 15, e siano

$$\text{(LVIII)}\quad\begin{array}{rr} 1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \text{ec.} & R_1,\ S_1,\ T_1,\ V_1, \\ 1,\ B'_1,\ C'_1,\ \text{ec.} & R'_1,\ S'_1,\ T'_1, \\ 1,\ B''_1,\ \text{ec.} & R''_1,\ S''_1, \\ 1,\ \text{ec.} & R'''_1, \\ \text{ec.} & \end{array}$$

i risultati, che si ottengono nelle successive righe 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª, ec. Ciò fatto, sarà g_1 la parte intera del quoto $\frac{10^mV}{T_1}$; sarà $V_1=10^mV-g_1T_1=10^mV-(10^2A+10g+g_1)^m+10^m(10A+g)^m$ (N.° 15), $T'_1=m(10^2A+10g+g_1)^{m-1}$, $S''_1=\frac{m(m-1)}{2}(10^2A+10g+g_1)^{m-2}$, ec., e la serie tra le (XLV), (XLVII), (XLIX), ec., che corrisponde a questo caso, sarà

(LIX) $1, 10B_1^{(m-1)}, 10^2C_1^{(m-2)}, 10^3D_1^{(m-3)}$, ec. $10^{m-3}R'''_1$, $10^{m-2}S''_1$, $10^{m-1}T'_1$, 10^mV_1.

10.° Presi due termini successivi della serie (LVII), eccettuatone l'ultimo 10^mV, per esempio i due $10^{m-2}S''$, $10^{m-1}T'$ siano le cifre in S'' di numero $i^{(m-2)}$, ed in T' di numero $i^{(m-1)}$ (prec. 8.°): in questa ipotesi i numeri delle cifre nel-

le

le quantità $10^{m-2}S''$, $10^{m-1}T^{\mathrm{I}}$, risulteranno rispettivamente $i^{(m-2)}+m-2$, $i^{(m-1)}+m-1$; ma sottraendo si ottiene $i^{(m-1)}-i^{(m-2)}+1$, e lo stesso si dice di altri due qualisivogliono degli accennati termini. Dunque nella supposizione ora fatta uno qualunque de' supposti termini della serie (LVII) toltone l'ultimo $10^{m}V$, contiene sopra del termine prossimo a sinistra una cifra di più di quelle, che il termine corrispondente della serie (LII) contiene sopra del suo termine prossimo a sinistra. La medesima conseguenza ha luogo ancora, mentre le cifre siano in S'' di numero $i^{(m-2)}+1$, ed in T^{I} di numero $i^{(m-1)}+1$ (prec. 8.°): ma se quelle sono di numero $i^{(m-2)}+1$, e queste di numero $i^{(m-1)}$; allora tante cifre conterrà $10^{m-1}T^{\mathrm{I}}$ sopra $10^{m-2}S''$, quante $m\times10^{m-1}A^{m-1}$ ne contiene sopra $\frac{m(m-1)}{2}\times10^{m-2}A^{m-2}$; ma in questo caso sarà 1 la prima cifra a sinistra di $10^{m-2}S''$, e le successive $i^{(m-2)}-(i^{(m-3)}+1)$ saranno tanti zeri (prec. 8.°).

11.° Poichè g_1 è un numero intero di una sola cifra, e poichè si ha $B_1=g_1+10B^{(m-1)}$, $C_1=B_1g_1+1^2C^{(m-2)}$, ec. $T_1=S_1g_1+10^{m-1}T_1$; con discorsi affatto simili a quelli de' (prec. 5.°, 6.°, ec.) truoveremo, che il numero delle cifre in T_1 deve essere $i^{(m-1)}+m-1$, oppure $i^{(m-1)}+m$, potendo il secondo di questi casi accadere solamente quando le prime $(i^{(m-1)}+m-1)-(i^{(m-2)}+m-1)=i^{(m-1)}-i^{(m-2)}$ cifre di $10^{m-1}T'$ a sinistra sono tanti 9; e divenendo allora essi 9 tanti zeri, a'quali precede l'unità. Quando poi le cifre di T_1 risultano di numero $i^{(m-1)}+m-1$: allora se la cifra $[(i^{(m-1)}+m-1)-(i^{(m-2)}+m-1)]$ *esima* $=(i^{(m-1)}-i^{(m-2)})$ *esima* di $10^{m-1}T'$, e però di T^{I} è diversa dal 9, le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ cifre di T_1 saranno le stesse, che le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ di T^{I}; se sia 9 la $(i^{(m-1)}-i^{(m-2)})$ *esima* cifra di T^{I}, e ne sia diversa la $[i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)]$ *esima*, allora la $(i^{(m-1)}-i^{(m-2)})$ *esima* cifra in T_1 sarà zero, e le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2)$ le stesse, che le prime $i^{(m-1)}-(i^{m-2}+2)$ di T^{I}, e così di seguito.

Avendosi poi $B'_1 = g_1 + B_1$, $C'_1 = B'_1 g_1 + C_1$, ec., $T'_1 = S'_1 g_1 + T_1$; come precedentemente si troverà, che anche le cifre esistenti in T'_1 sono di numero $i^{(m-1)} + m - 1$, ovvero $i^{(m-1)} + m$; avendosi qui pure nel primo di questi casi le prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)$ cifre, oppure le prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 2)$, ec. di T'_1 uguali in corrispondenza alle prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)$, od alle prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 2)$, ec. di T_1 secondochè in T_1 è diversa dal 9 la cifra $(i^{(m-1)} - i^{(m-2)})$ *esima*, od essendo questa $= 9$, ne sia poi diversa la cifra $[i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)]$ *esima*, ec.: nel caso secondo poi la prima cifra a sinistra di T'_1 sarà 1, e le susseguenti $i^{(m-1)} - i^{(m-2)}$ saranno tanti zeri corrispondenti ad altrettanti 9 esistenti tutti insieme alla sinistra di T_1.

12.° Come dalla considerazione della serie (LII), e delle quantità (LIII), ec. (LVI) siamo passati alla considerazione della serie (LVII), e delle quantità (LVIII) (prec. 8.°, 9.°, ec.), così potremo da queste passare alla considerazione della serie (LIX), e delle quantità, che ne provengono, le quali chiamata g_2 la cifra da unirsi nell'estrazione della radice al risultato già ottenuto $10^3A + 10^2g + 10g$, supporremo esprimersi per

$$\begin{array}{rrrlrrrr}
1, & B_2, & C_2, & \text{ec.} & R_2, & S_2, & T_2, & V_2 \\
 & 1, & B'_2, & \text{ec.} & & R'_2, & S'_2, & T'_2 \\
 & & 1, & \text{ec.} & & & R''_2, & S''_2 \\
 & & & \text{ec.,} & & & &
\end{array}$$

ed avremo $V_2 = 10^m V_1 - g_2 T_2 = 10^m V_1 - (10^3A + 10^2g + 10g_1 + g_2)^m + 10^m (10^2A + 10g + g_1)^m$, $T'_2 = m(10^3A + 10^2g + 10g_1 + g_2)^{m-1}$, ec.; e come nei (prec. 10.° 11.°) si troverà, che quando il numero delle cifre in S''_1 ed in T_1 sono rispettivamente $i^{(m-2)} + m - 2$, $i^{(m-1)} + m - 1$, oppure $i^{(m-2)} + m - 1$, $i^{(m-1)} + m$; allora risultando i numeri delle cifre nelle quantità $10^{m-2}S''_1$, $10^{m-1}T'_1$ rispettivamente $i^{(m-2)} + 2m - 4$, $i^{(m-1)} + 2m - 2$, ovvero $i^{(m-2)} + 2m - 3$, $i^{(m-1)} + 2m - 1$; il termine $10^{m-1}T'_1$ conterrà sopra l'altro $10^{m-2}S''_1$ un numero $i^{(m-1)} - i^{(m-2)} + 2$ di cifre, e però una cifra di più di quelle, che il termine

$10^{m-1}T^1$ nella serie (LIX) contiene sopra $10^{m-2}S''$, e due cifre più di quelle, che il termine $10^{m-1}mA^{m-1}$ nella serie (LII) contiene in corrispondenza sopra $10^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}A^{m-2}$. Allorchè poi il numero delle cifre in S''_1 sia $i^{(m-2)}+m-1$, ed $i^{(m-1)}+m-1$ sia questo numero in T_1; tante saranno le cifre di $10^{m-1}T'_1$ sopra di $10^{m-2}S''_1$, quante sono le cifre di $10^{m-1}T'$ sopra di $10^{m-2}S''$; ma la prima cifra a sinistra di $10^{m-2}S''_1$ sarà 1, e le successive $i^{(m-2)}-(i^{(m-3)}+1)$ tanti zeri.

Come nei (prec. 8.°, ec. 11.°) vedremo, che ancora nelle quantità T_2, T'_2 il numero delle cifre è $i^{(m-1)}+2m-2$, oppure $i^{(m-1)}+2m-1$, avendosi nel secondo di questi casi la prima cifra a sinistra $=1$, e le successive $i^{(m-1)}-i^{(m-2)}+1$ tanti zeri corrispondenti ad altrettanti 9 esistenti, riguardo al termine T_2, sul principio del termine $10^{m-1}T'_1$, e rapporto al termine T'_2 sul principio di T_2. Nel caso primo poi quando la cifra $(i^{(m-1)}-i^{(m-2)}+1)$*esima* di $10^{m-1}T'_1$, oppure di T_2 sia diversa dal 9; allora le prime $i^{(m-1)}-i^{(m-2)}$ cifre rispettivamente di T_2, ovvero T'_2, saranno le stesse, che le prime $i^{(m-1)}-i^{(m-2)}$ di T'_1 o di T'_2. Se sia 9 questa $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$*esima* cifra; negli indicati termini saranno le medesime le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ cifre; così in progresso.

13.° Lo stesso dicesi evidentemente di tutte le ulteriori serie, che nel proseguir l'estrazione della radice ottengonsi successivamente; avvertendo, che, quanto più si progredisce, tanto più aumenta nel modo indicato nel (prec. 12.°) la differenza tra il numero delle cifre in un dato termine, e il numero delle cifre nel termine successivo.

23. Ritenute le supposizioni tutte dei (4.°, ec., 13.°, N.° 22), e posto per semplicità di scrivere i invece di $i^{(m-1)}$, abbiasi

(LX) $10^{m-1}mA^{m-1}=10^{i-1}\alpha+10^{i-2}\beta+\text{ec.}+10^{i-(l-3)}\varepsilon+10^{i-(l-2)}\zeta+10^{i(l-1)}\eta+10^{i-l}\iota+\text{ec.}$, e sia la cifra η diversa dal 9, onde risulti T (8.° N.° 22) avente i cifre, e le sue prime $l-2$ uguali alle supposte α, β, ec. ε, ζ, e però avente la forma

(LXI) $T = 10^{i-1}\alpha + 10^{i-2}\beta + \text{ec.} + 10^{i-(l-3)}\varepsilon + 10^{i-(l-2)}\zeta + 10^{i-(l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.}$

Poichè g è un intero di una sola cifra esprimente la parte intera del quoto $\frac{U}{T}$ (8.°, 9.°, N.° 22); la quantità U non potrà contenere più di $i+1$ cifre, e porrò quindi in generale

(LXII) $U = 10^{i}\lambda + 10^{i-1}\mu + 10^{i-2}\nu + \text{ec.} + 10^{i-(l-3)}\rho + 10^{i-(l-2)}\sigma + 10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\xi + \text{ec.}$

Ciò fatto vogliasi dividere attualmente U per T, e supponghiamo, che q esprima il massimo numero delle volte esatte, che α contienesi in $10\lambda + \mu$, ed insieme β contienesi nel corrispondente numero ν accresciuto dell' avanzo rimasto dalla divisione di $10\lambda + \mu$ per α, e così di seguito fino alla divisione del numero σ, aumentato dall' avanzo precedente, per ζ; e supponghiamo, che da quest' ultima divisione si abbia un residuo non $< q$. In questa ipotesi tutte le cifre ulteriori η', ι', ec. della T contenendosi nelle rispettive τ, ξ, ec. della U aumentate dei rispettivi avanzi più delle citata q volte, è chiaro, che q esprimerà la parte intera del quoto $\frac{U}{T}$; e per conseguenza, essendo $q = g$ (9.° N.° 22) si otterrà nella supposizione presente questo numero g tanto dalla divisione dell' intero numero U per l' intero T, come dalla divisione della prima parte

(LXIII) $10^{l-2}\lambda + 10^{l-3}\mu + 10^{l-4}\nu + \text{ec.} + 10\rho + \sigma$

della quantità U per la prima

(LXIV) $10^{l-3}\alpha + 10^{l-4}\beta + \text{ec.} + 10\varepsilon + \zeta$

della T. Dunque potremo, trascurate tanto in questa, come in quella quantità le ultime parti

(LXV) $10^{i-(l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.}$, $10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\zeta + \text{ec.}$,

ricavare il numero g da aggiungersi nel chiesto valore $\sqrt[m]{P}$

(N.° 15) alla prima parte 10A (N.° 17) con la divisione delle sole prime esposte parti (LXIV), (LXIII).

24. Chiamiamo s, t queste quantità (LXIV), (LXIII), ed u, v le altre (LXV), cosicchè si abbia
$U = 10^{i(l-2)}t + v$, $T = 10^{i-(l-2)}s + u$; ne verrà
$V = U - gT$ (9.° N.° 22) $= 10^{i-(l-2)}(t - gs) + (v - gu)$;
ma contenendosi in s un numero $l - 2$ di cifre, per la natura della divisione, non può nel residuo $t - gs$ contenersene un numero maggiore: sarà dunque questo residuo $t - gs$ della forma
(LXVI) $10^{l-3}\mu' + 10^{l-4}\nu'$ ec. $+ 10\rho' + \sigma'$,
e nel caso di gu non $> v$ avendosi $v - gu$ della forma $10^{i-(l-1)}\tau' + 10^{i-l}\xi' +$ ec., sarà
(LXVII) $V = 10^{i-1}\mu' + 10^{i-2}\nu' +$ ec. $+ 10^{i-(l-3)}\rho' + 10^{i-(l-2)}\sigma' + 10^{i-(l-1)}\tau' + 10^{i-l}\xi' +$ ec.
Che se si abbia $gu > v$; allora, nell' unirsi della quantità $v - gu = -(gu - v)$ coll' altra $10^{i-(l-2)}(t - gs)$, onde ottenere il valore di V, rimarrà nel risultato (LXVII) cangiata per lo meno la cifra σ'. Siccome poi si ha $V = 10^{i-(l-2)}(t - gs) - (gu - v)$, e dalle (LXV) apparisce essere sempre $gu - v < 10^{i-(l-3)}$, ne segue, che sarà $V > 10^{i-(l-2)}(t - gs) - 10^{i-(l-3)}$.

25. Nel proseguire avanti l'operazione si osservi tosto, che la cifra g_1 (9.° N.° 22) da aggiugnersi all'ottenuta quantità $10^2A + 10g$ deve essere la parte intera del quoto $\frac{10^m V}{T}$ (LVII), (LVIII) (9.° N.° 22). Ora suppongasi, che nella quantità T=(LXI) la cifra ($l - 1$) *esima*, oppure la ($l - 2$) *esima*, cioè la η', ovvero la ζ sia diversa dal 9; in conseguenza di ciò le prime $l - 3$ cifre della T' (LIV) (8.° N.° 22) saranno le medesime, che le prime $l - 3$ della T, e potrà quindi porsi
$T' = 10^{i-1}\alpha + 10^{i-2}\beta +$ ec. $+ 10^{i-(l-3)}\varepsilon + 10^{i-(l-2)}\zeta'' + 10^{i-(l-1)}\eta'' + 10^{i-l}\iota'' +$ ec.,
e però avremo
$10^{m-1}T' = 10^{i+m-2}\alpha + 10^{i+m-3}\beta +$ ec. $10^{i+m-(l-2)}\varepsilon + 10^{i+m-(l-1)}\zeta'' + 10^{i+m-l}\eta'' + 10^{i+m-(l+1)}\iota'' +$ ec.

Suppongasi inoltre, che in questo valore di $10^{m-1}T''$ la cifra *lesima*, o la $(l-1)$*esima*, o la $(l-2)$*esima*, cioè ι'', ovvero η'', oppure ζ'' sia diversa dal 9: per questa supposizione le prime $l-3$ cifre della T_1 (LVIII) per lo (11.° N.° 22) risulteranno le stesse, che le prime $l-3$ della T', e però che le prime $l-3$ della T, e quindi porremo

$$(\text{LXVIII})\quad T' = 10^{i+m-2}\alpha + 10^{i+m-3}\beta + \text{ec.} + 10^{i+m-(l-2)}\varepsilon + 10^{i+m-(l-1)}\zeta''' + 10^{i+m-l}\eta''' + 10^{i+m-(l+1)}\iota''' + \text{ec.}$$

Finalmente si supponga gu non $>v$ (N.° prec.), onde la (LXVII) esprima il valore di V e si ponga la quantità (LXVI) $=t'$, la parte $10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\xi^1 + \text{ec.}$ della (LXVII) moltiplicata per 10^m si ponga $=v'$, si faccia nella (LXIV) $10^{l-4}\alpha + 10^{l-5}\beta + \text{ec.} + \varepsilon = \frac{s-\zeta}{10} = s'$, e nella (LXVIII) facciasi $10^{i+m-(l-1)}\zeta''' + 10^{i+m-l}\eta''' + 10^{i+m-(l+1)}\iota''' + \text{ec.} = u'$. Risulterà da tutto ciò

$$(\text{LXIX})\quad \left\{ \begin{array}{l} 10^m V = 10^{i+m-(l-2)}t' + v', \\ T_1 = 10^{i+m-(l-2)}s' + u'. \end{array} \right.$$

Esprimasi con la lettera q_1 la parte intera del quoto $\frac{t'}{s'}$, e l'avanzo, che in ultimo risulta dall'attual divisione di t' per s', sia non $<q_1$. In conseguenza di queste supposizioni per una ragione affatto simile all'addotta nel (N.° 23), vedesi, che lo stesso numero q_1 costituirà ancora la parte intera del quoziente $\frac{10^m V}{T_1}$; e quindi, avendosi $q_1 = g_1$, (9.° N.° 22), la cifra g_1, che nel valore di $\sqrt[m']{P}$ si deve aggiungere alla quantità già ottenuta $10^2A + 10g$, si ricaverà tanto col dividere $10^m V$ per T_1, come col dividere t' per s'; ma t' non è, che il residuo $t - gs$ della precedente divisione di t per s, ed s' non è che la quantità s, da cui si è tagliata l'ultima cifra ζ. Dunque mentre abbiano luogo le esposte condizioni, otterremo le successive cifre g, g_1 della radice, che si cerca, 1.° col trascurare nelle quantità U, T le ultime parti (LXV) (N.° 23), e dividere la prima parte $t=$(LXIII)

per la prima $s=$(LXIV); 2.° col dividere il residuo $t-gs=t'$ della division precedente per la quantità s' risultante dal tagliare l'ultima cifra ζ dalla quantità s.

Siccome poi col sostituire in $V_1=10^mV-g_1T_1$ (9.° N.° 22) i precedenti valori di 10^mV, e di T_1 ottienesi $V_1=10^{i+m-(l-2)}(t'-g_1s')+(v'-g_1u')$; e questo risultato è di forma simile affatto a quella del valore di V (N.° 24); ne segue, che mentre si verifichino, anche riguardo a queste quantità, le precedenti condizioni si otterrà la cifra g_2, da aggiungersi nel valore di $\sqrt[m]{P}$ alla quantità $10^3A+10^2g+10g_1$, tanto col dividere 10^mV_1 per T_2, (12.° N.° 22), come col dividere il residuo, che si è ottenuto dalla divisione di t' per s', cioè la quantità $t'-g_1s'$ per ciò, che diventa la quantità s', tagliandosi da essa l'ultima cifra ε. Così in progresso.

Ma le ora esposte successive divisioni altro evidentemente non sono, che le prescritte nel (N.° 4.). Dunque, ogni qualvolta abbiano luogo le condizioni sovraccennate, sotto l'abbreviamento di calcolo, che si è esposto nel citato (N.° 4), si otterranno realmente le cifre g, g^1, g^2, ec., che compongono la radice richiesta.

26. Manchino ora le condizioni supposte nei (N. 23, 25), e

1.° Cominciam dal supporre, che dividendo la quantità (LXIII) $=t$ (N.° 24) per l'altra (LXIV) $=s$, si abbia bensì, come nel (N.° 23), il quoziente q; ma il residuo, che ne risulta, e che dirò t', sia $<q$, e seguano per ora a verificarsi le altre condizioni de' cit. (N.$^{\text{i}}$ 23, 25). In questa ipotesi potendo la cifra η' del divisore $T=$(LXI), contenersi entro la cifra τ del dividendo $U=$(LXII) accresciuta dell' avanzo precedente $10r$, oppure la ι' entra la ξ aumentata del precedente residuo, oppure ec. meno di q volte; se mai ciò accada, dovrà essere la parte intera del quoto $\frac{U}{T}$, ossia $g<q$.

I. Suppongasi in primo luogo, che si abbia bensì $t'<q$, ma però che ciascuna delle cifre η', ι', ec. contengasi nella corrispondente τ, ξ, ec. accresciuta del rispettivo avanzo non

meno di q volte. In questa supposizione, essendo $g = q$, cerchiamo di determinare, quali siano i valori delle successive cifre g_1, g_2, g_3, ec. (9.°, 12.° N.° 22) della $\sqrt[m]{P}$. Poichè in conseguenza delle ipotesi fatte, e del (N.° 24) abbiamo $V = U - gT = 10^{i-(l-2)}(t - gs) + (v - gu) = 10^{i-(l-2)}(t - gs - t') + (10^{i-(l-2)}t' + v - gu) = 10^{i-(l-2)}t' + v - gu > 0$, ne verrà V quantità positiva, e della forma $10^{i-(l-2)}r'' + 10^{i-(l-1)}\tau'' + 10^{i-l}\xi'' +$ ec., in cui ciascuno dei numeri r'', τ'', ξ'', ec. sarà < 10: ma g_1 è la parte intiera del quoto $\frac{10^m V}{T_1}$ (9.° N.° 22); ed ogni qualvolta sia $l > 4$, la frazione $\frac{10^m V}{T_1}$

$$= \frac{10^{i+m-(l-2)}r'' + 10^{i+m-(l-1)}\tau'' + 10^{i+m-l}\xi'' + \text{ec.}}{10^{i+m-2}\alpha + 10^{i+m-3}\beta + 10^{i+m-4}\gamma + \text{ec.}} \text{ (LXVIII, N.° 25)}$$

$$= \frac{r'' + 10^{-1}\tau'' + 10^{-2}\xi'' + \text{ec.}}{10^{l-4}\alpha + 10^{l-5}\beta + 10^{l-6}\gamma + \text{ec.}},$$ a cagione di α non < 1 (N.° 23), è una frazione vera. Dunque, mentre abbiasi $l > 4$, risulterà $g_1 = 0$.

Poichè $V_1 = 10^m V - g_1 T_1$ (9.° N.° 22), nel caso di $l > 4$ avendosi $g_1 = 0$; otterremo $V_1 = 10^m V$; ma essendo $T'_1 = T_1 + g_1 s'_1 = \tau_1$ (9.° N.° 22) e $T_2 = 10^{m-1}\tau'_1 + g_2 s_2$ (12.° N.° 22) $= 10^{m-1}\tau_1 + g_2 s_2$, pel cit. (9.° N.° 22) sarà esso T_2 una quantità della forma $10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta +$ ec. Dunque risultando $$\frac{10^m V_1}{T_2} = \frac{10^{i+2m-(l-2)}r'' + 10^{i+2m-(l-1)}\tau'' + \text{ec.}}{10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta + \text{ec.}} = \frac{r'' + 10^{-1}\tau'' + \text{ec.}}{10^{l-5}\alpha + 10^{l-6}\beta + \text{ec.}},$$ ne segue, che, mentre abbiasi $l > s$, sarà ancora la parte intiera del quoto $\frac{10^m V_1}{T_2}$, e però g_2 (12.° N.° 22) $= 0$.

Nella maniera medesima trovandosi

$$\frac{10^m V_2}{T^3} = \frac{10^{i+3m-(l-2)}r'' + 10^{i+3m-(l-1)}\tau'' + \text{ec.}}{10^{i+3m-4}\alpha + 10^{i+3m-5}\beta + \text{ec.}} = \frac{r'' + 10^{-1}\tau'' + \text{ec.}}{10^{l-6}\alpha + 10^{l-7}\beta + \text{ec.}}$$ eziandio g_3 sarà $= 0$, mentre si abbia $l > 6$; e così di seguito, fino ad essere $g_{l-4} = 0$.

II. Ritenuto il residuo $t - qs = t' < q$, supponghiamo in secondo luogo, che qualcheduna delle cifre η', ι', ec. del divi-

divisore T si contenga nella corrispondente τ, ξ, ec. del dividendo U accresciuta del dovuto avanzo meno delle esposte q volte. In questa ipotesi sarà $g<q$, e sarà $U-qT=10^{i-(l-2)}(t-qs)+(v-qu)=10^{i-(l-2)}(t-qs-t')+(10^{i-(l-2)}t'+v-qu)=10^{i-(l-2)}t'+v-qu<0$. Essendo q maggior del dovere, avremo $10A+q>\sqrt[m]{P}$ (8.°, 9.° N.° 22) e quindi la nuova cifra da aggiungersi alla quantità 10^2A+10q, onde accostarsi opportunamente al valore di $\sqrt[m]{P}$, dovrà essere negativa. Sia $-g_1$ questa nuova cifra; poichè il numero p (N.° 5), che si adopera ad eseguire le operazioni de' (N.^{i} 10, ec. 15) può pei numeri citati essere egualmente positivo, e negativo, si collochi nel (9.° N.° 22) $-g_1$ invece di g_1, e per indicare i risultati, che ne vengono, serviamoci per brevità delle stesse lettere (LVIII); posto in oltre $U-qT=-V$, sarà evidentemente $-g_1$ la parte intera del quoto $\frac{-10^mV}{T_1}$; ma $V=-(U-qT)=qu-(10^{i-(l-2)}t'+v)$ è quantità nel presente caso positiva, e non può essere che della forma $10^{i-(l-2)}r'''+10^{i-(l-1)}\tau'''+10^{i-l}\xi'''+$ ec., in cui ciascuno dei numeri r''', τ''', ξ''', ec. è <10, e con discorsi simili a quelli dei (5°, 6.°, ec. N.° 22) in conseguenza delle ipotesi fatte truovasi risultare T_1 anche presentemente della forma $10^{i+m-2}\alpha+10^{i+m-3}\beta+10^{i+m-4}\gamma+$ec. Dunque avendosi

$$\frac{-10^mV}{T_1}=-\left(\frac{10^{i+m-(l-2)}r'''+10^{i+m-(l-1)}\tau'''+10^{i+m-l}\xi'''+\text{ec.}}{10^{i+m-2}\alpha+10^{i+m-3}\beta+10^{i+m-4}\gamma+\text{ec.}}\right)=-\left(\frac{r'''+10^{-1}\tau'''+10^{-2}\xi'''+\text{ec.}}{10^{l-4}\alpha+10^{l-6}\beta+10^{l-6}\gamma+\text{ec.}}\right),$$

ne segue, che, ogni qualvolta sia $l>4$, dovrà risultare anche qui $g_1=0$.

Pongasi realmente $l>4$, onde sia $g_1=0$, converrà in questo caso determinare la successiva cifra g_2, la quale sottratta dalla quantità $10^3A+10^2q-10\times0=10^3A+10^2q+10\times0$ produca il risultato $10^3A+10^2q+10\times0-g_2$ prossimo al valore di $\sqrt[m]{P}$. Avendosi $V_1=-(10^mV-g_1T_1)=-10^mV$, e posto nel (12.° N.° 22) $-g_2$ invece di g_2, risultando

$T_2 = 10^{m-1}T'_1 - g_2S_2 = 10^{m-1}(T_1 - g_1S'_1) - g_2S_2 = 10^{m-1}T_1 - g_2S_2$, sarà $10^mV_1 = -(10^{i+2m-(l-2)}r''' + 10^{i+2m-(l-1)}\tau''' + \text{ec.})$, e sarà T_2 della forma $10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta + \text{ec.}$; ma $-g_2$ non è che la parte intera del quoziente

$$\frac{10^mV_1}{T^2} = -\left(\frac{10^{i+2m-(l-2)}r''' + 10^{i+2m-(l-1)}\tau''' + \text{ec.}}{10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta + \text{ec.}}\right) = -\frac{\tau''' + 10^{-1}\tau''' + \text{ec.}}{10^{l-5}\alpha + 10^{l-6}\beta + \text{ec.}}.$$

Dunque, allorchè si ha $l > s$, dovrà essere ancora $g_2 = 0$.

Nella stessa guisa la cifra g_3, la quale nella ipotesi di $l > s$ dovrebbe sottrarsi dalla quantità $10^4A + 10^3q + 10^2 \times 0 - 10 \times 0 = 10^4A + 10^3q + 10^2 \times 0 + 10 \times 0$, onde accostarsi opportunamente al valore di $\sqrt[m]{P}$, essendo, cangiatone il segno, la parte intera del quoto $\frac{10^mV_2}{T_3}$, ove V_2, T_3 esprimono le quantità, che succedono, e sono analoghe alle precedenti V_1, T_2, e trovandosi, come precedentemente $\frac{10^mV_2}{T_3} = -$ $\left(\frac{10^{i+3m-(l-2)}r''' + 10^{i+3m-(l-1)}\tau''' + \text{ec.}}{10^{i+3m-4}\alpha + 10^{i+3m-5}\beta + \text{ec.}}\right) = -\left(\frac{r''' + 10^{-1}\tau''' + \text{ec.}}{10^{l-6}\alpha + 10^{l-7}\beta + \text{ec.}}\right)$, risulterà eziandio $g_3 = 0$, mentre si abbia $l > 6$.

Proseguendo nella medesima maniera, troveremo in generale, che dovrà ancora in questo secondo caso essere zero ciascuna delle cifre g_1, g_2, g_3, ec. g_{l-4}.

Dunque ogni qualvolta il residuo t', che nasce dalla divisione della quantità $t =$ (LXIII) per l'altra $s =$ (LXIV) (N.° 23), sia minore del quoto q, e lo stesso si dice se sia < 10; avremo tanto nel primo, come nel secondo dei casi ora considerati un risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4} + 10^{l-5} \times 0 + 10^{l-6} \times 0 + \text{ec.} + 10 \times 0 + 0 = 10^{l-3}A + 10^{l-4}q$, il quale, (supposto che q sia in esso la *nesima* cifra decimale) sarà nel primo caso inferiore, e nel secondo maggiore del vero valore di $\sqrt[m]{P}$ per una quantità più piccola di $\frac{1}{10^{n+l-4}}$, e avrà per conseguenza in amendue i casi tanto accostamento verso il valor vero di $\sqrt[m]{P}$, quanto può esigersi con un numero $n + l - 4$ di decimali. Dunque, allorquando si abbia il residuo $t' < q$, ovvero < 10, determinato il quoziente q, non avremo che a moltiplicare la quantità $10A + q$ per 10^{l-4}, e il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}q$ avrà verso $\sqrt[m]{P}$ l'indicato accostamento, rimanendo però incognito, se ne sia maggiore, oppure minore.

Riconosciuto che sia $10^{l-3}A + 10^{l-4}q > \sqrt[m]{P}$, si determinerebbe assai facilmente il valore prossimamente $< \sqrt[m]{P}$, tale essendo il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}q + 10^{l-3} \times 0 + 10^{l-2} \times 0 + \text{ec.} + 10 \times 0 + 10 - 1 = 10^{l-3}A + 10^{l-4}(q - 1) + 10^{l-5} \times 9 + 10^{l-6} \times 9 + \text{ec.} + 10 \times 9 + 9$.

2.° I. Espressa sempre con la lettera q la parte intera del quoto $\frac{t}{s}$ (N.^{i} 23, 24), e con la t' l'avanzo, cosicchè $t' = t - qs < s$, vogliasi, che nel valore di $U - qT = 10^{i-(l-2)}(t - qs) + (v - qu)$, che denominerò qui pure V, risulti $qu > v$ (N.^{i} 24, 25). In questa supposizione poichè si ha $V = 10^{i-(l-2)}t' + v - qu$, osservo se sia $10^{i-(l-2)}t' + v - qu > 0$, o non lo sia: se lo sia, risultando positivo l'avanzo V della divisione di U per T, sarà $q = g$, e il supposto accidente di $v - qu < 0$ non apporta alcuna variazione nella determinazione della cifra g. Che se sia $10^{i-(l-2)}t' + v - qu < 0$; allora dovrà essere $qu > 10^{i-(l-2)}t' + v$. Ora essendo q numero di una sola cifra, il prodotto $qu = q(10^{(i-l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.})$ (N.^{i} 23, 24) deve essere della forma $10^{i-(l-2)}p'' + 10^{i-(l-1)}\eta'' + 10^{i-l}\iota'' + \text{ec.}$, e in questa io dico dover essere la prima cifra $p'' < q$; perchè di fatti se si volesse $p'' = q$, ne verrebbe, dividendo per q, l'Equazione $10^{i-(l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.} = 10^{i-(l-2)} + \frac{10^{i-(l-1)}\eta'' + 10^{i-l}v'' + \text{ec.}}{q}$; ma questo secondo membro è $> 10^{i-(l-2)}$; dunque dovrebbe essere ancora $10^{i-(l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.} < 10^{i-(l-2)}$; ma ciò a cagione di ciascheduno de' numeri η', ι', ec. < 10, è impossibile: dunque non potendo essere $p'' = q$, e quindi neppure $p'' > q$, ne segue che ec. Pertanto avendosi $10^{i-(l-2)}p'' + 10^{i-(l-1)}\eta'' + \text{ec.}$

$> 10^{i-(l-2)}t' + v$ e però $> 10^{i-(l-2)}t' + 10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\xi +$ ec. (LXV) (N.° 23), ed avendosi $p'' < q$, dovrà essere ancora $t' < q$; ma se il valore di V è negativo, ed il residuo t' proveniente dalla divisione di t per s è minore del quoto; questo caso non è che il II. del (prec. 1.°). Dunque in questa supposizione, determinato il quoziente q, avremo immediatamente il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}q$, il quale sarà bensì $> \sqrt[m]{P}$, ma avrà al vero valore di questo radicale lo stesso grado di avvicinamento che è stato indicato nel citato (II. prec. 1.°).

II. Ritengasi $10^{i-(l-2)}t' + v - qu > 0$, cosicchè si abbia $q = g$ (prec. I.). Avendosi per la ipotesi $v - qu < 0$, ossia $v - gu < 0$, e però, ritenute le denominazioni del (N.° 25), avendosi $10^m(v - gu) = -v'$, sarà $10^m V = 10^{i+m-(l-2)}t' - v'$. Si divida come nel citato (N.° 25) la parte t' della quantità $10^m V$ per la parte s' della $T_1 = 10^{i+m-(l-2)}s' + u'$ (LXIX N.° 25), e chiamatane q_1 la parte intera del quoto, ne sia t'' l'avanzo, cosicchè $t'' < s'$, e $t'' = t' - q_1 s'$. Risultando da ciò $10^m V - q_1 T_1 = 10^{i+m-(l-2)}t'' - (v' + q_1 u')$, chiamato qui pure V_1 questo valore, o si ha $V_1 > 0$, oppure $V_1 < 0$: se si ha $V_1 > 0$, allora, essendo q_1 la parte intera del quoziente $\frac{10^m V}{T_1}$ si avrà $q_1 = g_1$. Che se sia $V_1 < 0$, e però $q_1 u' + v' > 10^{i+m-(l-2)}t''$ ossia $q_1 u' + 10^m gu > 10^{i+m-(l-2)}t'' + 10^m v$; risultando pel (N.° 25) $q_1 u' = q_1 (10^{i+m-(l-1)}\zeta''' + 10^{i+m-l}\eta''' +$ ec.), sarà questo prodotto della forma $10^{i+m-(l-2)}p'^{v} + 10^{i+m-(l-1)}\zeta'^{v} + 10^{i+m-l}\eta'^{v} +$ ec., in cui, come nel (prec. I.), ci dimostra $p'^{v} < q_1$. Si sommi ora con questo il valore $10^m gu$, che esprimerò come nel (prec. I.), per $10^{i+m-(l-2)}p'' + 10^{i+m-(l-1)}\eta'' + 10^{i+m-l}\iota'' +$ ec.: essendo ciascuna delle cifre, che compongono queste due quantità < 10, la somma $q_1 u' + 10^m gu$ dovrà acquistare la forma $10^{i+m-(l-3)}p^{v} + 10^{i+m-(l-2)}r^{v} + 10^{i+m-(l-1)}\zeta^{v} + 10^{i+m-l}\eta^{v} +$ ec., in cui p^{v} sarà solamente $= 1$, oppure $= 0$. Dunque avendosi $10^{i+m-(l-3)}p^{v} + 10^{i+m-(l-2)}r^{v} + 10^{i+m-(l-1)}\zeta^{v} +$ ec $> 10^{i+m-(l-2)}t'' + 10^{i+m-(l-1)}\tau + 10^{i+m-l}\zeta +$ ec., dovrà essere t'' non $> 10 + r^v$, e quindi $t'' < 2 . 10$. Potendo pertanto in questo caso il residuo t'' essere formato di due cifre, il discorso del (II. prec. 1.°) avrà bensì luogo ancor quivi, ma lo avrà fino al valore $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}q_1$, il quale, conservate le supposizioni del citato (II. prec. 1.°), sarà più grande del vero valore di $\sqrt[m]{P}$ per una quantità soltanto $< \frac{1}{10^{n+l-5}}$. Questo avvicinamento è realmente minore di quello, che hanno al vero valore di $\sqrt[m]{P}$ le quantità determinate nel (prec. I.°), e nel (prec. 1); ma ciò procede perchè nei citati (prec. I.°, prec. 1) il residuo era sempre < 10, e nel caso presente dovendo essere solamente il residuo $t'' < 2 . 10$, potrebbe esso risultare > 10.

III. Nel caso, in cui si ha $V_1 < 0$, e però $q_1 = g_1$ (prec. II), supposto $10^m(v' + g_1 u') = v''$, ne verrà $10^m V_1 = 10^{i+2m-(l-2)} t'' - v''$, e supposto $T_2 = 10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta +$ ec. $+ 10^{i+2m-(l-2)}\gamma + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'} +$ ec., $10^{l-5}\alpha + 10^{l-6}\beta +$ ec. $+ \gamma = s''$, $10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'} +$ ec. $= u''$ onde $T_2 = 10^{i+2m-(l-2)} s'' + u''$; si divida t'' per s'', e ne sia q_2 la parte intera del quoto, e $t''' = t'' - q_2 s''$ il residuo. Risultando da ciò $10^m V_1 - q_2 T_2 = 10^{i+2m-(l-2)} t''' - (v'' + q_2 u'')$; chiamata V_2 questa differenza, osservo se sia $V_2 > 0$, oppure $V_2 < 0$: nel primo di questi casi, come precedentemente, si trova dover essere $q_2 = g_2$. Nel caso secondo, avendosi $V_2 = 10^{i+2m-(l-2)} t''' - (10^m v' + 10^m g_1 u' + q_2 u'') = 10^{i+2m-(l-2)} t''' + 10^{2m} v - [10^m(10^m g u + g_1 u') + q_2 u'']$; essendo $q_2 u'' = q_2 (10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'} +$ ec.) della forma $10^{i+2m-(l-2)} p^{v''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v''} +$ ec., in cui $p^{v''} < q_2$, e però avendosi la somma $10^m(10^m g u + g_1 u') + q_2 u'' = [10^{i+2m-(l-3)} p^v + 10^{i+2m-(l-2)} r^v + 10^{i+2m-(l-1)}\zeta^v + 10^{i+2m-l}\eta^v +$ ec.] (prec. II) $(+ 10^{i+2m-(l-2)} p^{v''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v''} +$ ec.) della forma $10^{i+2m-(l-3)} p^{v'''} + 10^{i+2m-(l-2)} r^{v'''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'''} +$ ec., ove $p^{v'''}$ non può avere che uno dei valori 2, 1, 0; a cagione di $V_2 < 0$, ne verrà $10^{i+2m-(l-2)} t''' +$

$10^{i+2m-(l-1)}\tau+10^{i+2m-l}\xi+$ ec. $<10^{i+2m-(l-3)}p^{v'''}+10^{i+2m-(l-2)}r^{v'''}+10^{i-2m-(l-1)}\varepsilon^{v'''}+10^{i+2m-l}\zeta^{v'''}+$ ec., e per conseguenza $t'''<10p^{v'''}+r^{v'''}$, e quindi $t'''<3\,.\,10$. Pertanto potendo il residuo $t'''<30$ essere formato di due cifre, come nel (prec. II) vedremo ottenersi un risultato $10^{l-4}A+10^{l-5}g+10^{l-6}g_1+10^{l-7}q_2$, il quale supererà il valor vero di $\sqrt[m]{P}$ per una differenza $<\frac{1}{10^{n+l-5}}$.

IV. Sia $V_2>0$, onde $q_2=g_2$. Seguendo nelle denominazioni ulteriori l' analogia delle precedenti e posto perciò $T_3=10^{i+3m-4}\alpha+10^{i+3m-5}\beta+$ ec. $+10^{i+3m-(l-1)}\gamma'^{x}+10^{i+3m-l}\varepsilon'^{x}+$ ec., $10^{l-6}\alpha+10^{l-7}\beta+$ ec. $=s'''$, $10^{i+3m-(l-1)}\gamma'^{x}+10^{i+3m-l}\varepsilon'^{x}+$ ec. $=u'''$, $10^m(v''+g_2u'')=v'''$, ne verrà
$10^mV_2=10^{i+3m-(l-2)}t'''-v'''$, $T_3=10^{i+3m-(l-2)}s'''+u'''$ e supposto q_3 parte intera del quoto $\frac{t'''}{s'''}$, e t'^{v} l'avanzo, avremo $V_3=10^mV_2-q_3T_3=10^{i+3m-(l-2)}t'^{v}-(v'''+q_3u''')$; e però, se sia $V_3>0$, avremo ancora qui $q_3=g_3$. Che se $V_3<0$; allora, come nei (prec. II, III), rifletto essere $V_3=10^{i+3m-(l-2)}t'^{v}+10^{3m}v-[10^m(10^m[10^mgu+g_1u']+g_2u'')+q_3u''']$, ed essere inoltre $q_3u'''=q_3(10^{i+3m-(l-1)}\gamma'^{x}+10^{i+3m-l}\varepsilon'^{x}+$ ec.) della forma $10^{i+3m-(l-2)}p^{x}+10^{i+3m-(l-1)}\gamma^{x}+10^{i+3m-l}\varepsilon^{x}+$ ec., ove $p^{x}<q_3$, per cui la somma $10^m[10^m(10^mgu+g_1u')+g_2u'']+q_3u'''=(10^{i+3m-(l-3)}p^{v'''}+10^{i+3m-(l-2)}r^{v'''}+10^{i+3m-(l-1)}\varepsilon^{v'''}+10^{i+3m-l}\zeta^{v'''}+$ ec.)$(+10^{i+3m-(l-2)}p^{x}+10^{i+3m-(l-1)}r^{x}+10^{i+3m-l}\varepsilon^{x}+$ ec.) (prec. III), acquista la forma $10^{i+3m-(l-3)}p^{x'}+10^{i+3m-(l-2)}r^{x'}+10^{i+3m-(l-1)}\gamma^{x'}+10^{i+3m-l}\varepsilon^{x'}+$ ec. avendosi $p^{x'}$ uguale ad uno dei numeri 3, 2, 1, 0.

Dunque a cagione di $V_3<0$, risultando $10^{i+3m-(l-2)}t'^{v}+10^{i+3m-(l-1)}\tau+10^{i+3m-l}\xi+$ ec. $<10^{i+3m-(l-3)}p^{x'}+10^{i+3m-(l-2)}r^{x'}+10^{i+3m-(l-1)}\gamma^{x'}+10^{i+3m-l}\varepsilon^{x'}+$ ec., si avrà $t'^{v}<10p^{x'}+r^{x'}$, e però $t'^{v}<4\,.\,10$. Dunque anche nel caso presente potendo il residuo $t'^{v}<40$ essere composto di due cifre; come nei (prec. II, III) resterà determinata una quantità $10^{l-4}A+10^{l-5}+10^{l-6}g_1+10^{l-7}{}_2+10^{l-8}q_3>\sqrt[m]{P}$ per un valore $<\frac{1}{10^{n+l-5}}$.

V. Supposto $V_3 > 0$, per cui $q_3 = g_3$ (prec. IV.), se proseguiremo innanzi: nel modo stesso si troverà, che quando il residuo susseguente $V_4 = 10^m V_3 - q_4 T_4$ sia > 0, allora sarà $q_4 = g_4$. Che se $V_4 < 0$; allora q_4 sarà maggiore del dovere, ma risultando in tale ipotesi il residuo $t^v = t'^v - q_4 s'^v < 5 . 10$, e potendo esso però contenere due cifre; verrà ad ottenersi una quantità $10^{l-4}A + 10^{l-5}g +$ ec. $+ 10^{l-8}g_3 + 10^{l-9}q_4$ superiore per un valore più piccolo di $\frac{1}{10^{n+l-5}}$ al valore vero di $\sqrt[m]{P}$.

Così in progresso fino al quoziente q_{10}, riguardo al quale se si abbia $V_{10} > 0$, si otterrà $q_{10} = g_{10}$; ma se $V_{10} < 0$, allora risultando il residuo $t^{x'} = 10^m t^x - q_{10} s^x < 11 . 10 = 110$, potrebbe esso $t^{x'}$ venir formato di tre cifre, e quindi il solito raziocinio condurrebbe ad ottenersi soltanto una quantità $10^{l-5}A + 10^{l-6}g + 10^{l-7}g_1 +$ ec. $+ 10^{l-16}q_{10} > \sqrt[m]{P}$ per un valore solamente $< \frac{1}{10^{n+l-6}}$. Così di seguito.

3.° I. Sia nella quantità $(LX) = 10^{m-1} m A^{m-1}$ (N.° 23) la cifra $\eta = 9$, e nel formarsi la somma $gS + 10^{m-1} m A^{m-1}$ (8.° N.° 22), onde ottenere il valore di T, si trasporti ad unire con la $\eta = 9$ un'unità: in questa ipotesi, poichè risulta $\eta + 1 = 10$, nella quantità $(LXI) = T$ dovrà essere $\eta' = 0$, e la cifra ζ dovrebbe essere accresciuta di 1. In conseguenza di ciò, ritenute tutte le denominazioni dei (N.i 23, 24; I, II, ec. prec. 2.°) avremo $T = 10^{i-(l-2)}s + 10^{i-(l-2)} + u$, e $V = 10^{i-(l-2)}t' + v - (10^{i-(l-2)} + u) q$. Ora o si ha $V > 0$, oppure $V < 0$: nel primo di questi casi si vedrà, come di sopra, essere $q = g$, e nel secondo $q > g$. In questo secondo poi a cagione di $\eta' = 0$ non potendo il prodotto $(10^{i-(l-2)} + u)$ $q = (10^{i-(l-2)} + 10^{i-l}\iota' +$ ec.$)q$ che essere della forma $10^{i-(l-2)}$ $q + 10^{i-(l-1)}\eta'' + 10^{i-l}\iota'' +$ ec., ed essendo $10^{i-(l-2)}t' + v =$ $10^{i-(l-2)}t' + 10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\xi +$ ec., ne verrà $10^{i-(l-2)}$ $t' + 10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\xi +$ ec. $< 10^{i-(l-2)}q + 10^{i-(l-1)}\eta'' + 10^{i-l}$ $\iota'' +$ ec.; è però t' non $> q$, e quindi $t' < 10$. Dunque qui ancora, siccome nei (II. prec. 1.°, I. prec. 2.°), concluderemo ottenersi tostamente la quantità $10^{l-3}A + 10^{l-4}q > \sqrt[m]{P}$ per un valore $< \frac{1}{10^{n+l-4}}$.

II. Sia $V > 0$, onde $q = g$ (prec. I.). Poichè nel caso presente si ha $T = 10^{i-1}\alpha + 10^{i-2}\beta +$ ec. $+ 10^{i-(l-3)}\varepsilon + 10^{i-(l-2)}(\zeta + 1) + 10^{i-l}\iota' +$ ec., otterremo per lo (8.° N.° 22) $10^{m-1}T' = 10^{m-1}(gS' + T)$ della forma $10^{i+m-2}\alpha + 10^{i+m-3}\beta +$ ec. $+ 10^{i+m-(l-2)}\varepsilon + 10^{i+m-(l-1)}(\zeta + 1) + 10^{i+m-l}\eta'' + 10^{i+m-(l+1)}\iota'' +$ ec., in cui $\eta'' = 1$, oppure $= 0$; quindi per lo (11.° N.° 22) si ricaverà $T_1 = q_1 S_1 + 10^{m-1}T'$ della forma $10^{i+m-2}\alpha + 10^{i+m-3}\beta +$ ec. $10^{i+m-(l-2)}\varepsilon + 10^{i+m-(l-1)}(\zeta + 1) + 10^{i+m-l}\eta''' + 10^{i+m-(l+1)}\iota''' +$ ec., ove η''' uguaglia esso pure uno dei numeri 1, 0. Ritenute pertanto le solite denominazioni, e supposto $\zeta + 1 = \zeta'''$, sarà qui ancora come nel (N.° 25), $T_1 = 10^{i+m-(l-2)}s' + u'$, e fatto al solito $\frac{t'}{s'} = q_1 + \frac{t''}{s'}$, ove $t'' < s'$, avremo $V_1 = 10^m V - q_1 T_1 = 10^{i+m-(l-2)}t'' + 10^m v - [10^m(10^{i-(l-2)}g + gu) + q_1 u']$. Ora potendo nel caso presente essere $\zeta''' = 10$, il che accaderà quando $\zeta = 9$, il prodotto $q_1 u' = q_1(10^{i+m-(l-1)}\zeta''' + 10^{i+m-l}\eta''' + 10^{i+m-(l+1)}\iota''' +$ ec.) acquista la forma $10^{i+m-(l-2)}p^{iv} + 10^{i+m-(l-1)}\zeta^{iv} + 10^{i+m-l}\eta^{iv} +$ ec., in cui p^{iv} non $> q_1$. Dunque, sommando questo con la quantità $10^m(10^{i-(l-2)}g + gu) = 10^{i+m-(l-2)}g + 10^{i+m-(l-1)}\eta'' + 10^{i+m-l}\iota'' +$ ec. (prec. II.), poichè risulta un valore della forma $10^{i+m-(l-3)}p^{v} + 10^{i+m-(l-2)}r^{v} + 10^{i+m-(l-1)}\eta^{v} + 10^{i+m-l}\iota^{v} +$ ec.; ove $p^{v} = 1$, ovvero $= 0$; ne segue, che quando si ha $V_1 < 0$, dovrà essere solamente $t'' < 2 . 10$; e però potendo t'' contenere due cifre, come nel (II. prec. 2.°) vedremo ottenersi in questo caso la quantità $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}q_1$, la quale supererà $\sqrt[m]{P}$ di un valore $< \frac{1}{10^{n+l-5}}$. Quando poi sia $V_1 > 0$, allora sarà anche quivi $q_1 = g_1$.

III. Pongasi $V_1 > 0$, per cui $q_1 = g_1$. Essendo in T_1 (prec. II.) il valore di η''' non > 1, in una maniera simile alla

alla praticata nel citato (prec. II), e in conseguenza degli (11.°, 12.°, N.° 22) vedremo, come nel (II. prec. 2.°), risultarci $T_2 = 10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta + \text{ec.} + 10^{i+2m-(l-2)}\gamma + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon + 10^{i+2m-l}(\zeta + 1) + 10^{i+2m-(l+1)}\eta^{v'} + 10^{i+2m-l}\iota^{v'} + \text{ec.}$, ossia, conservando sempre le solite denominazioni $T_2 = 10^{i+2m-(l-2)} s'' + u''$, ove, potendo tanto ζ, come ε essere $= 9$, sarà u'' della forma $10^{i+2m-(l-2)} p^{v''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v''} + \text{ec.}$, e in questa $p^{v''}$ non potrà avere che uno dei valori 1, 0, e quando $p^{v''} = 1$, si avrà $\varepsilon^{v''} = 0$. Ora avendosi giusta il solito $\frac{t''}{s''} = q_2 + \frac{t'''}{s''}$, e però $V_2 = (10^m V_1 - q_2 T_2) = 10^{i+2m-(l-2)} t''' + 10^{2m} v - [10^m(10^m[10^{i-(l-2)} g + gu] + g_1 u') + q_2 u'']$ ed essendo per quanto si è ora detto $q_2 u''$ della forma $10^{i+2m-(l-2)} p^{v'''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'''} + \text{ec.}$ in cui $p^{v'''}$ non $> q_2$; col sommare questo valore con l'altro esprimente il valore di $10^m[10^m(10^{i-(l-2)} g + gu) + g_1 u'']$ (prec. II) ottiensi un risultato della forma $10^{i+2m-(l-3)} p'^{x} + 10^{i+2m-(l-2)} r'^{x} + 10^{i+2m-(l-1)} \varepsilon'^{x} + 10^{i+2m-l}\zeta'^{x} + \text{ec.}$, in cui p'^{x} deve uguagliare uno dei numeri 2, 1, 0. Dunque, ogni qualvolta sia $V_2 < 0$, risultando $t''' < 3.10$, si ricaverà il valore $10^{l-4}A + 10^{l-5} g + 10^{l-6} g_1 + 10^{l-7} q_2 > \sqrt[m]{P}$ per un valore $< \frac{1}{10^{n+l-5}}$ come nel (prec. II). Nel caso poi di $V_2 > 0$, si avrà $q_2 = g_2$.

IV. Proseguendo avanti nella stessa guisa agevolmente vedremo, che come nei (prec. I, II, III) sonosi ottenute delle approssimazioni simili a quelle dei (I, II, III prec. 2.°), così in seguito ottengonsi in questo caso le altre successive simili anch'esse alle corrispondenti dei (IV, V prec. 2.°).

4.° I. Nelle considerazioni de' (prec. 1.°, 2.°, 3.°) ho poste sempre le quantità V, V_1, V_2, ec. maggiori, oppure minori, e non mai uguali allo zero; e ciò perchè presentemente si tratta di un'approssimazione, e non già di una determinazione di radice esatta, e se qualcuna delle accennate V, V_1, V_2, ec. fosse zero, allora la radice sarebbe esatta, e rimarrebbe pienamente determinata contro la supposizione.

II. Nei (I. prec. 2.°, I. prec. 3.°), anche allorquando si ha $V > 0$, purchè contemporaneamente risulti l'avanzo t' di una cifra sola, ossia < 10, avremo un valore $10^{l-3}A + 10^{l-4}g$, il quale differisce dal vero valore di $\sqrt[m]{P}$ per una quantità $< \frac{1}{10^{n+l-4}}$; e tutto ciò si dimostra come nel (I. prec. 1.°). Così nei (II. prec. 2.°, II. prec. 3.°) ancora mentre sia $V_1 > 0$, purchè t'' non sia formato che di due cifre, si otterrà una quantità $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1$ differente meno di $\frac{1}{10^{n+l-5}}$ dal valore vero di $\sqrt[m]{P}$. Nello stesso modo dei (III. prec. 2.°, III. prec. 3.°) quando sia t''' di due sole cifre, anche nel caso di $V_2 > 0$ si ricaverà il valore $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1 + 10^{l-7}g_2$ diverso meno di $\frac{1}{10^{n+l-5}}$ da $\sqrt[m]{P}$. Così di seguito come nei (IV, V prec. 2.°; IV, V prec. 3.°). Si rifletta però che in tutti questi casi le quantità risultanti $10^{l-3}A + 10^{l-4}g$, $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1$, $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1 + 10^{l-7}g_2$, ec. sono non già maggiori, come nei luoghi citati, ma minori del valor vero di $\sqrt[m]{P}$.

III. Le cifre, che si contengono nel dividendo (LXIII) $= t = 10^{l-2}\lambda + 10^{l-3}\mu +$ ec. (N.° 23) sono di numero $l - 1$, e quando han luogo le condizioni dei (N.i 23, 25), l'operazione di abbreviamento proseguesi giusta il (I. N.° 4), finchè rimangono nel dividendo due sole cifre. Dunque le g, g_1, g_2, ec. che vengono successivamente determinate, saranno di numero $l - 3$, e avremo il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}g + 10^{l-5}g_1 + 10^{l-6}g_2 +$ ec. $+ 10g_{l-3} + g_{l-4}$; ma ritenuto, che g sia la *nesima* cifra decimale (II. prec. 1.°), il risultato ora esposto sappiamo, che differisce dal valor vero di $\sqrt[m]{P}$ meno di $\frac{1}{10^{n+l-4}}$. Dunque, dallo stesso valor vero di $\sqrt[m]{P}$ differendo meno di $\frac{1}{10^{n+l-4}}$, anche il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}q$

dei (I, II prec. 1.°; I. prec. 2.°; I prec. 3.°) ne segue che quando hanno luogo i casi dei citati (I, II prec. 1.°; I. prec. 2.° ; I. prec. 3.°) allora nella espressione semplicissima $10^{l-3}A + 10^{l-4}q$ avremo un accostamento verso $\sqrt[m]{P}$ uguale a quello, che si ha, mentre si verifichino le condizioni de'(N.ⁱ 23, 25), dall'operazione ivi accennata, e continuata, giusta il (I. N.° 4), finchè nel dividendo non rimangono, che due sole cifre. Che se hanno luogo i casi dei (II, III, ec. prec. 2.°; II, III, ec. prec. 3.°); allora i valori ivi ottenuti fino esclusivamente al valore, che ha per ultimo termine il quoto q_{10} (V. prec. 2.), accostandosi al valor vero di $\sqrt[m]{P}$ per una differenza soltanto $< \frac{1}{10^{n+l-5}}$, avremo un'approssimazione, la quale, avuto riguardo ai limiti, è 10 volte minore dell'approssimazione, che si ottiene, mentre verificandosi le condizioni de' citati (N.ⁱ 23, 25), si prolunghi l'operazione ivi esposta, fino a rimanere, come di sopra, due sole cifre nel dividendo. I valori poi, che risultarebbero aventi per ultimo termine uno de' quozienti q_{10}, q_{11}, q_{12}, ec. q_{99}, avendo per limite del loro accostamento verso il vero valore di $\sqrt[m]{P}$ il numero $\frac{1}{10^{n+l-6}}$ (V. prec. 2.°) avrebbero ad esso, rapporto ai limiti, un'approssimazione 100 volte minore; e così in progresso.

IV. Gli accidenti considerati ne' (prec. 1.°, 2.°, 3.°) relativamente alle quantità T, t, s, V, possono succedere ancora rapporto alle T_1, t', s', V_1, alle T_2, t'', s'', V_2 ec. (N.ⁱ 23, 25); ma siccome le conseguenze, che proverrebbero in questi ultimi casi, sono pienamente le stesse, che quelle le quali provengono nel caso primo, e che abbiamo nei citati (prec. 1.°, 2.°, 3.°, 4.°) già esposte; quindi tralascieremo di farne ulteriore parola, e rifletteremo soltanto, che per quanto si è detto nei (N.ⁱ 21., 10.° N.° 22, N.° 23, N.° 25), l'accidente del (prec. 3.°) è sempre più difficile a succedere, quanto più si procede avanti nella determinazione delle quantità T, T_1, T_2, T_3, ec.

27. Da quanto si è detto nel prec. (N.° 26) vedesi che la mancanza delle condizioni supposte nei (N.^{i} 23, 25) altro in fine mai non produce, che rendere o il residuo della prima divisione, cioè t' di una sola cifra, od uno degli altri t'', t''', $t^{'v}$, ec. t^x di una oppure due cifre, o qualunque dei terzi $t^{x'}$, $t^{x''}$, $t^{x'''}$, ec. t^c di un numero di cifre non > 3; ec. (1.°, 2.°, 3.° N.° 26): ma in tutti questi casi, cioè tanto quando t' non è che di una cifra, come quando uno dei t'', t''', $t^{'v}$, ec. t^x è soltanto di una, o due cifre; come quando il numero delle cifre componenti uno dei $t^{x'}$, $t^{x''}$, $t^{x'''}$, ec. t^c non supera il 3, ec., abbiamo nel cit. (N.° 26) veduto, come debbasi regolare, onde accostarsi quanto è mai possibile, col numero de' decimali determinato, al vero valore di $\sqrt[m]{P}$. Dunque nell'eseguire attualmente il metodo di abbreviamento de' (N.^{i} 4, 23, 25) non dovremo, che osservare il numero delle cifre, che forma ciascuno de' residui t', t'', t''', ec.; se questo numero fino esclusivamente all'avanzo $t^{x'}$ trovasi > 2, dovremo sempre seguire la regola dei (N.^{i} 23, 25, I. 4); ma se il numero medesimo in t' si vede $= 1$, oppure in qualunque degli altri t'', t''', $t^{'v}$, ec. risulta $= 1$, oppure $= 2$; allora dovremo determinare il valore richiesto giusta le regole del (II. N.° 4) e ciò per quanto si è detto nei (1.°, I, II, ec. IV. 2.°; I, II, ec. IV. 3.°, N. 26). Che se progredendo la determinazione dei successivi quozienti q, q_1, q_2, ec. oltre il q_9, si truovi, che qualcuno dei corrispondenti residui $t^{x'}$, $t^{x''}$, $t^{x'''}$, ec. sia formato di tre cifre, allora conviene arrestarsi, e per la determinazione del richiesto valore approssimantesi al vero valore della radice, conviene seguire la regola del (V. 2.° N. 26), diventando allora il limite di approssimazione $= \frac{1}{10^{n+l-6}}$. Se poi si volesse proseguire avanti, determinando i quoti q_{99}, q_{100}, ec.; allora, mentre si trovasse uno dei residui t^c, $t^{c'}$, $t^{c''}$, ec. fornito di un numero di cifre non > 4, bisognerebbe fermarsi, e seguitando in-

nanzi le regole, e i raziocinj dei (2.°, 3.° N.° 26) troverebbesi nel caso del numero delle cifre $=4$ un risultato, il cui limite di approssimazione al valor vero della radice sarebbe $=\frac{1}{10^{n+l-7}}$; e così di seguito. Ma questi ultimi casi non sono che di pura speculazione, perchè mai estendesi in pratica l'approssimazione ad un grado così alto. Riflettasi però, in conseguenza di quanto si è ora detto, che quando la determinazione dei quozienti si prolunga oltre il q_9, allora non può più supporsi di estendere come nel (I. N.° 4) le divisioni, finchè nel dividendo non rimangono che due cifre; perchè la determinazione sicura de' successivi quoti q_{10}, q_{11}, q_{12}, ec. esige che nel dividendo esista un numero di cifre >2 (V. 2.° N.° 26).

ERRORI CONTENUTI IN QUESTA PRIMA PARTE (*)

Pagina	*Linea*	*Errori*	*Correzioni*
3	22	quello	quella
10	27	in cui cioè	in cui
12	3	Poscal	Pascal
19	18	col	al
—	29	lunghezza	larghezza
22	2	premono	premano
33	7	masso	massa
34	24	encharier	en charier
43	*nota* 2 *lin.* 3	in luogo	in un luogo
48	23	esso	essa
56	16, 17	verranno . . . accresceranno	vengono . . . accrescono
—	23	diviso	è diviso
57	16	*f*	F
—	18	di	si
—	19	*e*	E
59	2	formarla	fermarla
—	7	superiore	posteriore
62	9	*cq*	*cg*
63	5	AQ	AG
66	13	AQ	AE
—	19	di rette	dirette
67	9	D'*m* sarà	D'*m* : sarà

(*) Il Correttore, benchè conosca non aver da incolparsi d'incuria nella revision della stampa dei Manoscritti, dove, per difetto degli Amanuensi, trovansi alcune delle inesattezze, ora rettificate, e dove mancano certe aggiunte, che adesso vengono inserite dai respettivi Autori, ha chiesto ed ottenuto da questi la Nota completa degli Errori occorsi, onde pienamente corretta comparisca l'edizione di questo Tomo.

Pagina	*Linea*	*Errori*	*Correzioni*
68	21	$\surd[\mathrm{C}d_{x+n}-(\mathrm{P})^2$	$\surd[(d_{x+n}-\mathrm{CP})^2]$
69	21	e col	e del
82	24	$-\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3}$	$-\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3}$
83	4	$n\,\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}$	$n\,\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}$
—	—	$-n^2\,\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}$	$-\frac{n^2}{2}\,\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}$
94	4	$\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}\right)$	$\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial s}\right)$
116	5	S' aggiunga il *Corollario* seguente	

Chiamando M la superficie corrispondente alla data D e distante da essa per l' intervallo $\frac{n}{2}$, si avrà per la proposizione antecedente $\left(\frac{\partial^2 \mathrm{D}}{\partial c \partial \mathrm{C}}\right)=1$, $\left(\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial c \partial \mathrm{C}}\right)=1+\frac{n}{2r}+\frac{n}{2\mathrm{R}}+\frac{n^2}{4r\mathrm{R}}$, e $\left(\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial c \partial \mathrm{C}}\right)=1+\frac{n}{r}+\frac{n}{\mathrm{R}}+\frac{n^2}{r\mathrm{R}}$, come sopra; cioè $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{D}}{\partial c \partial \mathrm{C}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial c \partial \mathrm{C}}\right)+2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial c \partial \mathrm{C}}\right)=3+\frac{3n}{2r}+\frac{3n}{2\mathrm{R}}+\frac{n^2}{r\mathrm{R}}$; e perciò $\frac{n}{3}\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\mathrm{D}+\mathrm{Q}}{2}+2\mathrm{M}\right)}{\partial c \partial \mathrm{C}}\right)=n+\frac{n^2}{2r}+\frac{n^2}{2\mathrm{R}}+\frac{n^3}{3r\mathrm{R}}$. Ma il secondo membro di questa equazione è lo stesso valore di $\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial c \partial \mathrm{C}}\right)$; adunque $\mathrm{V}=\frac{n}{3}\left(\frac{\mathrm{D}+\mathrm{Q}}{2}+2\mathrm{M}\right)$. Vale a dire, il volume compreso tra due superficie parallele è uguale ad un terzo della loro distanza, moltiplicata per la metà della somma delle medesime superficie insieme al doppio della superficie parallela e corrispondente anch' essa alla data, e condotta alla metà della loro distanza. Risultamento affatto simile al Teorema di *Torricelli* accennato nel Corollario quarto della proposizione quarta di questa Memoria.

PAGINA	LINEA	ERRORI	CORREZIONI
127	25	$\frac{e}{n}(p+z)$	$\frac{e}{n}(p+x)$
129	5	dal prezzo $p+z$	dal prezzo p al prezzo $p+z$
—	22	$qp+\frac{e}{n}(P+A)$	$qp+\frac{e}{n}(P+A)Q$
130	18, 21, 23	$\frac{e}{n}(P+A)$	$\frac{e}{n}(P+A)Q$
131	3	$\frac{e}{n}(P+A)$	$\frac{e}{n}(P+A)Q$
—	4	capitale e guadagno	capitale a guadagno
—	20	$\frac{e}{n}(P+A)$	$\frac{e}{n}(P+A)Q$
135	5	$p+x'$	$p+p'$
136	22	$Kp'(p'+z')$	$Kz'(p+z)$
140	2, 3	$\frac{e}{n}(P+A)$	$\frac{e}{n}(P+A)Q.$
—	12	$p=45$	$p'=45$
—	17	$q'(p+z)$	$q'(p'+z')$
—	18	$q'(p'+z')$	$q(p+z)$
—	22	$Kz'' \ldots . Kp''$	$Hz'' \ldots . Hp''$
143	4	$\frac{p'+z'}{p}$	$\frac{p'+z'}{p'}$
—	8	$p(p''+z'')$	$p'(p''+z'')$
148	13	$PQ+GPQ$	$PQ+\frac{G}{100}PQ$
149	11	$5-25$	5×25
—	16	$\frac{\frac{0}{3}}{6}=\frac{25}{3}$	$\frac{\frac{5}{3}}{5}=\frac{25}{3}$
152	1	$\frac{p}{z}\Bigl(\frac{t}{T}Q-\frac{G}{100}\Bigl(P-$ $\frac{e}{n}(P+A)Q$	$\frac{p}{z}\Bigl(\frac{t}{T}-\frac{G}{100}\Bigr)\Bigl(P-\frac{e}{n}$ $(P+A)\Bigr)Q$

Alle pagine 155, 156, 162, 167, 221 ove leggesi δ deve intendersi il segno ∂ indicativo la ciffra differenziale.

Alle pagine 170, 171, 177, 178, 187, 188 ove si trovano nomi proprj coll'iniziale S dev'essere letto il nome coll'iniziale G.

Alle pagine 156, 199, 200, 201, 205, 206 ove leggesi v e v' deve leggersi V, V'

Pagina	*Linea*	*Errori*	*Correzioni*
154	17	y l'ascissa	x l'ascissa
—	18	x l'altra	y l'altra
155	29	-3	$-\frac{3}{2}$
156	10	della	dalla
—	23	$\frac{h''}{\delta}$	$\frac{h''}{\delta''}$
163	3	$\frac{}{1-n}$	$\frac{}{1-s}$
164	7	v	o
166	21	v	o
172	26	*Offmann*	*Oltmanns*
177	12	*dos avsmenen*	*dos ausnehmen*
185	15	b1	bc
197	15	*Monütliche...Elfter*	*Monäthliche...Eifter*
206	14	fisici	fissi
216	1	e del	e dal
218	7	k	k^2
223	4	ascivo lare	a scivolare
225	§ 2. lin. 1	(*Fig.*ª 1.ª)	(*Fig.*ª 2.ª)
232	9	NN	MN
233	§ 11 lin. 4	del § 3	del § 3 e 4
236	5	$B\beta = 0,50P$	$B\beta = 0,050P$
242	9	possibile	possibile : perchè (num. III) si può prendere $a : a' :: P' : Q'$.
244	23	1, 2, 4, 6, ec.	1, 2, 3, 4, 6, ec.
247	4	(I)	(1)

Pagina	*Linea*	*Errori*	*Correzioni*
247	*nota* lin. 6	$(276-15a^2)u$	$(27b-15a^2)u$
248	10	$x^2-px\pm q=0$	$x^3-px\pm q=0$
—	26	$\frac{1}{2}\sqrt{t'}$ purchè ... dispari	$\frac{1}{2}\sqrt{t'}$
249	§ 6. lin. 5	$\sqrt{b}=\mathrm{N}(3y^2+t\sqrt{t})$	$\sqrt{b}=\mathrm{N}(3y^2+t)\sqrt{t}$
—	10	per m	per n
250	18	$\sqrt[3]{}+(a\sqrt{b})$	$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$
260	6	$\mathrm{F}^3+(p+2\mathrm{I})\mathrm{F}$	$\mathrm{F}^3+(p-2\mathrm{I})\mathrm{F}$
262	9	$\mathrm{K}\psi=\psi$	$\mathrm{K}\psi=\psi'$
—	27	$\varphi+\mathrm{B}\psi=-\mathrm{A}\omega^2$	$\varphi^2+\mathrm{B}\psi^2=-\mathrm{A}\omega^2$
263	8	$\left(\frac{a^2-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)\psi$	$\left(\frac{a^2-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)\psi^2$
264	3 e 4	cioè $\frac{a^2-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ non sarebbe divisibile per A che è $>\mathrm{B}$	*si levi*
268	17	$\frac{\mathrm{Z}^2-\mathrm{R}}{\mathrm{Q}'\lambda'^2}$	$\frac{\varepsilon'^2-\mathrm{R}}{\mathrm{Q}'\lambda'^2}$
274	29	$\frac{3^2p^3-q^2}{3}$	$\frac{3^2p^3-q^2}{3^3}$
279	25	accidenti	accidentali
286	21	$\mathrm{Q}\left[\mathrm{D}-\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{Q}}\left(\mathrm{B}-\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{Q}}\right)\right]$	$\mathrm{Q}\left[\mathrm{D}-\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{Q}}\left(\mathrm{B}-\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{Q}}\right)\right]^2$
307	33	cercando	recando
316	2	$l(1-dz)$	$l(1-az)$
317	14	z'^2	z'^n
320	13	$(-3\gamma')$	$(-3\gamma'^3)$
321	2	$-\frac{2\mathrm{B}3}{\mathrm{D}^3}$	$-\frac{2\mathrm{B}^3}{\mathrm{D}^3}$
—	6	$-3\mathrm{AQK}$	$-3\mathrm{AQR}$
340	4 e 5	osservate	riferite
342	13	20°	22°
343	3	$5'',0$	$3'',0$
—	24	$9^{\circ}.1'.7'',0\mathrm{B}$	$9^{\circ}\,1'7'',9\mathrm{B}$

Pagina	*Linea*	*Errori*	*Correzioni*
374	30	zero	zeri
375	18	12016	12096
377	15	390 ec. 99432003	35, 490, 3430, 12005, 13059
378	5	3920	3925
379	9	tolgo	tolgo le ultime otto dal numero secondo
—	17	606	606, operando sempre nella maniera medesima, taglio dal divisore l'altro 9, divido per 320 il 606,
386	31	per esempio A la	per esempio la
395	18	$(10^2a+10b), \frac{m(m-1)}{2}$ (10^2a+10b)	$m(10^2a+b), \frac{m(m-1)}{2}$ $(10^2a+b)^2$
397	18	di Metodo	dei Metodi
415	29	entra	entro
416	21	$l>s$	$l>5$
418	5	$\frac{10^m V}{T^2}$	$\frac{10^m V}{T_2}$
—	6, 8	$l>s$	$l>5$
420	ult.	ζ	ξ
422	23	$(+$	$+($
—	ult.	$10^{l-5}+10^{l-6}g_1+10^{l-7}{}_2$	$10^{l-5}g+10^{l-6}g_1+10^{l-7}g_2$
425	20	$\frac{1}{10^{2+l-5}}$	$\frac{1}{10^{n+l-5}}$
427	17	poichè	poi, che

Nella Memoria Bonati inserita nel Tomo XV della Società Italiana delle Scienze occorsero i seguenti errori

alla pag. 233 lin. 24

invece di . . . la formola diviene $a+\frac{ab}{y}=2a$

si dica . . . la formola $a+\frac{ab}{y}$ diviene $=2a$

alla pag. 238 lin. 25

invece di . . . $2ay^2\,\frac{(y-b)}{2by-b^2}$, che è . . .

si dica . . . . $2ay^2\,\frac{(y-b)}{2by-b^2}$ al quarto termine proporzionale

$$2ay\,\frac{(y-b)}{\sqrt{2by-b^2}}, \text{ che è } \ldots.$$

alla pag. 247 lin. 4
invece di . . . scorrere un minuto . . .
si dica . . . . . scorrere in un minuto . . . .

alla pag. 248 lin. 4
invece di . . . diametro $4\frac{3}{4}$
si dica . . . . . diametro di linee $4\frac{3}{4}$

INDICE

DE' PRIMI QUINDICI TOMI

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE.

INDICE
DEGLI ARGOMENTI

TRATTATI

NE' PRIMI QUINDICI TOMI

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

E DEL NOME DEGLI AUTORI DELLE MEMORIE

COMPILATO

DA OTTAVIO CAGNOLI

VICE-SEGRETARIO AMMINISTRATORE DELLA STESSA.

VERONA
DALLA TIPOGRAFIA DI LUIGI MAINARDI
1812.

ARGOMENTI

TRATTATI NEI PRIMI QUINDICI TOMI DELLE MEMORIE DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

Il numero romano indica il Tomo, l'arabo la pagina, l'asterisco gli Autori non Socj, il P. la Parte del Tomo.

A

Abiesino; Elatena o Abiesino, bevanda vinosa. *Giovanni Fabbroni*. XII. 195. P. II.
Acqua; *scomposizione*. Lettera di *Felice Fontana*. V. 581.
Acque. Saggio d'una nuova teorìa del movimento delle acque pei fiumi. *Teodoro Bonati*. II. 676.
—— Nuovo metodo per trovar colla sperienza la quantità dell'acqua corrente per un fiume. *Teodoro Bonati*. Ivi.
—— Della figura del Gorgo, che la natura forma in un vaso cilindrico ripieno d'acqua, nel centro del cui fondo sia aperto un foro circolare. *Giordano Riccati*. III. 238.
—— Del misurar l'acqua che esce dalle cateratte con moto libero. *Anton Mario Lorgna*. V. 313.
—— con moto perturbato. V. 330.
—— Cateratta idrometrica. *Lorgna*. V. 397.
—— Della velocità dell'acqua per un foro nel fondo d'un vaso, che abbia uno o più diafragmi: e della velocità pure dell'acqua per un tubo verticale cilindrico o divergente annesso a un foro nel fondo di un vase semplice: e del soffio che si procura nelle fornaci di alcune ferriere col mezzo dell'acqua. *Bonati*. V. 501.
—— Legge inseparabile dal principio fondamentale del *Castelli* intorno al moto e alla misura dell'acque correnti. *Lorgna*. VI. 218.
—— Sopra la costruzione delle Chiuse per la derivazione de'canali regolati. *Bernardino Ferrari*. VII. 157.
—— Esame e rettificazione de'difetti e paralogismi che s'incontrano in tutte le dimostrazioni del teorema fondamentale d'Idraulica. *Gregorio Fontana*. VIII. 184.
—— Dell'aste Ritrometriche, e di un nuovo Pendolo per trovare la Scala delle velocità d'un'acqua corrente. *Bonati*. VIII. 435.
—— Difesa e conferma della comune misura della velocità dei fluidi uscenti per i fori dei vasi. *Pietro Zuliani* *. VIII. 533.
—— Della resistenza e dell'urto dei fluidi. *Vittorio Fossombroni*. IX. 535.
—— Della fermezza e resistenza de'canali contro lo sforzo dell'acqua. *Gregorio Fontana*. IX. 632.
—— Della pressione dell'acqua in moto contro i vasi e tubi, pe' quali scorre. *Del medesimo*. IX. 656.
—— Sulla miglior forma da darsi ai ripari, che si costruiscono ne'fiumi. *Antonio Lombardi* *. X. 640.
—— Sulle acque minerali della provincia bergamasca. Di *Giovanni Maironi Daponte*. XI. 285.
—— Sul metodo di determinare il centro di pressione nelle cateratte, ovvero parature di figura circolare ed elittica. *Girolamo Saladini*. XI. 147.
—— Osservazioni sull'azione dell'acqua idro-solforata, e dell'acido solforoso su di alcuni colori vegetabili. *Bartolomeo Barani* *. XI. 241.
—— Osservazioni sulle resistenze dell'acqua e dell'aria. *Paolo Delanges*. XIII. 161.
—— Tentativi per investigare la celerità dell'acque correnti. *Francesco Focacci* *. XIII. 390.
—— Ricerche per conoscere i rapporti delle velocità dell'acque in andamenti sui quali s'incontrino differenti attriti. *Del medesimo*. XV. 320.
—— *Vedi* Tubi addizionali; Tubi.
Adriatico. Congetture su d'un antico sbocco dell'Adriatico per la Daunia fino al seno Tarantino. *Luca de Samuele Cagnazzi* *. XIII. 189. P. II.
Aereostatica. *Vedi* Macchine.
Ago magnetico. Congetture sulle cagioni delle diverse variazioni dell'ago magnetico dal Nord. *Vincenzo Chiminello*. XI. 193.
Alberi. Sopra la caduta delle foglie degli alberi nell'autunno. *Giuseppe Maria Giovene*. XIII. 161. P. II.
—— Osservazioni sopra quegli alberi, che si caricano di frutta senza semi, cioè del solo pericarpio, e sui giacinti che si mettono a vegetare nelle caraffe piene di acqua. *Filippo Re*. XIV. 136. P. II.
Algebra. Intorno alla moltiplicazione ed alla divisione algebraiche. *Leonardo Salimbeni*. VII. 482.
Altezze. *Vedi* Barometro.
Alluvioni. Sopra la distribuzione delle Alluvioni. *Vittorio Fossombroni*. IX. 585.
Analisi. Su diversi articoli spettanti all'analisi. *Pietro Franchini* *. XI. 254.
—— Nuovi metodi tendenti a perfezionare l'analisi algebraica. *Del medesimo*. XII. 160.
—— Di alcune formole che esprimono i tre lati de'triangoli rettilinei rettangoli. *Giuseppe Slop*. XIII. 285.

ANATOMIA. Saggio d'osservazioni anatomiche intorno agli organi della respirazione degli Uccelli. *Michele Girardi*. II. 732.

— Conferma delle medesime. *Vincenzo Malacarne*. IV. 18.

— Osservazione anatomica sopra un vitello-vacca, detto dagl'Inglesi Freemartin. *Antonio Scarpa*. II. 846.

— Osservazioni anatomico-patologiche sugli organi uropoietici. *Vincenzo Malacarne*. III. 102, V. 408.

— Osservazioni e riflessioni intorno alla tunica vaginale del testicolo. *Michele Girardi*. IV. 530.

— Saggio d'osservazioni anatomiche intorno agli organi elettrici della torpedine. *Del medesimo*. III. 553.

— Esposizione anatomica delle parti relative all'encefalo degli uccelli. *Vincenzo Malacarne*. I. 747, II. 237, III. 126, IV. 37, VI. 106, VII. 193, XI. 33.

— Sezione d'un cadavero. *Gianverardo Zeviani*. V. 391. P. II.

— Intorno ad un uomo perfettamente bilingue, e sulla struttura delle parti più interne della lingua. *Jacopo Penada* *. VIII. 26. P. II.

— Questioni anatomiche fisiologiche e chirurgiche. *Vincenzo Malacarne*. VIII. 219. P. II.

— Osservazioni anatomico-patologiche. *Floriano Caldani*. XII. 1. P. II.

— Osservazioni anatomiche circa all'origine de' mostri. *Vincenzo Malacarne*. XII. 164. P. II.

— *Vedi* Encefalotomia; cuore.

ANGINA PECTORIS; *Vedi* Stenocardia.

ANIMALI *riproduzioni*. Ricerche intorno alcune riproduzioni che si operano negli animali
{ così detti a sangue caldo, e nell'uomo. *Giuseppe Baronio* *. IV. 480.
{ così detti a sangue freddo. IX. 385.

ANIMALI FOSSILI. Sugli animali fossili. *Ermenegildo Pini*. XII. 210. P. II.

ANNALI. Annali della Società Italiana delle Scienze. *Pompilio Pozzetti*. IX (I), X. 1, XI. xv, XII. xvi, XIII. xvi.

— Continuazione degli Annali della Società Italiana per *Ottavio Cagnoli*. XIV (1), XV (15).

ANNO *francese*. Spiegazione popolare della maniera, colla quale si regola l'anno sestile o intercalare, ed il cominciamento dell'anno republicano. *Lorenzo Mascheroni*. IX. 321.

ANNO *tropico solare*. Della misura dell'anno tropico solare. *Giuseppe Piazzi*. XIII. 1.

ANTIQUARIA. Osservazioni fatte presso Stabio, nel Cantone Svizzero del Ticino. *Carlo Amoretti*. XV. 117. P. II.

ARCHI. Della vera curva degli archi del ponte a S. Trinità a Firenze. *Pietro Ferroni*. XIV. 8.

ARCHI BALENI. Sopra sei archi-baleni contemporanei e concentrici. *Chiminello*. XIV. 4.

AREOMETRO. Saggio intorno alla rettificazione dell'areometro, e a' differenti suoi usi. *Giambatista da S. Martino*. VII. 79.

ARGANO. Della maggior perfezione dell'Argano. *Leonardo Ximenes*. I. 613.

ARGENTO; *Vedi* Gravità.

ARGONAUTA ARGO. Notizia sull'Argonauta Argo del Linneo. *Giuseppe Maria Giovene*. XIV. 222. P. II.

ARIA. Osservazioni sulla costituzione dell'aria atmosferica. *Carlo Lodovico Morozzo*. VI. 221.

ARIETE *idraulico*. Sull'Ariete Idraulico. *Ermenegildo Pini* e *Giuseppe Racagni*. X. 776.

ARTRITIDE. Saggio dell'efficacia dell'olio d'oliva nell'artritide vaga. *Giannantonio Marino*. III. 406.

ASTRONOMIA. Osservazioni astronomiche. *Antonio Cagnoli*. VI. 369.

— Delle variazioni nella longitudine eliocentrica d'un pianeta, e loro cause. *Giuseppe Slop*. XIII. 336.

— Notizie astronomiche di Germania comunicate all'Italia da *Antonio Cagnoli*. XIV. 234.

— Osservazioni e calcoli di alcune opposizioni de' pianeti superiori. *Giovanni Santini* *. XV. 335.

— *Vedi* Eclittica, Giove, Giunone, Marte, Mercurio, Occultazioni, Pallade, Pianeti, Rotazioni, Sole, Solstizj, Stelle, Toro, Transiti, Venere, Urano.

ATTRAZIONE. Dell'adesione, o attrazione di superficie. *Giovacchino Carradori* *. XI. 75, XII. 89. P. II, XV. 126. P. II.

— Sulla teoria dell'attrazione degli sferoidi elittici. *Giovanni Plana* *. XV. 370.

AURORE *boreali*. Sopra le Aurore boreali locali. *Pierantonio Bondioli*. IX. 422.

AZIONE *irritativa*. Ricerche sull'azione irritativa. *Del medesimo*. XIV. 161. P. II.

B

BALLO *di corda*. Ragionamento Fisico-meccanico sopra i ballerini di corda. *Vincenzo Brunacci*. XV. 104. P. II.

BAROMETRO. Ricerche ed osservazioni fatte per perfezionare il barometro. *Pietro Moscati* e *Marsilio Landriani* *. I. 225.

— Delle altezze barometriche. *Francesco Maria Franceschinis*. V. 294.

— Dei moti del barometro nei temporali. *Giuseppe Toaldo*. VIII. 21.

— Osservazioni elettrico-atmosferiche e barometriche. *Giuseppe Maria Giovene*. VIII. 85. IX. 438.

— Sopra la misura delle altezze col barometro. *Giuseppe Maria Racagni*. XIII. 207.

— Nuova ipotesi per ispiegare la discesa del barometro in tempo piovoso. *Vincenzo Chiminello*. XIII. 140. P. II.

— Indagini per sottomettere a calcolo il barometro nelle diverse sue forme, nelle sue dipendenze, ne' suoi usi. *Pietro Cossali*. XV. 1.

Barometro. Fenomeno de' barometri nel loro scuotimento o trasporto da luogo a luogo. *Vincenzo Chiminello*. XV. 50.

—— Sui barometri luminosi, con appendice dimostrante nel barometro una macchina elettrica singolare. *Pietro Cossali*. XV. 76. P. II.

Biblioteche. *Vedi* Insetti.

—— Sulla maniera di costruir biblioteche. *Giovanni Fabbroni*. XI. 92.

Binomio. Saggio analitico principalmente diretto ad ampliare gli usi di quella formula chiamata il binomio di *Neuton*. *Pietro Ferroni*. IX. 291.

—— Nuove considerazioni su di alcune singolari proprietà de' coefficienti della nota formola del binomio *Neutoniano*. *Giovacchino Pessuti*. XI. 446.

Borace. *Vedi* Sale.

Botanica. Esperienze ed osservazioni sopra la direzione della Plumula e della Radicula nelle semenze, che germogliano. *Giovacchino Carradori* *. X. 138.

—— Istoria di ciò ch'è stato pensato intorno alla fecondazione delle piante. *Pietro Rossi*. VII. 369.

—— Esperienze ed osservazioni sopra le proprietà fisiche dei sughi lattiginosi delle piante nostrali e sopra la loro simiglianza colla gomma o resina elastica. *Giovacchino Carradori* *. XI. 62.

—— Sopra una specie distinta di cipero. *Ottaviano Targioni Tozzetti*. XIII. 333. P. II.

—— *Vedi* Piante.

C

Calcolo *integrale*. Ricerche intorno al calcolo integrale dell'equazioni differenziali finite. *Mario Lorgna*: I. 373, II. 177.

—— Delle formole differenziali, la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle sezioni coniche. *Gianfrancesco Malfatti*. II. 749.

—— Sopra l'integrazione della formola $Q\partial x + Py^2\partial x \pm \partial y = 0$. *Mario Lorgna*. III. 220.

—— Prodromo d'osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale publicato in Parigi da *Condorcet* l'anno 1765. *Pietro Ferroni*. V. 130.

—— Ricerche sopra l'integrazione sviluppata in una serie finita della formula $\frac{(A+Bz)\partial z}{(a^2-3ab)\cos.(\phi+b^2z^2)^p}$, essendo p un numero qualunque intero. *Francesco Pezzi*. IV. 577.

—— Integrazione in serie finite delle formole $\frac{x^{\pm q}\partial x}{(a+bx+cx^2)^p}$, $\frac{x^{\pm q}\partial x}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p}$, $\frac{x^{\pm q}\partial x}{(a+bx+cx^2+fx^3+hx^4)^p}$ essendo p e q numeri qualunque interi. *Del medesimo*. VI. 256.

—— Riflessioni sull'integrazione di quell'equazioni, le quali non soddisfanno alle condizioni d'integrabilità. *Pietro Paoli*. VI. 501.

—— Lettera di *Pietro Ferroni*. VII. 319.

—— Riflessioni sopra l'integrazione dell'equazioni lineari a due variabili. *Sebastiano Canterzani*. VIII. 307.

—— Dell'integrazione dell'equazioni a differenze parziali finite ed infinitesime. *Pietro Paoli*. VIII. 575.

—— Teoria e calcolo di $\int\frac{\partial z}{\log. z}$. *Tommaso Valperga Caluso*. XII. 268.

—— Sull'integrazione d'un nuovo canone d'equazioni differenziali d'ordine alto. *Francesco Cardinali* *. XIII. 381.

—— *Vedi* Analisi, Moltiplicatore.

Calcolo *trascendente*. Considerazioni sopra una maniera diversa da quella, che segue l'Eulero di trarre dal circolo le quantità trascendenti, che allo stesso appartengono, e dimostrazione d'un teorema analitico. *Francesco Pezzi*. V. 417.

Calcoli. Sopra alcuni prodotti singolari dell'animale economia morbosa. *Pietro Moscati*. XIII. 310, 321. P. II.

—— Pensieri sulla varia origine e natura de' corpi calcolosi, che vengono talvolta espulsi dal tubo gastrico. *Pietro Rubini*. XIV. 59. P. II.

Calendario. Saggio di calendario perpetuo delle umane natività ricavato da più registri di anni LX. *Vincenzo Chiminello*. XII. 194.

Calore. Articolo di Lettera. *Felice Fontana*. I. 104.

—— Brevi riflessioni sul calore animale. *Leopoldo Maria Caldani*. XIII. 296. P. II.

Canali. *Vedi* Tubi.

Canchero. Brevi considerazioni intorno a quella crudele malattia, che chiamasi *canchero*. *Del medesimo*. XII. 127. P. II.

Cani *rabbiosi*. Cura felice d'un uomo morso da un cane, certamente rabbioso. *Gianverardo Zeviani*. X. 223.

Cannocchiali. Tentativo per migliorar i cannocchiali acromatici proposti da Eulero. *Barnaba Oriani*. III. 664.

Cantaride. Dell'accoppiamento d'una cantaride con un elatere. *Pietro Rossi*. VIII. 119.

Capillarita'. Teoria dell'azione capillare di *La Place* ridotta alla più semplice ed elementare geometria. *Gioacchino Pessuti*. XIV. 87.

Capra. *Vedi* Parallasse.

Carbonato *di potassa*. Sull'uso del carbonato di potassa nella malattia che affligge le vie urinarie. *Paolo Mascagni*. XI. 635.

Carbone. Sopra il gaz molto ossigenato, che si ottiene dal carbone messo nell'acqua esposto ai raggi del sole, con alcune altre sperienze. *Carlo Lodovico Morozzo*. XI. 331.

Carbonio. Dell'origine del carbonio, ch'entra nelle piante. *Giambatista da S. Martino*. VIII. 1.

—— Esperienze ed osservazioni per dimostrar che le piante assorbiscono il carbonio. *Giovacchino Carradori* *. XI. 313.

Catarro. Sul catarro epidemico. *Gianverardo Zeviani*. XI. 476.

Cecita'. Sopra la cecità temporanea d'un occhio. *Jacopo Penada* *. X. 61.

Cembali. *Vedi* Organi.

Cervello. Le scoperte di *Gall* sul sistema nerveo della spinal midolla e del cervello, esposte da *Biscoff* e ridotte al giusto valore. *Vincenzo Malacarne*. XIV. 1. P. II.

Chimica *nomenclatura*. *Vedi* Mineralogia.

Chinachina. Nuovo uso della chinachina nel vajuolo. *Gianverardo Zeviani*. I. 825.

—— Sull'azione specifica della chinachina sulle vie urinarie. *Pietro Rubini* *. VIII. 665.

—— Sopra una falsa specie di china. *Ottaviano Targioni Tozzetti*. XI. 531.

Chiuse. *Vedi* Acque.

Cicuta. Guarigione mirabile d'un tisico disperato con l'uso della cicuta. *Gianverardo Zeviani*. IV. 278.

Cocco. Nota sopra la storia del cocco tintorio detto volgarmente *Kermes*, o grana da tingere. *Michele Rosa*. VII. 225.

Coclee. Supplemento alla dottrina Torricelliana sopra le coclee. *Pietro Ferroni*. XV. 60.

Colèra. Intorno ad una specie singolare di quella malattia che si chiama *Cholèra morbus*, o semplicemente *Cholèra*. *L. M. A. Caldani*. XII. 204. P. II.

Colori. Congetture intorno alle cagioni del vario colore degli Affricani e di altri popoli, e sulla prima origine di questi. *Del medesimo*. VIII. 445.

—— Nuove osservazioni sulle cagioni del vario colorito negli animali. *Floriano Caldani*. VIII. 458.

—— Indagine fisica sui colori. *Giambattista Venturi*. VIII. 699.

—— Ricerche sulla produzione de' colori immaginarj nell'ombre. *Pietro Petrini* *. XIII. 37. P. II.

—— *Vedi* Sangue.

Colori *vegetabili*. *Vedi* Acque.

Conferve. Delle conferve irritabili e del loro movimento di progressione verso la luce. *Giuseppe Olivi*. VI. 161.

Confinazione. Nuovo metodo per istabilire i confini dei terreni. *Vincenzo Chiminello*. VIII. 473.

Continuita': *legge*. *Vedi* Meccanica.

Corde. Sperienze sulle minuge o corde d'intestini, e sulle funi o corde di canapa. *Bonaventura Corti* *. XI. 642.

Cotone. Della tintura del cotone e filo in rosso colla robbia. *Giannantonio Giobert*. XIII. 363. P. II.

Cristalli. Sui cristalli di Selvino. *Gio. Maironi Daponte*. XV. 291. P. II.

Cuore. Varice singolarissima formata e scoppiata al seno quadrato del cuore con una nuova anatomica dimostrazione delle fibre componenti lo stesso seno quadrato. *Jacopo Penada* *. XI. 545.

—— Malattia straordinaria del cuore con riflessioni patologico-anatomiche. *Del medesimo*. XIII. 67. P. II.

—— D'una straordinaria rottura del cuore. *Valeriano Luigi Brera* *. XIV. 228. P. II.

—— *Vedi* Sangue, Vermi.

Curva. Sopra l'equazione d'una curva ec. *Gregorio Fontana*. II. 123.

D

Denti. Analisi dello smalto d'un dente fossile di elefante, e dei denti umani. *Domenico Morichini* *. XII. 73, 268. P. II.

Derivazioni. Sul calcolo delle derivazioni. *Pietro Paoli*. XIII. 23.

E

Eclittica. Obliquità dell'eclittica osservata nel solstizio 22 Giugno 1803 da *Vincenzo Chiminello*. XI. 181.

—— *Vedi* Obliquità.

Ecclissi. Sull'ecclissi del dì 11 Febbrajo 1804. *Giuseppe Cassella* *. XI. 620.

—— Osservazione dell'ecclissi lunare degli 11 Luglio 1805. *Vincenzo Chiminello*. XII. 318.

—— Descrizione d'una macchina, pel cui mezzo si predice l'avvenimento di qualsivoglia ecclissi del sole e della luna. *Giuseppe Veneziani* *. XIII. 9.

Elatena. *Vedi* Abiesino.

Elefante. Sopra i denti fossili di un elefante trovato nelle vicinanze di Roma. *Lodovico Morozzo*. X. 162.

—— *Vedi* Denti.

Elettricita'. Introduzione a nuovi principj della teoria elettrica dedotti dall'analisi de'fenomeni dell'elettriche punte. *Carlo Barletti*. I. 1, II. 1.
—— Sperienze elettriche sull'acqua e sul ghiaccio. *Antonmaria Vassalli Eandi*. IV. 264.
—— Della supposta eguaglianza di contraria elettricità nelle due opposte facce del vetro, o di uno strato resistente per ispiegare la scarica o scossa della boccia di Leyden. *Del medesimo*. IV. 304, VII. 444.
—— *Vedi* Barometro, Fenomeni.
Elettrometro. Della maniera di far servire l'elettrometro atmosferico portatile all'uso d'un igrometro sensibilissimo. *Alessandro Volta*. V. 551.
—— Descrizione d'un nuovo elettrometro, ed alcune esperienze relative alla carica della colonna Voltiana. *Salvator Dal Negro* *. XI. 623.
Elogio di Giuseppe Torelli. *Ippolito Pindemonti*. II. iii
—— di Ruggero Boscovich. *Angelo Fabbroni*. IV. vii
—— di Leonardo Ximenes. *Luigi Palcani*. V. ix
—— di Anton Mario Lorgna. *Lo stesso*. VIII. i
—— di Giovanni Arduino. *Benedetto Delbene*. VIII. xiv
—— di Giuseppe Toaldo. *Angelo Fabbroni*. VIII. xxix
—— di Michele Girardi. *Luigi Bramieri* *. IX. i
—— di Lazaro Spallanzani. *Angelo Fabbroni*. IX. xxi
—— di Giordano Riccati. *Antonio Pellizzari* *. IX. xlix, X. xxvii
—— di Giambattista di Sanmartino. *Ippolito Pindemonti*. IX. lxxi
—— di Giuseppe Olivi. *Pompilio Pozzetti*. IX. lxxxxi
—— di Lorenzo Mascheroni *Ferdinando Landi*. XI. xxxviii
—— di Alberto Fortis. *Carlo Amoretti*. XIV. xvii
—— di Pierantonio Bondioli. *Mario Pieri* *. XV. i
—— di Gianfrancesco Malfatti. *Giuseppe Venturoli*. XV. xxvi
—— di Gianverardo Zeviani. *Antonio Guarienti* *. XV. xxxvii
—— di Carlo Lodovico Morozzo. *Prospero Balbo*. XV. lxv
Encefalotomia. Saggio di splancnografia ed encefalotomia della foca. *Vincenzo Malacarne* XII. 39. P. II.
Epilessia. Sull'epilessia e suo rimedio. *Gianverardo Zeviani*. XII. 179. P. II.
Equazioni. Sull'equazioni a differenze finite e parziali. *Pietro Paoli*. II. 787, IV. 455, X. 249.
—— Sulla misteriosa Alembertiana equazione $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$. *Pietro Cossali*. IX. 231.
—— Della soluzione dell'equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto. *Paolo Ruffini*. IX. 444.
—— Lettera di *Pietro Abbati* *. X. 385.
—— Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto. *Paolo Ruffini*. X. 410.
—— Lettera di *Sebastiano Canterzani*. XI. 173.
—— Metodo per trovare le radici numeriche d'ogni equazione. *Giuseppe Cassella* *. XI. 203.
—— Dubbj proposti al Socio Ruffini sulla sua dimostrazione dell'impossibilità di risolvere le equazioni superiori al quarto grado. *Gianfrancesco Malfatti*. XI. 579.
—— Risposta al Socio Gianfrancesco Malfatti. *Paolo Ruffini*. XII. 213.
—— Riflessioni intorno al metodo proposto dal consocio Malfatti per la soluzione delle equazioni di quinto grado. *Del medesimo*. XII. 321.
—— Sopra un metodo d'approssimazione proposto senza dimostrazione da Simpson per la risoluzione numerica d'ogni specie d'equazioni. *Giovacchino Pessuti*. XIII. 193.
—— Nuovi teoremi sulla possibilità dell'equazione $x^2-Ay^2=\pm 1$, e ricerca del numero de'termini del periodo della radice quadra d'un numero non quadrato, sviluppata in frazione continua. *Francesco Pezzi*. XIII. 342.
—— Sopra le soluzioni particolari delle equazioni alle differenze. *Vincenzo Brunacci*. XIV. 175.
—— *Vedi* Frazioni, Radici.
Equilibrio. Esposizione del vero principio dimostrativo dell'equilibrio. *Ermenegildo Pino*. XIV. 56.
Ermafroditi. Lettera di *L. M. A. Caldani*. VII. 130.
—— Esempj della dimetria-dihysteria, della pseudhermaphroditia-pseudaeschia, e della genometabole. *Vincenzo Malacarne*. IX. 104.
Esofago. Sull'esofago, sulle intestina e sopra alcune valvole del tubo alimentare. *Del medesimo*. X. 1.

F

Febbri. Sull'attività della dattisca cannabina del Linneo contro le febbri intermittenti. *Pietro Rubini* *. VII. 431.
Fenomeni. Fenomeno di alcune vampe di caldo in mezzo al freddo. *Giuseppe Toaldo*. VI. 85.
—— Riflessioni intorno alla causa di un fenomeno elettrico. *Giambatista da Sanmartino*. VI. 170.
—— Relazione d'un arco luminoso osservato ai 5 Settembre 1788. *Vincenzo Chiminello*. VII. 153.

Fenomeni. Sopra una doppia iride a rovescio e a contatto. *Del medesimo*. X. 146.
—— *Vedi* Fosfori.
Ferriere. *Vedi* Acque.
Fiamma. Articolo di lettera di *Felice Fontana*. I. 104.
Filo. *Vedi* Cotone.
Fisica. Lettera sopra argomenti fisici e chimici. *Felice Fontana*. I. 648.
—— Osservazioni fisiche istituite nell'isola di Citera, oggidì detta Cerigo. *Lazzaro Spallanzani*. III. 439.
Fiumi. *Vedi* Acque.
Flogisto. Articolo di Lettera di *Felice Fontana*. I. 104.
Flora. Prospetto per la Flora economica Fiorentina. *Ottaviano Targioni Tozzetti*. XIV. 185. P. II.
Fluidi. Sopra la pressione de' fluidi. *Gregorio Fontana*. II. 142.
—— Osservazioni sopra varj effetti della pressione de' fluidi. *Simone Stratico*. V. 525.
—— Risultati d'esperienze sopra l'elasticità de' fluidi aeriformi permanenti sul mercurio. *Felice Fontana*. I. 83.
—— *Vedi* Acque, Liquidi.
Fluidita'. Principj generali della solidità e fluidità de' corpi. *Felice Fontana*. I. 89.
Fontane. *Vedi* Fuochi.
Formula *cardanica*. Dell'irriducibilità della formula Cardanica a forma finita algebraica e libera da aspetto immaginario. *Lorgna*. I. 707.
Fornaci. *Vedi* Acque.
Foruncoli. Breve descrizione d'una malattia della pelle umana, che regnò epidemica in Padova nel 1807. *L. M. A. Caldani*. XIV. 174. P. II.
Forze. Sopra un grave error di taluno nella risoluzione delle forze. *Gregorio Fontana*. III. 521.
—— Sopra la forza centrifuga. *Del medesimo*. II. 325.
—— Sopra la misura delle forze muscolari. *Vittorio Fossombroni*. XIII. 366.
—— Nuovo rapporto tra la teoria del centro di gravità e quella della composizione delle forze. *Antonio Bordoni* *. XV. 301.
—— *Vedi* Moto.
Frattura. *Vedi* Funghi.
Frazioni. Sopra la legge di trasformazione di una frazione continua indefinita qualunque in una frazione volgare, e sopra la più semplice risoluzione delle equazioni indeterminate del primo grado. *Francesco Pezzi*. XI. 410.
Freddo. Dell'anomalo freddo dell'inverno 1808 e delle sue cause. *Vincenzo Chiminello*. XIV. 79.
Fosfori. Sopra alcuni fenomeni de' fosfori Bolognesi ne' differenti aeriformi. *Lodovico Morozzo*. III. 420.
—— Sopra le meduse fosforiche. *Lazzaro Spallanzani*. VII. 271.
Fossili. Lettera relativa a diversi oggetti fossili e montani. *Lazzaro Spallanzani*. II. 861.
—— Osservazioni sui feldspati ed altri fossili singolari dell'Italia. *Ermenegildo Pini*. III. 688.
Funghi. Sopra il veleno dei funghi. *Gianverardo Zeviani*. III. 465.
—— Sopra alcuni funghi ritrovati nell'apparecchio d'una frattura complicata d'una gamba umana. *Ottaviano Targioni Tozzetti*. XIII. 15. P. II.
—— Delle specie nuove di funghi ritrovate nei contorni di Firenze e non registrate nel *Systema Naturæ* di Linneo. *Giuseppe Raddi* *. 345. P. II.
Funi. Sulla tensione delle funi. *Pietro Cossali*. X. 285.
—— *Vedi* Corde.
Fuochi. Sopra i fuochi dei terreni e delle fontane ardenti in generale, e sopra quelli di Pietramala in particolare. *Alessandro Volta*. II. 562.
Funzioni. Sul calcolo delle funzioni razionali delle radici di una data equazione qualunque algebraica determinata, dotate della forma $F(x', x'', x''' \ldots\ldots x^{(m)})$. *Pietro Abbati* *. XII. 7.
—— Alcune proprietà generali delle funzioni. *Paolo Ruffini*. XIII. 292.
—— Sul paragone del calcolo delle funzioni derivate coi metodi anteriori. *Tommaso Valperga-Caluso*. XIV. 201.

G

Galvanismo. Saggio sopra il fluido galvanico. *A. M. Vassalli Eandi*. X. 733.
—— Lettera. *Del medesimo*. X. 802.
—— Esperienze Galvaniche sul potere del solo arco animale nelle contrazioni musculari. *Gio. Aldini*. XIV. 329. P. II.
Gemelle. Istoria anatomica di due gemelle mostruose. *Filippo Uccelli* *. XI. 123. P. II.
Geografia. Della più esatta costruzione delle carte geografiche. *Antonio Cagnoli*. VIII. 658.
Geologia. Viaggio geologico per diverse parti meridionali dell'Italia. *Ermenegildo Pini*. IX. 118. P. II.
—— Sopra una terra vulcanica scoperta nella Provincia Bergamasca. *Gio. Maironi Daponte*. IX. 335. P. II.
—— Lettera. *Del medesimo*. IX. 699. P. II.
—— Osservazioni geologiche sulla montagna Barbellino nel Dipartimento del Serio. *Del medesimo*. XIV. 282. P. II.

GEOLOGIA. Notizie geologiche e meteorologiche di Terra d'Otranto nel Regno di Napoli. *Giuseppe Maria Giovene*. XV. 274. P. II.

— *Vedi* Animali fossili.

GEOMETRIA. Soluzione generale d'un problema geometrico. *Gianfrancesco Malfatti*. IV. 201.

— Pensieri geometrici. *Pietro Ferroni*. X. 649.

— Fra i triangoli equilateri, i quadrati e il circolo, che si possono inscrivere in un dato triangolo, sceglier la figura dell'aja massima. *Francesco Malfatti*. XIII. 247.

GIGANTI. Saggio di riflessioni sull'istoria e la natura de' giganti. *Gaetano D'Ancora* *. VI. 371.

GIOVE. Opposizioni di Giove osservate da *Vincenzo Chiminello*. XII. 72.

— Occultazione di Giove osservata *dal medesimo*. XIV. 199.

— Opposizione di Giove osservata in Pisa da *Giuseppe Piazzini* *. XV. 282.

GIUMARRI. Sulla pretesa esistenza di alcuni quadrupedi detti *Giumarri* o *Giumerri*. *L. M. A. Caldani*. X. 205.

GIUNONE. Osservazioni ed elementi del pianeta Giunone. *Giuseppe Slop*. XII. 37.

GONORREA. Sulla gonorrea nel sonno, e suo rimedio. *Gianverardo Zeviani*. XIII. 153. P. II.

GORGO. *Vedi* Acque.

GRAVIDANZA. Istoria d'una gravidanza estrauterina, che si ritrovò in un cadavere con alcune osservazioni intorno alla continuazione dei minimi vasi sanguigni arteriosi coi venosi nell'utero e nelle secondine. *Paolo Mascagni*. XV. 248. P. II.

— *Quinquenne*. *Vedi* Mostro.

GRAVITA'. Sopra la discesa de' gravi per la convessità de' canali curvilinei. *Gregorio Fontana*. I. 174.

— Determinazione del tempo che impiega un grave discendente per un canale circolare. *Gianfrancesco Malfatti*. VII. 402.

— Sopra alcune particolarità concernenti la gravità terrestre. *Gregorio Fontana*. VIII. 124.

— Circa la deviazione de' gravi liberamente cadenti. *Girolamo Saladini*. IX. 352, XII. 292.

— Sull'esperimento Poleniano della caduta de' gravi in materie cedevoli. *Angelo Zendrini* *. XIII. 242.

— Se la gravità specifica degli ori e degli argenti allegati semplicemente in combinazioni binarie possa servire a determinare il valore. *Gio. Fabbroni*. XIII. 256. P. II.

— Nuovo rapporto tra la teoria del centro di gravità e quella della composizione delle forze. *Antonio Bordoni* *. XV. 301.

I

IDRAULICA. Alcune riflessioni critiche sui nuovi principj d'idraulica di M. Bernard. *Teodoro Bonati*. XV. 226.

— *Vedi* Acque.

IDROFOBIA. Cura felice d'un uomo morso da un cane certamente rabbioso. *Gianverardo Zeviani*. X. 223.

IDROMETRIA. *Vedi* Patomologia, Pendolo.

IDROPISIA. Sopra due idropici fortunatamente guariti per una caduta dall'alto. *Gianverardo Zeviani*. IX. 274.

IGROMETRO. *Vedi* Elettrometro.

IMMAGINARJ. *Vedi* Logaritmi, quantità.

INSETTI. Pensieri sopra un particolare insetto nocivo ai libri, ed alle carte; e sopra i mezzi da usarsi per liberarne le biblioteche. *Pompilio Pozzetti*. XIV. 92. P. II.

— Descrizione ed uso della cocciniglia dell'ulivo. *Giuseppe Maria Giovene*. XIV. 128. P. II.

INSETTOLOGIA. Osservazioni insettologiche. *Pietro Rossi*. IV. 122.

— Osservazioni sopra la trasformazione d'un insetto. *Floriano Caldani*. VII. 305.

INTESTINI. *Vedi* Esofago.

IPERBOLOIDI. Sopra un errore che si commette da molti nell'assegnare la misura delle iperboloidi. *Gregorio Fontana*. III. 507.

IRIDE. *Vedi* Fenomeni.

IRRITABILITA' *dei vegetabili*. Sperienze ed osservazioni sopra l'irritabilità della lattuga, con delle riflessioni generali sull'irritabilità de' vegetabili. *Giovacchino Carradori* *. XII. 30. P. II.

L

LATITUDINE. Della latitudine e delle refrazioni di Parigi e di Verona, e dell'obliquità dell'eclittica. *Antonio Cagnoli*. V. 259.

— Sulla formola di Douwes per ritrovare in mare la latitudine con due altezze del sole, prese fuori del Meridiano del fu *Giuseppe Cassella* *. XV. 254.

LATTUGA. *Vedi* Irritabilità.

LIBRI. Sulla maniera di preservare e di ristaurare i libri danneggiati, e di costruir biblioteche. *Giovanni Fabbroni*. XI. 92.

LIQUIDI. Teoria fisico-matematica intorno al moto de' liquidi uscenti da' fori delle conserve. *Mario Lorgna*. IV. 369.

— Misura dell'impulsione permanente de' liquidi contro le superficie piane. *Del medesimo*. IV. 418.

Litologia. Lettera. *Gio. Maironi Daponte*. IX. 699.

Livellazioni. *Vedi* Macchine.

Logaritmi. Sopra i logaritmi delle quantità negative, e sopra gl'immaginarj. *Gregorio Fontana*. I. 183.

Logistica. Sull'uso della logistica nella costruzione degli Organi. *Pietro Ferroni*. XI. 383.

Longitudine. Della longitudine di Verona determinata con osservazioni astronomiche. *Antonio Cagnoli*. V. 77.

Luce. Articolo di lettera. *Felice Fontana*. I. 104.

—— Sopra la misura della luce in generale, e sopra l'illuminazione de' varj segmenti del disco Solare tagliati dall'orizzonte nel tempo del nascere e del tramontar del Sole. *Gregorio Fontana*. I. 111.

—— Ricerche analitiche sulla rifrazion della luce. *Del medesimo*. III. 498.

—— Sulla macchina a specchi di Buffon, e sulla luce che da uno specchio piano circolare viene ripercosso sopra uno spazio circolare dato. *Del medesimo*. VIII. 140.

Lumache. Risultati di sperienze sopra la riproduzione della testa nelle lumache terrestri. *Lazzaro Spallanzani*. I. 581, II. 506.

—— Sugli occhi delle lumache. *Giuseppe Bonvicini* *. VII. 291.

Luna. *Vedi* Rifrazione.

Lunule. *Vedi* Volte.

M

Macchine. Sopra una nuova macchina per dividere una data retta in qualunque numero di parti eguali. *Francesco Soave*. VIII. 56. P. II.

—— Sopra alcuni stromenti meteorologici, che segnano per sè stessi le variazioni atmosferiche per 24 ore e più. *A. M. Vassalli-Eandi*. VIII. 516. P. II.

—— Sopra una macchina per facilitare il movimento dello scopo delle aste nelle livellazioni. *Antonio Lombardi* *. IX. 44. P. II.

—— Riflessioni circa la Memoria di Eulero intorno la salita delle macchine aereostatiche. *Girolamo Saladini* *. X. 264.

—— A specchi di Buffon. *Vedi* Luce.

—— Descrizione d'un mutilingua, cioè d'uno stromento con cui i muti e sordi possono con altri parlare. *Ermenegildo Pini*. XIII. 289. P. II.

—— *Vedi* Eclissi, Stratimetro.

Malattie. Ricerche sopra le forme particolari delle malattie universali. *P. A. Bondioli*. XII. 256. P. II.

—— *Vedi* Calcoli, Foruncoli, Sale.

Mappe. Intorno alle mappe ed alla sfera di riduzione per l'arte navigatoria. *Mario Lorgna*. V. 17.

Mare. Nuove sperienze intorno alla dolcificazione dell'acqua del mare. *Del medesimo*. III. 375, V. 8.

Marine *produzioni*. Lettera relativa a diverse produzioni marine. *Lazzaro Spallanzani*. II. 603..

Marte. Opposizione di Marte. *Vincenzo Chiminello*. X. 150.

Masegna. *Vedi* Orittologia.

Matematica. Sopra diversi aneddoti matematici. *Pietro Ferroni*. VII. 309.

Meccanica. Sopra alcuni problemi meccanici. *Pietro Paoli*. VI. 534.

—— Sopra l'estensione e i confini della legge di continuità tanto nella meccanica generale quanto nell' animale. *Michele Araldi*. X. 75.

—— I principj della meccanica richiamati alla massima semplicità ed evidenza. *Pietro Ferroni*. X. 481.

—— Schiarimenti intorno a' principj da anteporsi nell'applicazione de' comunemente noti alla soluzione de' problemi meccanici. *Paolo Delanges*. XII. 78.

—— *Vedi* Problema.

Medicina. Osservazione sopra un tumore singolare cistico interno. *Giannantonio Marino*. IV. 59, 72.

—— Sopra un vomito urinoso. *Gianverardo Zeviani*. VI. 93.

—— Sopra una tosse degli alimenti. *Del medesimo*. VII. 124.

—— La malattia tredecennale di Elio Aristide Adrianeo sofista. *Vincenzo Malacarne*. VIII. 273.

—— Dello scopo che devon aver i Medici nella cura delle malattie, a loro propriamente appartenenti. *Stefano Gallini*. XV. 230. P. II.

—— *Vedi* Azione irritativa, Oppio.

Mercurio. Congetture sull'azione del mercurio vivo nel volvolo e sulla natura del sugo gastrico. *Pietro Moscati*. X. 153.

Mercurio *pianeta*. Osservazioni del passaggio di Mercurio pel disco del Sole li 6-7 Maggio 1799. *Vincenzo Chiminello*. VIII. 755.

—— Osservazioni di Mercurio e di Venere. *Del medesimo*. IX. 99.

—— Calcolo del passaggio di Mercurio pel disco del Sole nel giorno 8-9 Novembre 1802, secondo le osservazioni di Padova e di Napoli. *Del medesimo*. XI. 183.

Metallurgia. Sopra alcuni miglioramenti all'amalgamazione delle materie aurifere ed argentifere. *Ermenegildo Pini*. XIII. 1. P. II.

—— *Vedi* Gravità.

Meteore. Saggio analitico di alcune lucide meteore. *Carlo Barletti*. III. 331.

METEOROLOGIA. Osservazioni meteorologiche negli anni 1788, 1789. *Antonio Cagnoli*. V. 1.
—— 1790, 1791. . . . . VI. 205.
—— 1792, 1793. . . . . VII. 300.
—— Descrizione dell'Osservatorio Meteorologico eretto nel 1780. *Pietro Moscati*. V. 356.
—— Saggio d'un Trattato di Meteorologia. *A. M. Vassalli Eandi*. XIII. 85.
—— Notizie geologiche e meteorologiche di Terra d'Otranto nel Regno di Napoli. *Giuseppe Maria Giovene*. XV. 274. P. II.
—— *Vedi* Fenomeni, Macchine, Prognostici, Pioggia.
MIDOLLA *spinale*. Le scoperte di Gio. Gall sul sistema nervoso della spinal midolla, e del cervello esposte da Biscoff, e ridotte al giusto valore da *Vincenzo Malacarne*. XIV. 1. P. II.
MINERALOGIA. Osservazioni sulla nuova teoria e nomenclatura chimica come inammissibile in mineralogia. *Ermenegildo Pini*. VI. 309.
—— *Vedi* Montagne.
MINIERE. Di varie miniere di metallo e d' altre specie di fossili delle montane provincie di Feltre, di Belluno, di Cadore e della Carnia e Friuli; e specialmente del sale catartico amaro a base di magnesia, scoperto recentemente in quelle montagne. *Giovanni Arduini*. III. 297.
MISERERE *malattia*. Lettera di *L. M. A. Caldani*. IV. 310.
MOLLE. Sopra le molle. *Gregorio Fontana*. III. 509.
MOLTIPLICATORE. Teoremi sopra il moltiplicatore, che rende integrabili le equazioni differenziali di primo ordine a più variabili. *Del medesimo*. III. 516.
MONTAGNE. Memoria orografico-mineralogica delle Montagne Bergamasche. *Gio. Maironi Daponte*. IV. 554.
—— Osservazioni orittografiche sopra parecchie località de' Monti Padovani. *Alberto Fortis*. VI. 236.
MOSTRI. Lettera di *Gianverardo Zeviani*. VIII. 521.
—— De' mostri umani; de' caratteri fondamentali, su cui se ne potrebbe stabilire la classificazione; e delle indicazioni che presentano nel parto. *Vincenzo Malacarne*. X. 49.
—— Istoria anatomica di due gemelle mostruose. *Filippo Uccelli* *. XI. 123.
—— Della gravidanza quinquenne della madre d'un feto mostruoso asomalogacefalo. *Francesco Orazio Scortigagna* *. XIV. 305. P. II.
—— Conferma della proposizione circa alla produzione de' mostri umani. *Vincenzo Malacarne*. XV. 1. P. II.
—— *Vedi* Anatomia.
MOTO. Della forza viva di alcuni corpi che ruzzolano sopra un piano orizzontale, o pure girano intorno ad un asse verticale, movendosi ancora, se così piace, per una direzione orizzontale. *Giordano Riccati*. IV. 96.
—— Saggio sopra il moto degli animali, e sopra i trasporti. *Vittorio Fossombroni*. XII. 337.
—— Saggi intorno alla teoria del moto concreto de' corpi. *Paolo Delanges*. XIV. 148.
MOTO *perpetuo*. Esame d'un nuovo argomento in favore del moto perpetuo. *Gregorio Fontana*. III. 502.
MOTO *rotatorio*. Teoria generale del moto rotatorio spontaneo de' corpi naturali sopra piani inclinati. *Paolo Delanges*. V. 278.
—— *Vedi* Solidi.
MULE. Esame di alcune storie spettanti alla gravidanza delle mule. *L. M. A. Caldani*. IX. 370.
MUSICA. Sull'applicazione della matematica alla musica. *Giambattista Dall'Olio* *. IX. 609.
—— Sul preteso moderno ripristinamento del genere enarmonico de' Greci. *Del medesimo* *. X. 634.
MUTILINGUA. *Vedi* Macchine.

N

NATRO. Ricerche intorno all'origine del natro o alcali marino nativo. *Mario Lorgna*. III. 39.
—— Del natro orientale. *Luigi Palcani*. VIII. 77.
NARICI. Di due nuovi legamenti proprj della tramezza delle narici. *Floriano Caldani*. XIII. 214. P. II.
NAVIGLI *a remi*. Nuova teoria intorno al movimento de' navigli a remi. *Mario Lorgna*. II. 457.
NAUTICA. *Vedi* Mappe.
NOSOLOGIA *vegetabile*. Saggio di nosologia vegetabile. *Filippo Re*. XII. 225. P. II.
NULLA. Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale e il nulla immaginario. *Gregorio Fontana*. VIII. 174.
—— *Vedi* Teoremi.
NUMERI. Dell'uso delle frazioni decimali nella moltiplicazione de' numeri. *Isidoro Bernareggi* *. VI. 1.
—— Nuova dimostrazione d'un teorema importante nella dottrina dei numeri. *Pietro Paoli*. IX. 85.
—— Sul metodo di formar le equazioni, onde ritrovare i numeri Bernoulliani. *Sebastiano Canterzani*. XI. 173.
—— Saggio di alcuni problemi numerici. *Gianfrancesco Malfatti*. XII. 296.
—— *Vedi* Equazioni.

O

OBLIQUITA' *dell'eclittica*. Dell'obliquità dell'eclittica. *Giuseppe Piazzi*. XI. 426, XII. 62.
— *Vedi* Astronomia, Latitudine.
OCCHI. Sugli occhi fiammeggianti d'una bambina. *Giambattista Merzari* *. XI. 670.
— Intorno ai movimenti dell'iride dell'occhio. *L. M. A. Caldani*. XIV. 101. P. II.
OCCULTAZIONI. Occultazioni di stelle per la luna osservate a Napoli da *Giuseppe Cassella* *. VIII. 78.
ODORI. Intorno la denominazione e la classificazione degli odori. *Nicolò Da Rio* *. XI. 564.
OLIO. Del principio dolce degli olj. *Giovacchino Carradori* *. XIII. 100. P. II.
OPPIO. Storia d'un diabete guarito coll'oppio, e riflessioni sulla forma, e sull'indole di questa malattia. *Pietro Rubini*. XV. 20. P. II.
ORGANI. Sopra la tastatura degli organi e dei cembali. *Giambattista Dall'Olio* *. XIII. 374.
— *Vedi* Logistica.
ORITTOLOGIA. Sopra la così detta *Masegna* de'monti euganei. *Nicolò Da Rio* *. XV. 139. P. II.
ORITTOGRAFIA. *Vedi* Montagne.
ORO. *Vedi* Gravità.
OSCILLAZIONI. Sulle oscillazioni d'un corpo pendente da un filo estendibile. *Pietro Paoli*. XIV. 225.
OSSA *silicee*. Sopra le pretese ossa d'animali terrestri silicee del Montperdu negli alti Pirenei. *Alberto Fortis*. X. 172.
OSTETRICIA. Casi d'ostetricia non comuni raccolti da *Vincenzo Malacarne*. XIII. 119. P. II.
OTTICA. Considerazioni ottiche. *Giambattista Venturi*. III. 268.

P

PALLADE *pianeta*. Lettera di *Vincenzo Chiminello*. IX. 707.
PALLE *geomantiche*. *Vedi* Pendoli.
PANIZZAZIONE. Sulla panizzazione. *Gio. Battista Dall'Olio* *. XI. 337.
PARALLASSE. Ricerche sulla parallasse annua di alcune delle principali fisse. *Giuseppe Piazzi*. XII. 40.
— Sull'annua parallasse di α della Capra. *Vincenzo Chiminello*. XIV. 1.
PATOLOGIA. *Vedi* Anatomia.
PATOMOLOGIA. Sperienze ed osservazioni patomologiche. *Teodoro Bonati*. XI. 680.
PENDOLI. Determinare il massimo allungamento che il peso d'un pendolo produce nella corda, a cui è attaccato che si suppone priva d'inerzia e di gravità. *Giordano Riccati*. IV. 81.
— Dell'azione di varie sostanze sopra altre sostenute pendenti su di esse. *Carlo Amoretti*. XIII. 221. P. II.
— Pendolo idrometrico composto. *Giuseppe Venturoli*. XIV. 158.
PIANETI. Sulla vera densità de'pianeti, sulla riduzione de'loro semidiametri, e sull'ipotesi de'loro nuclei. *Leonardo Ximenes*. III. 278.
— Della stazione de'pianeti. *Antonio Cagnoli*. III. 369.
— *Vedi* Astronomia.
PIANTE. Sullo stabilimento di alcuni nuovi generi di piante. *Gaetano Savi* *. VIII. 477.
— Sopra alcune nuove specie di piante. *Del medesimo* *. IX. 349.
— *Vedi* Carbonio.
PIOGGIA. Descrizione d'una macchina meteorologica per mezzo della quale si determina d'ora in ora la durata e quantità della pioggia. *Marsilio Landriani*. I. 203.
— Prospetto comparato della pioggia della Puglia. *Giuseppe Maria Giovene*. XII. 113. P. II.
— Sull'opinione delle pioggie dei sassi dai vulcani lunari. *Pietro Cossali*. XIII. 104.
PITTURA. Del dipignere a olio combinato. *Mario Lorgna*. VI. 560.
POLLASTRE. Riflessioni ed esperienze sulla pretesa castrazione delle pollastre, e sulla fecondazione dell'ovo. *Gianfrancesco Cigna*. IV. 150.
POTASSA. *Vedi* Carbonio.
POTENZE. Della progressione delle potenze affette. *Mario Lorgna*. II. 210.
— Teoria delle potenze parallele. *Gregorio Fontana*. III. 519.
PRECIPITATO *porpora*. Sperienze sopra il precipitato porpora ottenuto dal gaz ricavato dallo stagno e dalla sua calce. *Carlo Morozzo*. I. 431.
PRESSIONI. Sulle pressioni esercitate da un corpo sostenuto da tre o più appoggi collocati nello stesso piano. *Paolo Delanges*. IV. 107, VIII. 60.
— Dell'azione d'un corpo retto da un piano immobile esercitata ne'punti d'appoggio, che lo sostentano. *Mario Lorgna*. VII. 178.
— Sopra la pressione delle porte contro i loro arpioni. *Gregorio Fontana*. VIII. 135.
— Tentativo sul problema delle pressioni, che soffrono gli appoggi collocati agli angoli d'una figura, derivata da un peso posto dentro la sua aja. *Gianfrancesco Malfatti*. VIII. 319.
— Sul problema degli appoggi. *Pietro Paoli*. IX. 92.

Pressioni. Brevi riflessioni alla critica del tentativo sul problema delle pressioni fatta dal Sig. Paoli nel Tomo IX. *Gianfrancesco Malfatti*. X. 245.

—— Sopra la spinta delle travi o tetti contro i loro sostegni. *Gregorio Fontana*. III. 523.

—— Appendice al problema delle pressioni. *Gianfrancesco Malfatti*. XII. 100.

—— Esame di alcuni tentativi di soluzione d'un famoso problema di meccanica-statica. *Michele Araldi*. XIII. 74.

—— Analisi e soluzione sperimentale del problema delle pressioni. *Paolo Delanges*. XV. 114.

Probabilita'. Esame critico d'un problema di probabilità di Daniele Bernoulli, e soluzione d'un altro problema analogo al Bernoulliano. *Gianfrancesco Malfatti*. I. 768.

Problemi. Considerazioni sintetiche sopra d'un celebre problema piano, e risoluzione di alquanti altri teoremi affini. *Annibale Giordano* *. IV. 4.

—— Problema grafico. *Giuseppe Tramontini* *. XIII. 38.

—— Considerazioni su d'un problema meccanico. *Giovacchino Pessuti*. XIII. 181.

—— Sulla risoluzione de' problemi di massimo o minimo, quando la quantità che vuolsi massima o minima è data. *Sebastiano Canterzani*. XIV. 167.

Pronostici. Dei pronostici ragionati delle annate e delle stagioni. *Giuseppe Maria Giovene*. X. 108.

Prosopalgia. Saggio sopra la prosopalgia, e della sua analogia colla pedionalgia. *Giannantonio Marino*. IX. 1.

Q

Quadratura. Riflessioni intorno alla rettificazione, ed alla quadratura del circolo. *Paolo Ruffini*. IX. 527.

—— Della impossibilità della quadratura del cerchio. *Tommaso Valperga Caluso*. IX. 558.

Quantita' *immaginarie*. Dimostrazione della riducibilità d'ogni quantità immaginaria algebraica alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, adattata ad un Trattato elementare della natura delle equazioni. *Sebastiano Canterzani*. II. 720.

Quarzo. *Vedi* Cristalli quarzosi.

Quina. Ricerche sulla quina. *Gio. Fabbroni*. X. 314.

R

Radici. Natura delle radici delle equazioni letterali di quinto e sesto grado: e nuovo metodo per le radici prossime dell'equazioni numeriche di qualunque grado. *Teodoro Bonati*. VIII. 231.

—— *Vedi* Equazioni, Funzioni e Teorema.

Ranocchie. Osservazioni sopra le idatidi delle ranocchie. *Floriano Caldani*. VII. 305.

Rifrazioni. Sulla rifrazione lunare. *Francesco Bertirossi Busata* *. XIII. 6.

—— Sopra la rifrazione lunare. *Angelo Cesaris*. XIV. 48.

—— *Vedi* Latitudine.

Robbia. Della tintura del cotone e filo in rosso colla robbia. *Giannantonio Giobert*. XIII. 363. P. II.

Rose. Lettera relativa a due rose prolifiche. *Paolo Spadoni* *. V. 488.

—— Sopra alcune rose prolifiche. *Giuseppe Maria Giovene*. XI. 1.

—— Sopra alcune rose particolari dell'Italia inferiore. *Pompilio Pozzetti*. XI. 608.

Rotazione. Degli elementi spettanti alla teoria della rotazione solare e lunare. *Antonio Cagnoli*. VIII. 196.

S

Sale. Sopra la salinazione artificiale. *Vittorio Fossombroni*. VII. 57.

—— Sopra il sale sedativo d'Hombergio, ossia acido boracico, che si trova ai lagoni del Volterrano e del Senese, e sopra diversi borati, che pur ivi si trovano. *Paolo Mascagni*. VIII. 487.

—— Sopra alcuni prodotti singolari dell'animale economia morbosa. *Pietro Moscati*. XIII. 310, 321. P. II.

—— *Vedi* Miniere.

Sale *ammoniaco*. Osservazioni ed esperimenti sopra la scomposizione del sale ammoniaco per mezzo della calce terrea. *Giuseppe Angelo Saluzzo*. I. 526.

Saline *a fuoco*. Sopra un nuovo laboratorio di salina a fuoco. *Domenico Ranaldi* *. XII. 330. P. II.

Sangue. Della forza e dell'influsso del cuore sul circolo del sangue. *Michele Araldi*. XI. 342, XV. 166. P. II.

—— Riflessioni ed osservazioni intorno al color rosso del sangue. *L. M. A. Caldani*. XV. 59. P. II.

Sassi. *Vedi* Pioggie.

Saturno. Opposizioni di Saturno osservate da *Vincenzo Chiminello*. XIV. 197.

Semifluidi. Statica e meccanica de' semifluidi. *Paolo Delanges*. IV. 329.

Serie. Nuova investigazione della somma generale delle serie. *Mario Lorgna*. I. 268.

—— Sopra le serie. *Gregorio Fontana*. II. 386.

—— Sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccoli. *Del medesimo*. II. 123.

—— Teoremi sopra le serie infinite convergenti formate dai prodotti de' numeri dispari successivi, divisi pe' prodotti de' numeri pari corrispondenti. *Del medesimo*. III. 174.

—— Delle serie ricorrenti. *Gianfrancesco Malfatti*. III. 571.

—— Ricerche sulle serie. *Pietro Paoli*. IV. 429.

—— Osservazioni sul ritorno delle serie. *Sebastiano Canterzani*. V. 88.

Seta. Ricerche chimico-economiche intorno alla seta. *Giannantonio Giobert*. X. 471.

Sferoidi *ellittici*. *Vedi* attrazione.

Sole. Segmenti illuminati nell'orto e nell'occaso. *Gregorio Fontana*. I. 111.

—— *Vedi* Luce.

—— Osservazioni dell'eclisse di Sole del 16 Giugno 1806. *Giuseppe Piazzini* *. XV. 290.

Solidi. Sopra il movimento concreto de' solidi. *Paolo Delanges*. III. 1.

—— Intorno all'incurvazione de' solidi. *Del medesimo*. XII. 1.

Solidita'. Principj generali della solidità e della fluidità de' corpi. *Felice Fontana*. I. 89.

Solstizj. Osservazioni solstiziali fatte al gnomone della Cattedrale Fiorentina nell'anno 1782 e de' loro risultati, paragonandole colle simili osservazioni del 1756, 1764 e 1775. *Leonardo Ximenes*. II. 256.

Sonno. *Vedi* Gonorrea.

Specchi. *Vedi* Luce.

Splancnografia. *Vedi* Encefalotomia.

Statica. Saggio d'un nuovo corso elementare di statica. *Leonardo Salimbeni*. V. 426.

—— Nuova soluzione d'un problema statico Euleriano. *Gregorio Fontana*. IX. 626.

—— Principj di statica per i tetti, per i ponti e per le volte. *Paolo Delanges*. X. 133.

Stelle. Catalogo di stelle. *Antonio Cagnoli*. X. 687, XI. 676.

Stenocardia. Della stenocardia, malattia volgarmente conosciuta sotto il nome di *angina pectoris*. *Valeriano Luigi Brera*. XV. 196. P. II.

Stereotomia. Sopra un problema stereotomico. *Gianfrancesco Malfatti*. X. 235.

Storia *naturale*. Osservazioni fatte presso Stabio, nel Cantone Svizzero del Ticino. *Carlo Amoretti*. XV. 117. P. II.

—— *Vedi* Litologia, Insettologia.

Stratimetro. Descrizione ed uso d'uno stratimetro, cioè di un nuovo stromento diretto a facilitare la determinazione sì della comune sezione di due strati, filoni, o piani qualunque, come di altri oggetti di geometria sotterranea. *Ermenegildo Pino*. XV. 155.

Suono. Delle vibrazioni sonore de' cilindri. *Giordano Riccati*. I. 444.

Superficie. *Vedi* Attrazione.

T

Tatto. Osservazioni sopra la squisitezza del senso del tatto di alcuni vermi marini. *Giuseppe Olivi*. VII. 478.

Tempo. Sulla determinazione *a priori* del valore dell'equazione del tempo. *Francesco Pezzi*. VIII. 242.

Tensione. Sulla tensione delle funi. *Pietro Cossali*. X. 285.

Teoremi. Sulla falsità di due famosi teoremi. *Gregorio Fontana*. II. 123.

—— Il nulla immaginario non può confondersi col reale. *Giordano Riccati*. IV. 116.

—— Esame d'una dimostrazione che dà l'Eulero d'un Teorema analitico, e d'una celebre regola per determinare la natura e i valori prossimi delle radici di qualunque equazione. *Gianfrancesco Malfatti*. IV. 206.

Terebintina. Sulla maniera di preservar i libri, e di restaurarli danneggiati, e di costruir biblioteche. *Gio. Fabbroni*. XI. 92.

Termometro. Della costruzione d'un termometro ad indice. *Giambattista da S. Martino*. VI. 71.

Terra. Nuovo e sicuro mezzo per riconoscer la figura della terra. *Antonio Cagnoli*. VI. 227.

—— Sulle rivoluzioni del globo terrestre prodotte dall'azione dell'acque. *Ermenegildo Pini*. V. 163, VI. 389.

Tetti. Sui tetti che piovono da una sola banda. *Leonardo Salimbeni*. IV. 249.

Tisichezza. *Vedi* Cicuta.

Tofo. Notizie d'un banco di tofo. lacustre in riva al mare nelle vicinanze di Trani nella Puglia. *Giuseppe Maria Giovene*. XIV. 114. P. II.

Torbiere. Sulla Torbiera di Cerete nel Territorio Bergamasco. *Gio. Maironi Daponte*. XIII. 78. P. II.

Toro. Osservazioni dell'occultazione di τ del Toro sotto la luna dei 2 Ottobre 1806 calcolate da *Giuseppe Piazzini* *. XV. 296.

Torpedine. *Vedi* Anatomia.

Transiti. Formule per corregger le deviazioni d'un istromento de' transiti. *Antonio Cagnoli*. IX. 30.

Trappo. Sul trappo del monte Simmolo presso Intra, e sui vetri che se ne sono formati. *Carlo Amoretti*. VIII. 416.

Trasporti. *Vedi* Moto.
Tremuoto. Sopra il tremuoto che da 7 mesi scuote le valli del Pelice, del Chisone e del Po. *G. M. Vassalli-Eandi*. XIV. 238. P. II.
Trigonometria. Cose trigonometriche. *Antonio Cagnoli*. VIII. 1.
—— Delle differenze finite nella trigonometria. *Del medesimo*. VIII. 214.
—— Calcolo delle variazioni finite nella trigonometria piana e sferica. *Mario Lorgna*. IV. 156, VII. 346.
—— Sopra un problema trigonometrico. *Francesco Pezzi*. XI. 10.
—— Paralleli e principio unico e semplice delle due Trigonometrie. *Pietro Ferroni*. XII. 106.
—— Nuovo metodo per la trigonometria sferica. *Giovacchino Pessuti*. XV. 197.
Trombe. Osservazioni sopra alcune trombe di mare formatesi nell'Adriatico il 23 Agosto 1785. *Lazzaro Spallanzani*. IV. 473.
Tubi. Esperienze sul dispendio d'acqua de' tubi, e de' canali rettilinei e tortuosi. *Paolo Delanges*. XIII. 172.
Tubi *addizionali*. Sull'efflusso pe' tubi addizionali. *Giuseppe Venturoli*. XII. 277.
Tumore. *Vedi* Medicina.

V

Vajolo. *Vedi* Chinachina.
Variazioni. *Vedi* Trigonometria.
Vegetabili. *Vedi* Nosologia.
Velocita'. Sopra la trasfusione della velocità nel conflitto de' corpi. *Gregorio Fontana*. III. 513.
Venere *pianeta*. Osservazione della congiunzione inferiore di Venere col Sole ai 20 Marzo 1782 con alcune riflessioni. *Angelo Cesaris*. II. 313.
—— Le digressioni di Venere e di Mercurio in Aprile e in Maggio 1788 osservate in Verona da *Antonio Cagnoli*. IV. 519.
—— Osservazioni di Mercurio e di Venere. *Vincenzo Chiminello*. IX. 99.
—— Congiunzione inferiore di Venere dell'anno 1807 osservata in Pisa da *Giuseppe Piazzini* *. XV. 276.
Vermi. Sopra i vermi pestilenziali de' buoi. *Gianverardo Zeviani*. X. 361.
—— Sopra una straordinaria affezione verminosa. *Giambattista Dall'Olio* *. XI. 158, XII. 347. P. II.
—— Vermi del cuore vivi e veri. *Gianverardo Zeviani*. XIV. 152. P. II.
Veterinaria. Storia d'un egagropile trovata nel secondo ventricolo d'un bue. *Francesco Toggia* *. V. 382.
Vitalita'. Tentativi diretti a indagare le leggi della vitalità nell'economia animale. *Stefano Gallini*. XIV. 214. P. II.
Volte. Sulla costruzione e quadratura di alcune volte e lunule. *Giordano Riccati*. V. 48.
Volvolo. *Vedi* Mercurio.
Urano. Teoria del nuovo astro osservato prima in Inghilterra. *Ruggero Boscovich*. I. 55.
—— Opposizione del nuovo pianeta osservato negli anni 1781, 1783, 1786 a 1792, 1794 a 1797 da *Giuseppe Slop de Cademberg*. II. 853, III. 258, VI. 137, VIII. 40, X. 799, XII. 24.
—— Opposizione del nuovo pianeta osservata nel 1788 da *Antonio Cagnoli*. IV. 1.
—— Opposizioni di Herschel osservate da *Vincenzo Chiminello*. XIII. 32.
Urina. *Vedi* Chinachina.
Vulcani. Circa gl'indizj d'antichissimi vulcani nelle montagne e alpi Vicentine, Veronesi e Trentine. *Gio. Arduino*. VI. 102.

◆ ◆ ◆

PREZZO

DE' TOMI DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

Tomi	*Prezzo in lire italiane*	*Tomi*	*Prezzo in lire italiane*	*Tomi*	*Prezzo in lire italiane*
I	L. 12 : 50	VI	L. 8 : 50	XI	L. 16 : 50
II	,, 13 : 50	VII	,, 9 : 50	XII	,, 18 : 50
III	,, 11 : —	VIII	,, 15 : 50	XIII	,, 18 : 50
IV	,, 10 : 50	IX	,, 17 : 50	XIV	,, 18 : —
V	,, 11 : —	X	,, 17 : 50	XV	,, 20 : —

Il Tomo II è il solo che non può darsi separato dagli altri.

Chi acquisterà la collezione intera goderà la diminuzione d'un terzo sul prezzo totale.

NOME DEGLI AUTORI

CHE HANNO INSERITO MEMORIE NEI TOMI DELLA SOCIETA' ITALIANA DELLE SCIENZE E INDICAZIONE DEI TOMI OVE SI TROVANO.

L'asterisco semplice significa l'Autore non Socio; il doppio il Socio Onorario.

Abbati Pietro * X, XII.
Alemanni Pietro * XIII.
Aldini Giovanni XIV.
Amoretti Carlo VIII, X, XII, XIII, XIV, XV.
Araldi Michele X, XI, XII, XIII, XV.
Arduini Giovanni III, VI.

Balbo Prospero ** XV.
Baronio Giuseppe * IV, IX.
Barletti Carlo I, II, III, IV, VII.
Barani Bartolomeo * XI.
Bernareggi Isidoro VI.
Bertirossi Busata Ab. Francesco * XIII.
Bonati Teodoro II, V, VIII, XI, XV.
Bondioli Pier Antonio IX, XII, XIV.
Bonvicini Giuseppe VII.
Bordoni Antonio * XV.
Boscovich Ruggero I.
Bramieri Luigi * IX.
Brera Valeriano Luigi XIV, XV.
Brunacci Vincenzo XIV, XV.

Cagnazzi Luca de' Samuele * XIII.
Cagnoli Antonio III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XIV.
Cagnoli Ottavio * XIV, XV.
Caldani Floriano VII, VIII, XII, XIII.
Caldani Leopoldo Maria IV, VII, VIII, IX, X, XII, XIII, XIV, XV.
Caluso Valperga Tommaso IX, XII, XIV.
Canterzani Sebastiano II, V, VIII, XI, XIV.
Cardinali Francesco * XIII.
Carradori Giovacchino * X, XI, XII, XIII, XV.
Cassella Giuseppe * VIII, XI, XV.
Cesaris Angelo II, X, XI, XIV.
Chiminello Vincenzo II, III, VI, VII, VIII, IX, X, XI. XII, XIII, XIV, XV.
Cigna Gio. Francesco IV.
Corti Bonaventura * XI.
Cossali Pietro IX, X, XIII, XV.

Dal Negro * XI.
Dall'Olio Gio. Battista ** IX, X, XI, XII, XIII.
D'Ancora Gaetano VI.
Da Rio Nicolò * XI, XV.
Da S. Martino Gio. Battista VI, VII, VIII.
Delanges Paolo III, IV, V, VIII, X, XII, XIII, XIV, XV.
Del Bene Benedetto ** VIII.

Focacci Francesco * XIII, XV.
Fontana Felice I, II, V.
Fontana Gregorio I, II, III, VIII, IX.
Fortis Alberto VI. X.
Fossombroni Vittorio III, VII, IX, XII, XIII.
Franceschinis Francesco Maria V.

Franchini Pietro * XI, XII.
Fabbroni Angelo IV, VIII, IX.
Fabbroni Giovanni X, XI, XII, XIII.
Ferrari Bernardino VII.
Ferroni Pietro V, VII, IX, X, XI, XII, XIV, XV.

Gallini Stefano XIV, XV.
Giobert Giannantonio X, XIII.
Giordano Annibale IV.
Giovene Giuseppe Maria VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV.
Girardi Michele II, III, IV.
Guarienti Antonio * XV.

Landi Ferdinando ** XI.
Landriani Marsilio I.
Lombardi Antonio ** IX, X.
Lorgna Mario I, II, III, IV, V, VI, VII.

Maironi Daponte Gio. IV, IX, XI, XIII, XIV, XV.
Malacarne Vincenzo I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV.
Malfatti Gio. Francesco I, II, III, IV, VII, VIII, X, XI, XII, XIII.
Marino Giannantonio III, IV, IX.
Marzari Gio. Battista * XI.
Mascagni Paolo VIII, XI, XV.
Mascheroni Lorenzo IX.
Morichini Domenico * XII.
Morozzo Carlo Lodovico I, II, III, VI, X, XI.
Moscati Pietro I, V, X, XIII.

Olivi Giuseppe VI, VII.
Oriani Barnaba III.

Palcani Luigi * V, VIII.
Paoli Pietro II, IV, VI, VIII, IX, X, XIII, XIV.
Pellizzari Antonio * IX, X.
Penada Jacopo * VIII, X, XI, XIII.
Pessuti Gioacchino XI, XIII, XIV, XV.
Petrini Pietro * XIII.
Pezzi Francesco IV, V, VI, VIII, XI, XIII.
Piazzi Giuseppe XI, XII, XIII.
Piazzini Giuseppe * XV.
Pieri Mario * XV.
Pindemonti Ippolito ** II, IX.
Pini Ermenegildo III, V, VI, IX, X, XII, XIII, XIV, XV.
Plana Giovanni * XV.
Pozzetti Pompilio ** IX, X, XI, XII, XIII, XIV.

Racagni Giuseppe X, XIII.
Raddi Giuseppe * XIII.
Ranaldi Domenico * XII.
Re Filippo XII, XIV.
Riccati Giordano I, III, IV, V.

Rosa Michele VII.
Rossi Pietro IV, VII, VIII.
Rubini Pietro IV, VII, VIII, XIV, XV.
Ruffini Paolo IX, X, XII, XIII.

Saladini Girolamo IX, X, XI, XII.
Salimbeni Leonardo IV, V, VII.
Saluzzo Giuseppe Angelo I.
Santini Giuseppe * XV.
Savi Gaetano * VIII, IX.
Scarpa Antonio II.
Scortigagna Francesco Orazio * XIV.
Slop Giuseppe II, III, VI, VIII, X, XII, XIII.
Soave Francesco VIII.
Spadoni Paolo * V.
Spallanzani Lazzaro I, II, III, IV, VII.
Stratico Simone V.
Targioni Tozzetti Ottaviano XI, XIII, XIV.
Toaldo Giuseppe VI, VIII.
Toggia Francesco V.
Tramontini Giuseppe * XIII.

Vassalli Eandi Antonmaria IV, VIII, X, XIII, XIV.
Veneziani Giuseppe * XIII.
Venturi Giambattista III, VIII.
Venturoli Giuseppe XII, XIV, XV.
Uccelli Filippo * XI.
Volta Alessandro II, V.

Ximenes Leonardo I, II, III.

Zendrini Ab. Angelo * XIII.
Zeviani Gianverardo I, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV.
Zuliani Pietro * VIII.

31.1

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY